翻　訳

ユークリッド原論

中川　洋子　訳
Yoko NAKAGAWA

第　1　巻（注1）

定　義

1．点は、それの部分が何もないところのものだ。
2．線は幅のない長さだ。
3．また線の端は点だ。
4．また直線は、同じようにそれ自身の上の点に横たわっているところのものだ。
5．また面は、ただ長さと幅だけを持つところのものだ。
6．また面の端は線だ。
7．平面は、同じようにそれ自身の上の直線に横たわる。
8．また平面において、互いに交わっている直線にならない２直線の互いに関しての傾きが平面角だ。
9．また角を取り囲む線がまっすぐである場合に、角は直線角からなると言われる。
10. また直線が直線へ向かって立っていて、そこで接角を互いに等しくする場合に、等しい角のそれぞれは直角である。そしてそれへ向かって上に立っている直線は垂直であると言われる。
11. 直角より大きい角は鈍角である。
12. 直角より小さい角は鋭角である。
13. 境界とは、あるものの端だ。
14. 一つあるいはいくつかの境界によって取り囲まれたものは図形である。
15. 円とは一つの線によって取り囲まれた平らな形だ［それは円形と呼ばれる］，それに向かって［円の周囲へ向かって］置かれている形の真ん中の一点からぶつかっている直線は互いに等しい。
16. またその点は、円の中心と呼ばれる。
17. また円の直径とは、円の中心を横切っているある直線で、円の円形によって、それぞれの部分へ向かって保ちながらまた限りながら、円を二つに分割するところのものだ。
18. また半円形とは、直径とそれ自身の円形によって分割されたものとが取り囲む図形だ。
また半円形の中心は、円の中心と同じだ。
19. 直線からなる図形は、まっすぐな線によって取り囲まれたものである。三本によってのものは三辺形、四本によってのものは四辺形、四本より多くの直線によって取り囲まれたものは多辺形。
20. また３辺形の中で等辺三角形であるとは、三つの等しい辺を持つものである。また二等辺三角形とは、二つの辺だけが等しくある。不等辺三角形とは、三つの等しくない辺を持つものだ。
21. 更に、三角形のうちの直角三角形とは、一つの直角を持っている三角形である。また鈍角三角形は、一つの鈍角を持っている。鋭角三角形は、三つの鋭角を持っている。
22. また四辺を持ったもののうち正方形とは、等辺でありそしてまた直角だ。長方形とは、それは直角で等辺ではない。またひし形とは、それは等辺であり直角ではない。また偏菱形は、向かい合った辺と角が互いに等しいものを持ち、それは正方形でもなく長方形でもない。これらではない四

辺形は台形と呼ばれよう。

23. 平行線とは、それらは同じ平面にあるもので、そして限りなく両方へ延びながら双方のどの部分に関しても互いに交わることはない。

公　　準

前提として要請されている。

１．すべての点からすべての点へ直線を引くこと。
２．有限の直線を連続して直線に延長すること。
３．任意の円の中心と半径によって円を描くこと。
４．すべての直角は互いに等しいこと。
５．もし二直線と交わっている一直線が、同じ側で２直角より小さい内角の和を作るならば、これらの二直線を限りなく延長させると、それらは２直角より小さい角のある側で交わること。

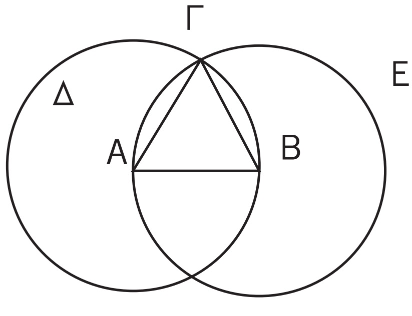
共　通　概　念　（公理）

１．同じものに等しいものは、互いに等しくある。
２．そしてもし等しいものに等しいものが加えられるなら、全体は等しくある。
３．そして等しいものから等しいものが取り去られるなら、残りは等しくある。
［４.そしにもし等しくないものに等しいものが加えられるなら、全体は等しくない。
５．そして同じものの２倍は互いに等しくある。
６．そして同じものの半分は互いに等しくある。］
７．そして互いに重なるものは互いに等しくある。
８．そして全体はそれの一部より大きい。
９．そして二つの直線は図形を取り囲まない。

1

与えられた有限直線の上に等辺三角形が形成される。

与えられた有限直線をＡＢとしよう。
線分ＡＢの上に等辺三角形が形成されなければならない。



円の中心Ａまた半径ＡＢによって円ＢΓΔが描かれているとし、そして更に円の中心Ｂまた半径ＢＡによって円ＡΓＥが描かれているとせよ。そして２つの円が互いに交わっている点Γから、２つの点Ａ、Ｂへ線分ΓＡ、ΓＢが結ばれたとせよ。

すると点Ａは円ΓΔＢの中心であるから、ＡΓはＡＢに等しい。更に、点Ｂは円ΓＡＥの中心であるからＢΓはＢＡに等しい。またΓＡもＡＢに等しいと示される。そこでΓＡ、ΓＢのそれぞれはＡＢに等しい。また同じものに

等しいものは互いに等しい。そしてその結果ΓΑはΓΒに等しい。そこで３線分ΓΑ、ΑΒ、ΒΓは互いに等しい。

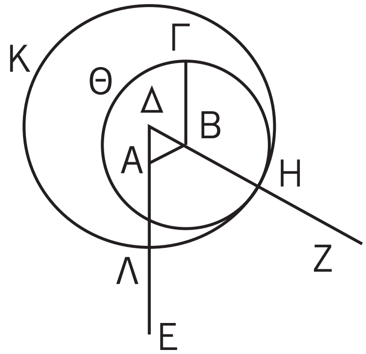
ゆえに、三角形ΑΒΓは等辺三角形であり、与えられた有限直線ΑΒの上に構成された。

[そこで与えられた有限直線の上に等辺三角形が構成された]。これが作図すべきものであった。

2

与えられた点に、与えられた線分に等しい線分を与えること。

与えられた点をΑとし、一方与えられた線分をΒΓとせよ。かくて点Αに与えられた線分ΒΓに等しい線分を与えなければならない。



点Αから点Βへ直線ΑΒが引かれるとし、そしてそれ自体の上に等辺三角形ΔΑΒが形成されるとせよ。そして線分ΔΑ、ΔΒから線分ΑΕ、ΒΖが延長している。そして円の中心Βと半径ΒΓによって円ΓΗΘが描かれる。更に円の中心Δと半径ΔΗによって円ΗΚΛが描かれるとせよ。

