量子力学における定常摂動論の再定式化Ⅲ 縮退を持つ系の摂動論：２次元平面回転子を例として

新谷明雲

A New Reformulation of Conventional Perturbation Methods in Quantum Mechanics III Perturbation Treatment for Degenerate States in a Plane Rotator

Meiun Shintani

Abstract

In our previous papers we proposed a new reformulation for the stationary perturbation method in quantum mechanics, where the Schrödinger equation is translated into the Riccati equation through the transformation of logarithmic derivative type. It was shown that our method remarkably reduces cumbersome and lengthy calculations for wave functions and energy eigenvalues. In the present paper, we apply our method to the 2-dimensional rotator with a periodic potential, whose Schrödinger equation is called the Mathieu equation. It has been known that each of the excited states is doubly degenerate with respect to energy eigenvalue, and perturbation effect of higher orders yields the removal of degeneracy. By computing wave functions and eigenvalues to the 6-th order, or for some cases to the 8-th order, we show that degeneracy of the n-th excited states can be removed at the 2n-th order in perturbations. Our method leads not only to its simplicity and economy of calculations but also to the unified treatment of perturbations irrespective of degeneracy of states.

§１　はじめに

1.1　方法の概要および変数変換の物理学的意味

前論文［１］、［２］（以下それぞれ論文Ⅰ、論文Ⅱと呼ぶ）において我々は、量子力学の時間に依存しない摂動法、すなわち変数変換に基づく定常摂動論の新しい定式化を提案した。その方法の要点は、伝統的なレーリー・シュレーディンガー法（Rayleigh-Schrödinger method）［３］のように直接定常状態のシュレーディンガー方程式について摂動展開する方法はとらず、波動関数 $\psi(x)$ の変換して得られた量 $T(x)$ について摂動論を行う点にある。すなわち、“対数微分変換（logarithmic derivative transformation）”と呼ぶ変換

$$\psi(x) \to T(x) = \frac{d}{dx}\ell n\psi(x) \tag{1.1}$$

によりシュツルム・リュヴィル（Strum-Liouville）型の２階線形常微分方程式であるシュレーディンガー（Schrödinger）方程式を $T(x)$ についての１階の非線形微分方程式であるリッカチ（Riccati）方程式とする。この $T(x)$ について摂動展開を行う。$\psi(x)$ の摂動級数は、(1.1) の摂動展開により $T(x)$ のそれとむすばれる。したがって、シュレーディンガー方程式の摂動論はリッカチ方程式の摂動論となる。リッカチ方程式は、非線形方程式であるが摂動の各次数では、第０次を除けば線形方程式であり、方程式が１階であるため求積が容易である。第０次は非線形方程式であるが、その解 $T_0(x)$ は波動関数の第０次の解 $\psi_0(x)$ を知っているという前提により、(1.1) の摂動展開の第０次で与えられる。したがって、リッカチ方程式の摂動展開から導かれる１階線形の非斉次常微分方程式群を低次から順に高次へと逐次に解き、それらの解を (1.1) に代入すること

により波動関数の摂動解が順次求まることとなる。

さてここで、変数変換（1.1）の持つ物理学的意味について考察を与えよう。変換（1.1）を

$$-i\hbar \frac{d}{dx}\psi_E(x) = -i\hbar\, T(x)\,\psi_E(x) \tag{1.2}$$

と書くと、この式の左辺は $x-$ 表示での運動量演算子 $\hat{p}=(\hbar/i)\,d/dx$ をハミルトニアンの固有関数$\psi_E(x)$に作用させたものであることがわかる。波動関数のサブスクリプトは、ハミルトニアンの固有値を強調するためにあえて記した。したがって右辺の$-i\hbar\, T(x)$は位置座標に依存する運動量を意味する。この位置座標依存性は、交換関係

$$[\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar V'(x) \neq 0 \tag{1.3}$$

により、ハミルトニアンの固有関数 $\psi_E(x)$ が運動量の同時固有関数でないことに因る。ポテンシャル $V(x)$ 中における１粒子のリッカチ方程式は

$$T^2(x) + \frac{d}{dx}T(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) \tag{1.4}$$

で与えられ、これを形式的に解けば、

$$-i\hbar T(x) = \pm\sqrt{2m(E-V(x)) + i\hbar\frac{d}{dx}(-i\hbar T(x))} \tag{1.5}$$