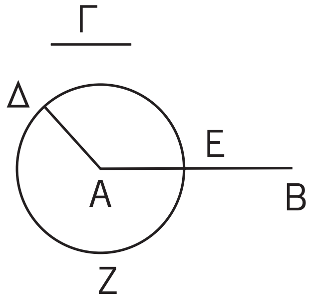
そこで点Βは円ΓΗΘの中心だから、ΒΓはΒΗに等しい。更に、点Δは円ΚΛΗの中心だから、ΔΛはΔΗに等しく、それらに属するΔΑはΔΒに等しい。その結果残りのΑΛは残りのΒΗに等しい。またΒΓはΒΗに等しいと示されていた。その結果ΑΛ、ΒΓの両方はΒΗに等しい。また同じものに等しいものは互いに等しい。ゆえにΑΛもΒΓに等しい。

ゆえに、与えられた点Αに与えられた線分ΒΓに等しい線分ΑΛが置かれている。これが作図すべきものであった。

3

等しくない２直線が与えられているなら、大きいほうから小さいほうに等しい線分を取り除くこと。

与えられた等しくない２線分をΑΒ、Γとし、それらのより大きいほうをΑΒとせよ。かくてより大きいΑΒからより小さいΓに等しい線分を取り除かねばならない。



点Αに線分Γに等しい線分ΑΔが置かれるとし、そして点Αを中心また半径ΑΔによって円ΔΕΓが描かれるとせよ。

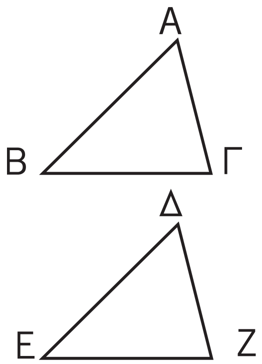
そして点Αは円ΔΕΓの中心だから、ΑΕはΑΔに等しい。そしてΓもΑΔに等しい。その結果ΑΕ、ΓのどちらもΑΔに等しい。よってΑΕもΓに等しい。

ゆえに、等しくない２線分ΑΒ、Γが与えられるなら、より大きなΑΒから小さいΓに等しいΑΕは取り除かれる。これが作図すべきものであった。

4

もし２つの三角形の２辺がそれぞれ等しく、また等しい線分によって囲まれた角が等しいなら、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しいだろう。そして等しい辺に対している残りの角のそれぞれは残りの角のそれぞれに等しいだろう。

２つの三角形をＡＢΓ、ΔＥＺとし、２辺ＡＢ、ＡΓは２辺ΔＥ、ΔＺに、すなわちＡＢはΔＥに一方ＡΓはΔＺに等しいとし、そして角ＢＡΓは角ＥΔＺ等しいとせよ。底辺ＢΓは底辺ＥＺに等しく、そして三角形ＡＢΓは三角形ΔＥＺに等しいだろう。また等しい辺に対している残りの角は残りの角に、すなわち角ＡＢΓは角ΔＥＺに、一方角ＡΓＢは角ΔＺＥに等しいと主張する。



何故なら、三角形ＡＢΓを三角形ΔＥＺに重ねるために点Ａを点Δに置き、線分ＡＢを線分ΔＥにおく。するとＡＢがΔＥに等しいために、点Ｂは点Ｅに重なる。ＡＢがΔＥに重なったので線分ＡΓも角ＢＡΓが角ＥΔＺに等しいことからΔＺに重なるだろう。その結果、点Γも点Ｚに再びＡΓがΔＺに等しいことから重なるだろう。更にＢはＥに重なっていた。その結果、底辺ＢΓは底辺ＥＺに重なるだろう。何故ならもしＢがＥに重ならないなら、２線分は図形を囲むだろう。それは不可能である。その結果、底辺ＢΓはＥＺに重なり、そしてそれ自体に等しいだろう。よって、三角形ＡＢΓ全体も三角形ΔＥＺ全体に重なりそしてそれ自体に等しいだろう。そして残りの角も残りの角に重なり、それらは等しいだろう、角ＡＢΓは角ΔＥＺに、一方角ＡΓＢは角ΔＺＥに。

ゆえに、もし２つの三角形が等しい２辺を持ち、等しい線分によって囲まれている角が等しくあるなら、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しくあるだろう。そして等しい辺に対している残りの角は残りの角に等しいだろう。これが証明すべきことであった。

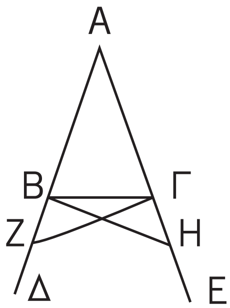
5

二等辺三角形の底辺における角は互いに等しく、そして等しい辺を延ばせば、底辺の下の角も互いに等しくあるだろう。

二等辺三角形ＡＢΓは等しい辺ＡＢと辺ＡΓを持ち、そして直線ＡＢ、ＡΓに加えて直線ＢΔ、ΓＥが延ばされているとせよ。角ＡＢΓは角ＡΓＢに等しくあり、一方角ΓＢΔは角ＢΓＥに等しいと主張する。

ＢΔの上に点Ｚを取り、より大きいＡＥから小さいＡＺに等しいＡＨを取り去り、そして線分ＺΓ、ＨＢが結ばれたとせよ。

ＡＺはＡＨに、一方ＡＢはＡΓに等しいのだから、２線分ＺＡ、ＡΓのそれぞれは２線分ＨＡ、ＡＢのそれぞれに等しい。そして共通の角ＺＡＨを取り囲む。その結果、底辺ＺΓは底辺ＨＢに等しく、三角形ＡＺΓは三角形ＡＨＢに等しいだろう。そして残りの角はそれぞれ残りの角に、すなわち



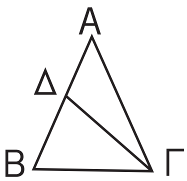
その下へ等しい辺を延ばしている角ＡΓＺは角ＡＢＨに、一方角ＡＺΓは角ＡＨＢに等しいだろう。そして線分全体ＡＺは線分全体ＡＨに等しいのだから、それに属するＡＢはＡΓに等しい。その結果、残りのＢＺは残りのΓＨに等しい。またＺΓもＨＢに等しいと示された。かくて２線分ＢＺ、ＺΓはそれぞれ２線分ΓＨ、ＨＢに等しい。そして角ＢＺΓは角ΓＨＢに等しく、ＢΓはそれらの共通の底辺であるから、三角形ＢＺΓは三角形ΓＨＢに等しいだろう。またその下に等しい辺が延びているところの残りの角は, 残りの角にそれぞれ等しいだろう。その結果、角ＺＢΓは角ＨΓＢに等しく、一方角ＢΓＺは角ΓＢＨに等しい。そこで全体の角ＡＢＨは全体の角ＡΓＺに等しいと示されたのだから、それらに属する角ΓＢＨは角ＢΓＺに等しく、その結果残りの角ＡＢΓは残りの角ＡΓＢに等しい。そしてそれらは三角形ＡＢΓの底辺にある。そしてまた底辺の下にある角ＺＢΓは角ＨΓＢに等しいと示された。

ゆえに、二等辺三角形の底辺にある角は互いに等しくあり、そして等しい線分を延ばしたものの底辺の下の角は互いに等しい。これが証明すべきことであった。

6

もし三角形の２つの角が互いに等しいなら、等しい角に対する辺も互いに等しいであろう。

三角形ＡＢΓは角ＡΓＢに等しい角ＡＢΓを持つとせよ。辺ＡＢも辺ＡΓに等しいと主張する。



何故なら、もしＡＢがＡΓに等しくないなら、それらの一方はより大きい。ＡＢを大きいとし、大きいＡＢから小さいＡΓに等しいΔＢが取り去られ、そしてΔΓが結ばれたとせよ。

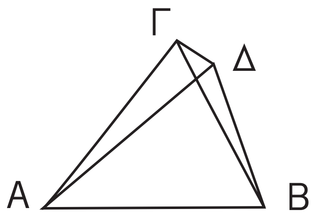
そこでΔＢはＡΓに等しく、またＢΓは共通だから、２辺ΔＢ、ＢΓは２辺ＡΓ、ΓＢにそれぞれ等しい。そして角ΔＢΓは角ＡΓＢに等しい。よって底辺ΔΓは底辺ＡＢに等しく、そして三角形ΔＢΓは三角形ＡΓＢに等しくなるだろう, 小さいものが大きいものに。これは不合理である。その結果、ＡＢはＡΓに等しくなくはない。すなわち等しい。

ゆえに、もし三角形の２つの角が互いに等しいなら、等しい角に対する辺も互いに等しいであろう。これが証明すべきことであった。

7

同じ線分の上に、１点で交わる２線分にそれぞれ等しく、同じ側で異なる点で交わり、同じ端を持つ２線分を構成することは出来ない。

もし出来るなら、同じ線分ＡＢの上に２線分ＡΓ、ΓＢと異なり、それぞれに等しい線分ＡΔ、ΔＢが引かれ、異なった点ΓとΔで同じ側で交わり、同じ端を持っている。その結果、ΓＡはΔＡに等しく同じ点Ａを持っている。一方ΓＢはΔＢに等しく同じ点Ｂを持っている。そしてΓΔが結ばれたとせよ。



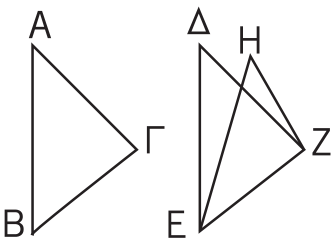
そこでＡΓはＡΔに等しいのだから、角ＡΓΔも角ＡΔΓに等しい。ゆえに角ＡΔΓは角ΔΓＢより大きい。よって大いに角ΓΔＢは角ΔΓＢより大きい。再びΓＢはΔＢに等しいから、角ΓΔＢも角ΔΓＢに等しい。またそれより大いに大きいことも示された。これは不可能である。

ゆえに、同じ線分の上に、１点で交わる２線分にそれぞれ等しく、同じ側で異なる点で交わり、同じ端を持つ２線分を構成することは出来ない。これが証明すべきことであった。

8

もし二つの三角形がそれぞれ等しい２辺を持ち、また底辺は底辺に等しいなら、等しい線分で取り囲まれた角は角に等しい。

二つの三角形をＡＢΓ、ΔＥＺとし２辺ＡＢ、ＡΓが２辺ΔＥ、ΔＺにそれぞれ等しいとせよ、ＡＢはΔＥに一方ＡΓはΔＺに。また底辺ＢΓは底辺ＥＺに等しいとせよ。角ＢＡΓも角ＥΔＺに等しいと主張する。



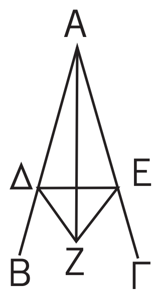
三角形ＡＢΓが三角形ΔＥＺに重ねられ、点Ｂは点Ｅに置かれるなら、ＢΓがＥＺに等しくあるのだから、線分ＢΓは線分ＥＺに、そして点Γは点Ｚに重なるであろう。ＢΓがＥＺに重なるから、ＢＡ、ΓＡもＥΔ、ΔＺに重なるであろう。何故なら、もし底辺ＢΓが底辺ＥＺに重なり、辺ＢＡ、ＡΓが辺ＥΔ、ΔＺに重ならずＥＨ、ＨＺのようにずれるなら、同じ線分の上に１点において交わる２線分が与えられ、それらとそれぞれ等しく、同じ側に異なった点で交わり、同じ端を持つ他の２線分が構成されることになるだろう。これは構成されない。よって底辺ＢΓが底辺ＥＺに重ねられるなら、辺ＢＡ、ＡΓが辺ＥΔ、ΔＺに重ならないことはない。それゆえ重なるだろう。その結果角ＢＡΓも角ＥΔＺに重なり、等しいであろう。