で与えられる。古典力学における運動量 $p(x)$は位置に依存し

$$p(x) = \pm\sqrt{2m(E - V(x))} \tag{1.6}$$

として与えられる。$\hbar \to 0$ の極限で（1.5）は（1.6）に一致する。従って（1.5）の根号内の第２項が運動量の量子論的補正を表すと考えられる。特に、$E - V(x) = 0$ となる点、すなわち転回点において、(1.5) の右辺が

$$\pm\hbar\sqrt{\frac{d}{dx}T(x)} \tag{1.7}$$

となることはWKBJ法［３］と異なる点であり注目に値する。この点の詳細な議論については、別の機会にあらためて取り扱うこととする。

１．２　これまでの到達点と本論文の目的

論文Ｉでは、１次元調和振動子に摂動としてx^4項を持つ系について、我々の摂動展開法を適用した。基底状態と第１励起状態についてエネルギー準位および$T(x)$を４次まで求めた。論文Ⅱでは、我々の方法を１次元散乱問題－特に、粒子の全エネルギーがポテンシャル障壁に比し圧倒的に大きい$(E >> V(x))$場合－に適用し、第１ボルン（Born）近似の結果［３］を再現した。入射エネルギーをあらかじめ固定した上で波動関数を摂動的に求める点において、論文Ｉの摂動論と著しく異なる点であるが、このような場合にも「対数微分変換法」が有効である事が示される。論文Ⅱが明らかにしたことは、１次元散乱問題を縮退系の摂動論として扱うことを可能とした点である。ポテンシャル障壁に向かう入射粒子の波数は（$+k$）であり、反射波のそれは（$-k$）であるが、エネルギー固有値は$E = \hbar^2k^2/2m$で同じである。すなわち、論文Ⅱが示した重要な点は、縮退系の摂動論に我々の方法が適用可能ということである。

本論文の目的は、「我々の方法が状態の縮退、非縮退によらず統一的に摂動論を扱うことを可能とする」、このことを良く知られた具体例によって示すことにある。そのような量子系の典型として、２次元平面回転子に周期的摂動が加わった系－マチュー（Mathieu）方程式［４］で表される系－の摂動論を次章以降で扱う。

§２　２次元平面回転子の摂動論－縮退系の例として

2.1　２次元平面回転子の量子論

２次元平面回転子は次のシュレーディンガー方程式で表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = E\psi(\varphi) \tag{2.1}$$

ここで、I は慣性能率、φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ は回転子のつくる角度を表し、波動関数は周期的境界条件

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi) \tag{2.2}$$

を満たす。今、この系に$\varphi = 0$ 方向の静電場Ｅと回転子のもつ双極子モーメントμ との相互作用、即ち周期的摂動として

$$H' = -\mu\,\mathrm{E}\cos\varphi \tag{2.3}$$

が加わったとする。このときシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi^2} - \mu\mathrm{E}\cos\varphi\right)\psi(\varphi) = E\psi(\varphi) \tag{2.4}$$

となるが、エネルギーおよび結合定数に対応する次元の無いパラメーター

$$\lambda \equiv 2IE/\hbar^2,\quad G \equiv 2I\mu\,\mathrm{E}/\hbar^2 \tag{2.5}$$

を用い“無次元化されたシュレーディンガー方程式”

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda + G\cos\varphi\right)\psi(\varphi) = 0 \tag{2.6}$$

を得る。この方程式はマチュー（Mathieu）方程式と呼ばれ、その解はマチュー解［４］として知られている。通常の摂動論では、周期的境界条件（2.2）の下で方程式（2.6）を波動関数$\psi(\varphi)$および固有値λ について結合定数Gについての次の冪展開を行う。

$$\psi(\varphi)=\psi_0(\varphi)+G\psi_1(\varphi)+G^2\psi_2(\varphi)+G^3\psi_3(\varphi)\ \cdots,\qquad \lambda=\lambda_0+G\lambda_1+G^2\lambda_2+G^3\lambda_3+\dots \tag{2.7}$$

方程式（2.6）の無摂動解は、基底状態（$\dot{n}=0$）を除くすべての状態に対し固有値λ_0について２重に縮退している。具体的に摂動の最低次の解、すなわち無摂動解は、

$$\lambda_0=n^2\ (n=0,1,2,3,\dots), \tag{2.8}$$

に対し、

$$\psi_0(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\qquad (n=0),\qquad \psi_0(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}\ (n=1,2,3,\dots) \tag{2.9}$$

で与えられる。

摂動項 $G\cos\varphi$ は偶関数であるため、方程式は$\varphi\to-\varphi$の下に不変である。そのため、$\psi(\varphi)$が解であるなら、$\psi(-\varphi)$も解である。これよりその線形結合である偶関数 $\psi_+(\varphi)=\psi(\varphi)+\psi(-\varphi)$ 及び、奇関数 $\psi_-(\varphi)=\psi(\varphi)-\psi(-\varphi)$ も解となる。したがって、方程式（2.6）の摂動解は

$$\psi_+(\varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\varphi\qquad (\textit{even function}),\qquad \psi_-(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\varphi\qquad (\textit{odd function}) \tag{2.10}$$