ゆえに、もし２つの三角形がそれぞれ等しい２辺を持ち、また底辺は底辺に等しいなら、等しい辺に取り囲まれた角も角に等しいであろう。これが証明すべきことであった。

9

与えられた直線角を２等分すること。

与えられた直線角を角ＢＡΓとせよ。これを２等分しなければならない。ＡＢの上に点Δが取られ、そしてＡΓからＡΔに等しいＡＥが取り去られ、ΔＥが結ばれ、ΔＥの上に等辺三角形ΔＥＺが構成され、そしてＡＺが結ばれたとせよ。角ＢＡΓは線分ＡＺによって２等分されていると主張する。



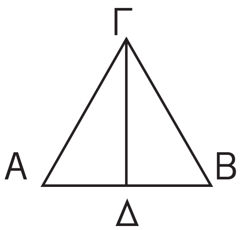
つまりＡΔはＡＥに等しく、ＡＺは共通であるから、２辺ΔＡ、ＡＺは２辺ＥＡ、ＡＺにそれぞれ等しい。そして底辺ΔＺは底辺ＥＺに等しい。ゆえに角ΔＡＺは角ＥＡＺに等しい。

ゆえに、与えられた直線角ＢＡΓは線分ＡＺによって２等分されている。これが作図すべきものであった。

10

与えられた線分を２等分すること。

与えられた線分をＡＢとせよ。このとき線分ＡＢを２等分しなければならない。その上に等辺三角形ＡＢΓが構成され、そして角ＡΓＢは線分ΓΔによって２等分されたとせよ。線分ＡＢは点Δにおいて２等分されていると、主張する。



何故ならＡΓはΓＢに等しくΓΔは共通だから、２辺ＡΓ、ΓΔはそれぞれ２辺ＢΓ、ΓΔに等しい。そして角ＡΓΔは角ＢΓΔに等しい。それゆえ底辺ＡΔは底辺ＢΔに等しい。

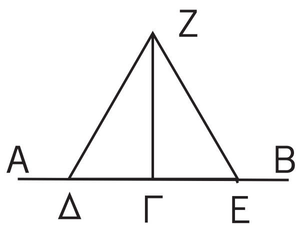
ゆえに、与えられた線分ＡＢは点Δおいて２等分されている。これが作図すべきものであった。

11

与えられた直線に、その上の与えられた点から直角に直線を引くこと。

与えられた直線をＡＢとまたその上の与えられた点をΓとせよ。点Γから線分ＡＢに直角に直線を引かなければならない。ＡΓの上に任意の点Δがとられ､そしてΓＥはΓΔに等しくされ、ΔＥの上に等辺三角形ＺΔＥが構成され、そしてＺΓが結ばれたとせよ。与えられた直線ＡＢに、その上の与えられた点Γから直角に直線ＺΓが引かれていると、主張する。

何故ならΔΓはΓＥに等しく、ΓＺは共通だから２辺ΔΓ、ΓＺはそれぞれ２辺ＥΓ、ΓＺに等しい。そして底辺ΔＺは底辺ＺＥに等しい。それゆえ角ΔΓＺは角ＥΓＺに等しく接角 である。直線が直線の上に立てられて、接角を互いに等しくするとき、等しい角の双方は直角である。よって角ΔΓＺ、ＺΓＥの双方とも直角である。



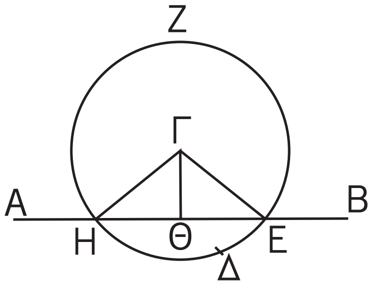
ゆえに、与えられた直線ＡＢに、その上の与えられた点Γから直角に直線ΓＺが引かれている。これが作図すべきものであった。

12

与えられた無限の直線にその上にない与えられた点から垂直に直線を引くこと。

与えられた無限の直線をＡＢまたその上にない与えられた点をΓ

とせよ。与えられた無限の直線ＡＢに、その上にない与えられた点Γから垂直に直線を引くこと。
線分ＡＢのもう一方の側に点Δがとられ、そして中心Γ、また半径ΓΔの円ＥＺＨが描かれるとせよ。そして線分ＥＨはΘで２等分され、直線ΓＨ、ΓΘ、ΓＥが結ばれるとせよ。与えられた無限の直線ＡＢへ、その上にない与えられた点Γから垂直な直線ΓΘが引かれると、主張する。

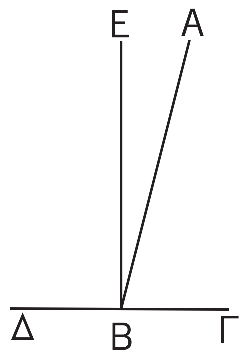


ＨΘはΘＥに等しくΘΓは共通だから、２辺ＨΘ、ΘΓは２辺ＥΘ、ΘΓにそれぞれ等しい。そして底辺ΓＨは底辺ΓＥに等しい。その結果、角ΓΘＨは角ＥΘΓに等しく、また接角である。直線が直線に交わり接角が互いに等しくなる場合、等しい角のそれぞれは直角である。そして上に立っている直線は、そこに立っている線分に対し垂直と言われる。
ゆえに、与えられた無限の直線ＡＢに、その上にない与えられた点Γから垂線ΓΘが引かれた。これが作図すべきものであった。

13

もし直線が他の直線に立っていて角を作るなら、２つの直角を作るかあるいは和が２直角に等しい接角を作るだろう。

ある直線ＡＢが他の直線ΓΔに立っていて、角ΓＢＡと角ＡＢΔを作るとせよ。角ΓＢＡと角ＡＢΔは確かに双方とも直角であるか、あるいは和が２直角に等しいと、主張する。

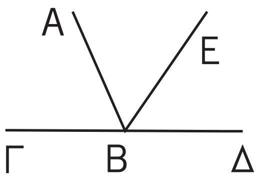


そこでもし角ΓＢＡが角ＡＢΔに等しいなら、２角は直角である。またもしそうでないなら点Ｂから直線ΓΔに垂線ＢＥが引かれている。その結果、２角ΓＢＥ、ＥＢΔは直角である。そして角ΓＢＥは角ΓＢＡとＡＢＥの和に等しいのだから、共通の角ＥＢΔが加えられているとせよ。すると角ΓＢＥとＥＢΔの和は３つの角ΓＢＡ、ＡＢＥ、ＥＢΔの和に等しい。もう一度、角ΔＢＡは２角ΔＢＥ、ＥＢＡの和に等しいのだから、共通の角ＡＢΓが加えられとせよ。よって、角ΔＢＡとＡＢΓの和は３つの角ΔＢＥ、ＥＢＡ、ＡＢΓの和に等しい。また角ΓＢＥ、ＥＢΔの和は３つの角の和に等しいと示された。また同じものに等しいものは互いに等しい。その結果、角ΓＢＥ、ＥＢΔの和は角ΔＢＡ、ＡＢΓの和に等しい。よって角ΓＢＥ、ＥＢΔは２つの直角である。ゆえに角ΔＢＡ、ＡＢΓの和は２直角に等しい。
ゆえに、１つの直線が他の直線に立っていて角を作るなら、２つは直角であるかその和は２直角になるだろう。これが証明すべきことであった。

14

任意の直線とその上の１点において、その直線の同じ側にない２直線が接角の和を２直角に等しくするならば、これらの２直線はたがいに一直線をなすであろう。

任意の直線ＡＢとその上の１点Ｂにおいて２直線ＢΓとＢΔが同じ側になく、接角ＡＢΓとＡＢΔの和を２直角に等しくするとせよ。ＢΔはΓＢと一直線をなすと、主張する。



何故ならＢΔがＢΓと一直線をなさないなら、ＢＥがΓＢと一直線をなすとせよ。

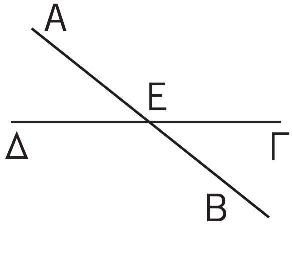
そこで直線ＡＢは直線ΓＢＥの上に立っているのだから、角ＡＢΓとＡＢＥの和は２直角に等しい。また角ＡＢΓとＡＢΔの和も２直角に等しい。そこで角ΓＢＡとＡＢＥの和は角ΓＢＡとＡＢΔの和に等しい。双方から角ΓＢＡが取り去られたとせよ。そこで残りの角ＡＢＥは残りの角ＡＢΔに等しい、すなわち小さいものがより大きいものに等しい。これは不可能である。ゆえにＢＥはΓＢと一直線をなさない。同様に、ＢΔ以外のいかなる他の直線もそうならないと証明しうる。よってΓＢはＢΔと一直線をなす。

ゆえに、任意の直線とその上の一点において、その直線の同じ側にない２直線が接角の和を２直角に等しくするならば、これら２直線は互いに一直線をなすだろう。これが証明すべきことであった。

15

２直線が互いに交わるならば、それらは互いに等しい対頂角を作る。

すなわち２直線ＡＢ、ΓΔが互いに点Ｅで交わるとせよ。角ＡＥΓは角ΔＥＢに等しく、一方角ΓＥＢは角ＡＥΔに等しいと、主張する。



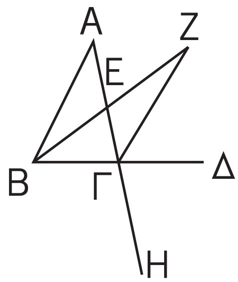
直線ＡＥは角ΓＥＡと角ＡＥΔを作りながら直線ΓΔの上に立っているのだから、２つの角ΓＥＡとＡＥΔの和は、２直角に等しい。又、直線ΔＥは直線ＡＢの上に立っていて角ＡＥΔとΔＥＢを作っているのだから、角ＡＥΔとΔＥＢの和は２直角に等しい。また角ΓＥＡとＡＥΔの和も２直角に等しいと示された。そこで角ΓＥＡとＡＥΔの和は、角ＡＥΔとΔＥＢの和に等しい。共通の角ＡＥΔは取り去られるとせよ。そこで残りの角ΓＥＡは残りの角ＢＥΔに等しい。また同様に、角ΓＥＢと角ΔＥＡが等しいと示されるだろう。

ゆえに、２直線が互いに交わるならば、互いに等しい対頂角を作る。これが証明すべきことであった。

16

すべての三角形において辺の一つを延長すると、外角は内対角のいずれより大きい。

三角形をＡＢΓとし、そしてその一辺ＢΓをΔまで延長させよ。外角ＡΓΔは内対角ΓＢＡ、ＢＡΓのいずれより大きいと、主張する。



ＡΓがＥで２等分され、そして結ばれたＢＥは一直線をなしＺまで延長され、そしてＥＺはＢＥに等しくされ、ＺΓは結ばれ、ＡΓはＨまで延長されたとせよ。

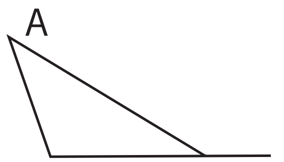
そこでＡＥはＥΓに等しく、またＢＥはＥＺに等しいのだから、２辺ＡＥ、ＥＢは２辺ΓＥ、ＥＺにそれぞれ等しい。そして角ＡＥＢは角ＺＥΓの対頂角なので等しい。ゆえに底辺ＡＢは底辺ＺΓに等しく、三角形ＡＢＥは三角形ＺＥΓに等しく、残りの角もそれぞれ残りの角に等しい。すなわち等しい辺に対する角はそれぞれ等しい。そこで角ＢＡＥは角ＥΓＺに等しい。また角ＥΓΔは角ＥΓＺより大きい。よって角ＡΓΔは角ＢＡＥより大きい。同様にＢΓが２等分されるとき角ＢΓＨ、すなわち角ＡΓΔは角ＡＢΓより大きいことも示される。

ゆえに、すべての三角形の辺の一つが延長されるとき、外角は内対角のいずれより大きい。これが証明すべきことであった。

17

すべての三角形において、どの２角をとってもその和は2直角より小さい。

ＡＢΓを三角形とせよ。三角形ＡＢΓのどの２角をとってもその和は２直角より小さいと、主張する。



ＢΓがΔまで延長されたとせよ。すると角ＡΓΔは三角形ＡＢΓの外角だから、内対角ＡＢΓより大きい。角ＡΓＢが共通に加えられたとせよ。すると、角ＡΓΔとＡΓＢの和は角ＡＢΓとＢΓＡの和より大きい。しかし角ＡΓΔとＡΓＢの和は２直角に等しい。ゆえに、角ＡＢΓとＢΓＡの和は２直角より小さい。また同様に、角ＢＡΓとＡΓＢの和も２直角より小さいと示されるだろう。そして更に角ΓＡＢとＡＢΓの和も小さいと。