と書かれる。k次の摂動解を求めることは、フーリエ係数$\{a_n\}$, $\{b_n\}$をGのk次までを決定することである。

以下では、レーリー・シュレーディンガーの方法を行わずに前論文Ⅰ、Ⅱで展開した「対数微分変換法」を用いて摂動解を求める。ここで重要な点はこの方法が縮退のある場合にも無い場合と同様に適用可能な点である。上でみたように、励起状態（n≧1）のエネルギー準位に属する状態は２重に縮退しているが、この縮退が摂動の第２n次で消滅することがすでに知られているが、このことを我々の手法で具体的に確認することができる。次章では、n＝0については摂動の８次まで、n＝1については摂動の６次まででエネルギー固有値、固有関数を求める。また、励起状態（n＝2，3，4）については附録で結果のみを列挙する。n＝2，3については６次まで、n＝4については、縮退の消滅を見るために８次までの摂動計算を行った。

2.2　対数微分変換法に基づく摂動論

方程式（2.6）を変数変換（1.1）により、$T(\varphi)$についての１階非線形微分方程式であるリッカチ方程式

$$\frac{d}{d\varphi}T(\varphi)+T(\varphi)^2+\lambda+G\cos\varphi=0 \tag{2.11}$$

に変換し、次の摂動展開を行う、

$$T(\varphi)=T_0(\varphi)+GT_1(\varphi)+G^2T_2(\varphi)+G^3T_3(\varphi)+\dots \tag{2.12}$$

摂動展開に移る前に、波動関数の性質について述べておく。波動関数の周期性（2.2）により摂動の各次数で次式がなりたつ。

$$\psi_k(\varphi+2\pi)=\psi_k(\varphi),\qquad T_k(\varphi+2\pi)=T_k(\varphi). \tag{2.13}$$

$\psi(\varphi)$が偶関数または奇関数であるならば、方程式（1.1）は

$$T(\varphi)=\frac{1}{\psi(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}\psi(\varphi),$$

あるいは、

$$T(\varphi)\psi(\varphi)=\frac{d}{d\varphi}\psi(\varphi), \tag{2.14}$$

と書かれることから

$$T(-\varphi)=-T(\varphi)\qquad (\textit{odd function}) \tag{2.15}$$

であることが分かる。リッカチ方程式（2.11）は、$\varphi\to-\varphi$で不変となる。

＜リッカチ方程式の摂動展開＞

リッカチ方程式において摂動展開を行い、結合定数Gの等冪の項を拾うと、

$$O(G^0):\frac{d}{d\varphi}T_0(\varphi)+T_0(\varphi)^2+\lambda_0=0, \tag{2.16a}$$

$$O(G^1):\frac{d}{d\varphi}T_1(\varphi)+2T_0(\varphi)T_1(\varphi)+\cos\varphi+\lambda_1=0, \tag{2.16b}$$

$$O(G^2):\frac{d}{d\varphi}T_2(\varphi)+2T_0(\varphi)T_2(\varphi)+T_1(\varphi)^2+\lambda_2=0, \tag{2.16c}$$

$$O(G^3):\frac{d}{d\varphi}T_3(\varphi)+2T_0(\varphi)T_3(\varphi)+2T_1(\varphi)T_2(\varphi)+\lambda_3=0, \tag{2.16d}$$

となり、一般の$k(\geq 1)$に対して、

$$O(G^{2k}):\frac{d}{d\varphi}T_{2k}(\varphi)+2T_0(\varphi)T_{2k}(\varphi)+2T_1(\varphi)T_{2k-1}(\varphi)+\dots+2T_{k-1}(\varphi)T_{k+1}(\varphi)+T_k(\varphi)^2+\lambda_{2k}=0, \tag{2.16e}$$

$$O(G^{2k+1}):\frac{d}{d\varphi}T_{2k+1}(\varphi)+2T_0(\varphi)T_{2k+1}(\varphi)+2T_1(\varphi)T_{2k}(\varphi)+\dots+2T_k(\varphi)T_{k+1}(\varphi)+\lambda_{2k+1}=0, \tag{2.16f}$$