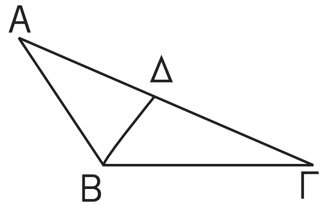
ゆえに、すべての三角形のどの２角をとってもその和は２直角より小さい。これが証明すべきことであった。

18

すべての三角形において大きい辺は大きい角に対する。

ＡＢΓを辺ＡΓが辺ＡＢより大きい三角形とせよ。角ＡＢΓも角

ＢΓＡより大きいと、主張する。



ＡΓがＡＢより大きいのだから、ＡＢに等しいＡΔをとり、ＢΔが結ばれたとせよ。

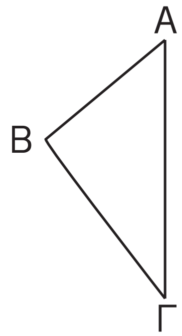
角ＡΔＢは三角形ＢΓΔの外角であるから、内対角ΔΓＢより大きい。辺ＡＢが辺ＡΔに等しいのだから、角ＡΔＢは角ＡＢΔに等しい。よって、角ＡＢΔは角ＡΓＢより大きい。ゆえに、大いに角ＡＢΓは角ＡΓＢより大きい。

ゆえに、すべての三角形において大きい辺は大きい角に対する。これが証明すべきことであった。

19

すべての三角形において大きい角には大きい辺が対する。

ＡＢΓを角ＡＢΓが角ＢΓＡより大きい三角形とせよ。辺ＡΓは辺ＡＢより大きいと、主張する。



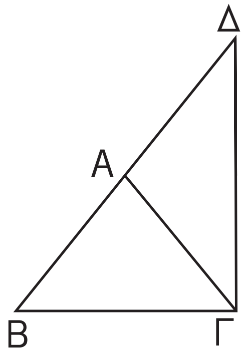
もしそうでないなら、確かにＡΓはＡＢに等しいかあるいは小さい。ところでＡΓはＡＢに等しくない。何故なら、そうであったなら角ＡＢΓも角ＡΓＢに等しかっただろう。ところがそうではない。よってＡΓはＡＢに等しくない。またＡΓはＡＢより小さくもない。何故なら、そうならば角ＡＢΓも角ＡΓＢより小さかったろう。ところがそうではない。ゆえにＡΓはＡＢより小さくはない。また等しくないことも示されている。よってＡΓはＡＢより大きい。

ゆえに、すべての三角形において、大きい角には大きい辺が対する。これが証明すべきことであった。

20

すべての三角形においてどの２辺をとっても、その和は残りの１辺より大きい。

ＡＢΓを三角形とせよ。三角形ＡＢΓのどの２辺をとってもその和は残りの１辺より、すなわちＢＡとＡΓの和はＢΓより、またＡＢとＢΓの和はＡΓより、そしてＢΓとΓＡの和はＡＢより大きいと、主張する。



ＢＡが点Δまで延ばされ、ＡΔがΓＡに等しくされ、そしてΔΓが結ばれたとせよ。

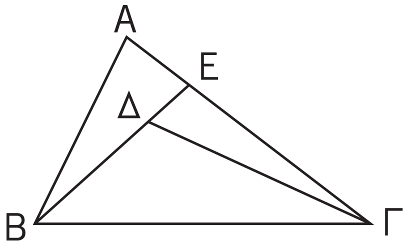
そこでΔＡはＡΓに等しいのだから、角ＡΔΓも角ＡΓΔに等しい。よって角ＢΓΔは角ＡΔΓより大きい。そして、三角形ΔΓＢは角ＢΔΓより大きい角ＢΓΔを持っている三角形だから、大きい角には大きい辺が対している、すなわちΔＢはＢΓより大きい。またΔＡはＡΓに等しい。よってＢＡとＡΓの和はＢΓより大きい。ＡＢとＢΓ

の和はΓＡより大きく、またＢΓとΓＡの和はＡＢより大きいと、同様に示しうる。
　ゆえに、すべての三角形においてどの２辺をとっても、それらの和は残りの１辺より大きい。これが証明すべきことであった。

21

　もし三角形の一辺の上に、その両端から内部で交わる２線分が構成されるならば、構成された２線分の和は三角形の残りの２辺の和より小さいが、より大きい角を取り囲むであろう。

三角形ＡＢΓの一辺ＢΓの上に両端ＢとΓから三角形の内部で交わる２線分ＢΔとΔΓが構成されたとせよ。三角形の残りの２辺ＢＡ、ＡΓの和よりＢΔとΔΓの和は小さく、角ＢＡΓより大きい角ＢΔΓを取り囲むと、主張する。



　ＢΔがＥまで延長されたとせよ。すべての三角形において、２辺の和は残りの１辺より大きいのだから、三角形ＡＢＥの２辺ＡＢとＡＥの和は、ＢＥより大きい。共通のＥΓが加えられたとせよ。するとＢＡとＡΓの和はＢＥとＥΓの和より大きい。また三角形ΓＥΔの２辺ΓＥとＥΔの和はΓΔより大きいのだから、共通のΔＢが加えられたとせよ。するとΓＥとＥＢの和はΓΔとΔＢの和より大きい。ところでＢＥとＥΓの和よりＢＡとＡΓの和は大きいと示されていた。よって、ＢＡとＡΓの和はなおさらＢΔとΔΓの和より大きい。
　またすべての三角形において外角は内対角より大きいから、三角形ΓΔＥの外角ＢΔΓは角ΓＥΔより大きい。また同じ理由で、三角形ＡＢＥの外角ΓＥＢは角ＢＡΓより大きい。ところで角ΓＥＢより角ＢΔΓは大きいと先に示されている。よってより多く角ＢΔΓは角ＢＡΓより大きい。
　ゆえに、もし三角形の一辺の上に、その両端から内部で交わる２線分が構成されるならば、構成された２線分の和は三角形の残りの２辺の和より小さいが、より大きい角を取り囲む。これが証明すべきことであった。

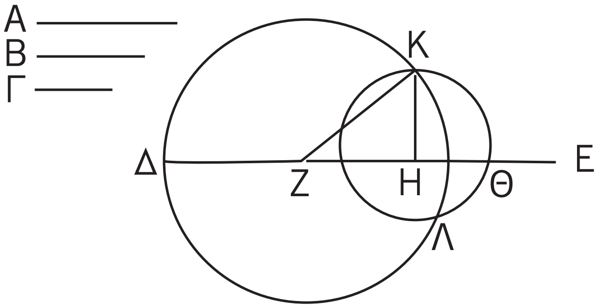
22

　与えられた３線分に等しい３線分から三角形を構成すること。ただし、どの２線分をとってもそれらの和は残りの線分より大きくなければならない［すべての三角形において、どの２辺をとってもそれらの和は残りの辺より大きくあるために］。

与えられた３線分をＡ、Ｂ、Γとし、それらのうちのどの２線分をとってもそれらの和は残りの線分より大きいとせよ。すなわちＡとＢの和はΓより、ＡとΓの和はＢより、そしてＢとΓの和はＡより大きいと。かくてＡ、Ｂ、Γに等しい線分から三角形が構成されなければならない。

　Δにおいて限られたＥの方に無限である任意の直線ΔＥが定められ、ΔＺをＡに、ＺＨをＢに、ま

たＨΘをΓに等しいとせよ。そして中心Ｚ、半径ＺΔによって円ΔＨΛが描かれたとせよ。更に中心Ｈ、半径ＨΘによって円ＫΛΘが描かれ、ＫＺとＫＨが結ばれたとせよ。Ａ、Ｂ、Γに等しい３線分から三角形ＫＺＨを構成すると、主張する。



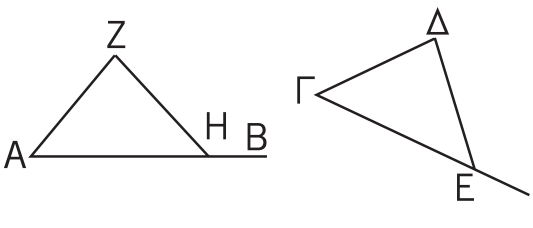
点Ｚは三角形ΔＫΛの中心だから、ＺΔはＺＫに等しい。ところでＺΔはＡに等しい。よってＫＺはＡに等しい。更に点Ｈは円ΛＫΘの中心だから、ＨΘはＨＫに等しい。ところでＨΘはΓに等しい。よってＫＨはΓに等しい。またＺＨはＢに等しい。ゆえに３線分ＫＺ、ＺＨ、ＨＫは３線分Ａ、Ｂ、Γに等しい。

ゆえに、与えられた３線分Ａ、Ｂ、Γに等しい３線分ＫＺ、ＺＨ、ＨＫから三角形ＫＺＨが構成されている。これが作図すべきものであった。

23

与えられた直線上に、その上の点において与えられた直線角に等しい直線角を構成すること。

与えられた直線をＡＢ、その上の点をＡ、また与えられた直線角をΔΓＥとせよ。このとき与えられた直線ＡＢ上にその上の点Ａにおいて与えられた直線角ΔΓＥに等しい直線角を構成しなければならない。



ΓΔ、ΓＥのそれぞれの上に点Δ、Ｅがあり、そしてΔＥが結ばれたとせよ。そして３線分ΓΔ、ΔＥ、ΓＥに等しい３線分から三角形ＡＺＨが構成され、その結果ΓΔはＡＺにまたΓＥはＡＨに、さらにΔＥはＺＨに等しいとせよ。

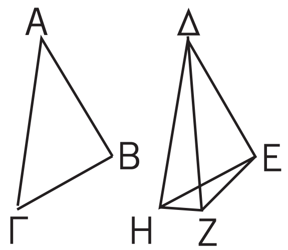
そこで２辺ΔΓとΓＥは２辺ＺＡ、ＡＨにそれぞれ等しく、そして底辺ΔＥは底辺ＺＨに等しいのだから、角ΔΓＥは角ＺＡＨに等しい。

ゆえに、与えられた直線ＡＢ上にその上の点Ａにおいて、与えられた直線角ΔΓＥに等しい直線角ＺＡＨが構成された。これが作図すべきものであった。

24

もし２つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく、等しい線分によって取り囲まれる角の一方が他方より大きいなら、底辺も底辺より大きいだろう。

２つの三角形をＡＢΓ、ΔＥＺとし、２辺ＡＢ、ＡΓが２辺ΔＥ、ΔＺにそれぞれ等しい、すなわちＡＢはΔＥにそしてＡΓはΔＺに等しいとし、ＡにおけるΔにおける角より大きいとせよ。底辺ＢΓは底辺ＥＺより大きいと、主張する。



角ＢＡΓは角ＥΔＺより大きいのだから、線分ΔＥ上にその上の点Δにおいて角ＢＡΓに等しい角ＥΔＨが構成され、そしてΔＨがＡΓかΔＺのどちらかに等しくされ、ＥＨ、ＺＨが結ばれたとせよ。

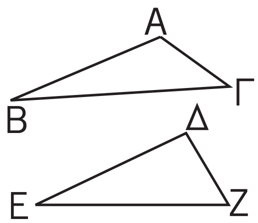
そこでＡＢはΔＥに、またＡΓはΔＨに等しいのだから、２辺ＢＡ、ＡΓは２辺ＥΔ、ΔＨにそれぞれ等しい。そして角ＢＡΓは角ＥΔＨに等しい。ゆえに底辺ＢΓは底辺ＥＨに等しい。更にΔＺはΔＨに等しいのだから、角ΔＨＺも角ΔＺＨに等しい。よって角ΔＺＨは角ＥＨＺより大きい。ゆえにおおいに角ＥＺＨは角ＥＨＺより大きい。そして、角ＥＨＺより大きい角ＥＺＨを持つ三角形ＥＺＨは、大きい辺が大きい角に対しているのだから、辺ＥＨはＥＺより大きい。またＥＨはＢΓに等しい。よって、ＢΓはＥＺより大きい。

ゆえに、もし２つの三角形がそれぞれ等しい２辺を持ち、等しい線分によって取り囲まれる角の一方が他方より大きいなら、底辺も底辺より大きいだろう。これが証明すべきことであった。

25

もし２つの三角形がそれぞれ等しい２辺を持ち、底辺の一方が他方の底辺より大きいなら、等しい線分に取り囲まれる角の一方は他方より大きいだろう。

ＡＢΓ、ΔＥＺを２辺ＡＢ、ＡΓが２辺ΔＥ、ΔＺにそれぞれ等しい２つの三角形とし、底辺ＢΓは底辺ＥＺより大きいとせよ。角ＢＡΓは角ＥΔＺより大きいと、主張する。



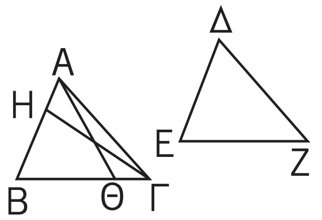
もしそうでないなら、それに等しいかあるいは小さいかである。ところで角ＢＡΓは角ＥΔＺに等しくない。なぜなら辺ＢΓは辺ＥＺに等しくなるだろう。ところがそうではない。ゆえに、角ＢＡΓは角ＥΔＺに等しくない。また角ＢＡΓは角ＥΔＺより小さくもない。なぜなら底辺ＢΓも底辺ＥＺより小さくなるだろう。ところがそうではない。ゆえに角ＢＡΓは角ＥΔＺより小さくはない。また等しくないと示されていた。よって角ＢＡΓは角ＥΔＺより大きい。

ゆえに、もし２つの三角形がそれぞれ等しい２辺を持ち、底辺が底辺より大きいなら、等しい線分に取り囲まれる角も一方が他方より大きいだろう。これが証明されるべきことであった。

26

もし２つの三角形において２角が２角にそれぞれ等しく、そして1辺が1辺に、すなわち等しい２角にはさまれる１辺あるいは等しい角の1つに対する辺が等しいなら、残りの２辺も残りの2辺にそして残りの角も残りの角に等しいだろう。

ＡＢΓ、ΔＥＺを２つの三角形とし、２角ＡＢΓ、ＢΓＡが２角ΔＥＺ、ＥＺΔにそれぞれ等しいとせよ、角ＡＢΓが角ΔＥＺに、一方角ＢΓＡが角ＥＺΔに。
そして1辺が1辺に、まず等しい角にはさまれる辺、すなわちＢΓがＥＺに等しいとせよ。残りの２辺も残りの2辺に、すなわちＡＢはΔＥにまたＡΓはΔＺに、そして残りの角は残りの角に、すなわち角ＢＡΓは角ＥΔＺに等しいと、主張する。



もしＡＢがΔＥに等しくないなら、それらの一方は大きい。ＡＢを大きいとし、そしてＢＨがΔＥに等しくされ、ＨΓが結ばれたとせよ。

そこでＢＨはΔＥに、またＢΓはＥＺに等しいのだから、２辺ＢＨ、ＢΓは２辺ΔＥ、ＥＺにそれぞれ等しい。そして角ＨＢΓも角ΔＥＺに等しい。ゆえに底辺ＨΓは底辺ΔＥに等しい。そして三角形ＨＢΓは三角形ΔＥＺに等しく、等しい辺が対するところの残りの角は残りの角に等しい。ゆえに、角ＨΓＢは角ΔＺＥに等しい。ところで角ΔＺＥは角ＢΓＡに等しいと仮定されている。よって角ＢΓＨは角ＢΓＡに等しい、すなわち小さいものが大きいものに。これは不可能である。ゆえにＡＢはΔＥに等しくなくはない。つまり等しい。またＢΓはＥＺに等しい。かくて２辺ＡＢ、ＢΓはそれぞれ２辺ΔＥ、ＥＺに等しい。そして角ＡＢΓは角ΔＥＺに等しい。ゆえに底辺ＡΓは底辺ΔＺに等しく、残りの角ＢＡΓは残りの角ＥΔＺに等しい。

次に、
等しい角に対する辺、たとえばＡＢがΔＥに等しいとせよ。残りの辺は残りの辺に、すなわちＡΓはΔＥに、またＢΓはＥＺに等しく、更に残りの角ＢＡΓは残りの角ＥΔＺに等しいと、主張する。

もしＢΓがＥＺに等しくないなら、それらの一方は大きい。ＢΓが大きいとし、ＢΘがＥＺに等しくされ、そしてＡΘが結ばれたとせよ。ＢΘはＥＺにＡＢはΔＥに等しいのだから、２辺ＡＢ、ＢΘは２辺ΔＥ、ＥＺにそれぞれ等しい。そして等しい角を取り囲む。よって底辺ＡΘは底辺ΔＺに等しく、三角形ＡＢΘは三角形ΔＥＺに等しい。そして残りの角は残りの角に等しいだろう。それらは等しい辺に対するところのものである。ゆえに、角ＢΘＡは角ＥＺΔに等しい。ところで角ＥＺΔは角ＢΓＡに等しい。かくて三角形ＡΘΓの外角ＢΘＡは内対角ＢΓＡに等しい。これは不可能である。よってＢΓはＥＺに等しくなくはない。ゆえに等しい。またＡＢはΔＥに等しい。かくて、２辺ＡＢ、ＢΓは２辺ΔＥ、ＥＺにそれぞれ等しい。そして等しい角を取り囲む。よって、底辺ＡΓは底辺ΔＺに等しく、三角形ＡＢΓは三角形ΔＥＺに等しく、残りの角ＢＡΓは残りの角ＥΔＺに等しい。

ゆえに、もし２つの三角形がそれぞれ等しい２角を持ち、１辺が１辺に等しいなら、すなわち等しい２角にはさまれる辺かあるいは等しい角に対する辺が等しいなら、残りの２辺も残りの２辺に等しいだろうし、残りの角も残りの角に等しいだろう。これが証明すべきことであった。

注

1，ギリシャ語の原論には、「第」及び「巻」に相当する語は用いられておらず、ただ「１」とあるのみだが従来の訳本に習い「第１巻」とした。

参考文献

1，中村　幸四郎、寺坂　英孝、伊藤　俊太郎、池田　美恵
「ユークリッド原論」（共立出版　１９７１年）
2，中沢　貞治 「いろいろな幾何」（共立出版　１９６７年）
3，齋藤　憲　「ユークリッド『原論』の成立」　（東京大学出版会　１９９７年）

（数学　結び目理論）