で与えられる。

＜波動関数の摂動解＞

方程式（2.13）の摂動展開により、第k次の波動関数$\psi_k(\varphi)$の従う線形微分方程式は

$$O(G^k):\frac{d}{d\varphi}\psi_k(\varphi)-T_0(\varphi)\psi_k(\varphi)-T_1(\varphi)\psi_{k-1}(\varphi)-T_2(\varphi)\psi_{k-2}(\varphi)-\dots-T_k(\varphi)\psi_0(\varphi)=0 \tag{2.17}$$

であり、これに（2.16）で求めた$T_l(\varphi)$や既知の$\psi_{l-1}(\varphi)\,(l=0,1,2,\dots,k)$を代入し、$\psi_k(\varphi)$をえることが出来る。

＜波動関数の規格化＞

波動関数$\psi_k(\varphi)$の規格化を次式で行う。

$$(\psi_k(\varphi),\ \psi_0(\varphi)) = \int_0^{2\pi} d\varphi\ \psi_k(\varphi)^* \psi_0(\varphi) = \delta_{k,0} \quad (2.18)$$

§3　摂動解を求める

3.1　基底状態（n＝0）への適用

基底状態（n＝0）に対し、前節の手順に従い波動関数及び固有値の摂動論を実行する。

n＝0の無摂動解（第0次の解）

$$\psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \lambda_0 = 0 \qquad (3.1)$$

を、(2.17) へ代入し、

$$T_0(\varphi) = 0 \qquad (3.2)$$

を得る。方程式 (2.16b) は、

$$\frac{d}{d\varphi} T_1(\varphi) + \cos\varphi + \lambda_1 = 0 \qquad (3.3)$$

となり、これを積分することにより

$$T_1(\varphi) = c_1 - \lambda_1 \varphi - \sin\varphi \quad (c_1 \text{ は積分定数})$$

を得る。関数$T_1(\varphi)$の周期境界条件 (2.13) 及び奇関数性 (2.15) より

$$\lambda_1 = c_1 = 0 \qquad (3.4)$$

となり,

$$T_1(\varphi) = -\sin\varphi \qquad (3.5)$$

を得る。ここまでに得られた結果ψ_0, T_0, T_1を (2.17) に代入すると、

$$\frac{d}{d\varphi}\psi_1(\varphi) + \sin\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0 \qquad (3.6)$$

となり、これを積分して

$$\psi_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(c_2 + \cos\varphi)$$

を得る。規格化条件 (2.18) を考慮すれば積分定数c_2は決まり、

$$\psi_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\varphi \qquad (3.7)$$

を得る。以下同様の手順を繰り返すことにより固有値及び波動関数が逐次得られる。摂動の2次から8次までの結果を以下に列挙する。なお、結果は数式処理ソフト上であるが複数の方法で検算済みである。

$$T_2(\varphi) = 1/4\sin 2\varphi \quad , \lambda_2 = -1/2 \quad , \psi_2(\varphi) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\cos 2\varphi \ , \qquad (3.8)$$

$$T_3(\varphi) = 1/12\ (\sin 3\varphi - \sin\varphi) \quad , \lambda_3 = 0,$$

$$\psi_3(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{288\sqrt{\pi}}(-63\cos\varphi + \cos 3\varphi), \qquad (3.9)$$

$$T_4(\varphi) = 1/384\ (-64\sin 2\varphi + 11\sin 4\varphi) \quad , \lambda_4 = 7/32,$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{9216\sqrt{\pi}}(-320\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) \ , \qquad (3.10)$$

$$T_5(\varphi) = 1/1920\ (-400\sin\varphi + 165\sin 3\varphi - 19\sin 5\varphi), \lambda_5 = 0,$$

$$\psi_5(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{460800\sqrt{\pi}}(92800\cos\varphi - 975\cos 3\varphi + \cos 5\varphi), \qquad (3.11)$$

$$T_6(\varphi) = 1/138240\ (23445\sin 2\varphi - 5472\sin 4\varphi + 473\sin 6\varphi),$$

$$\lambda_6 = -29/144,$$

$$\psi_6(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{33177600\sqrt{\pi}}(1083825\cos 2\varphi - 2304\cos 4\varphi + \cos 6\varphi), \qquad (3.12)$$

$$T_7(\varphi) = 1/193536\ (44583\sin\varphi - 19845\sin 3\varphi + 3311\sin 5\varphi - 229\sin 7\varphi),$$

$$\lambda_7 = 0,$$

$$\psi_7(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{3251404800\sqrt{\pi}}(-757274175\cos\varphi + 6544881\cos 3\varphi - 4655\cos 5\varphi + \cos 7\varphi), \qquad (3.13)$$

$$T_8(\varphi) = 1/247726080\,(-50781696\sin 2\varphi + 13401920\sin 4\varphi - - 1758720\sin 6\varphi + 101369\sin 8\varphi),$$

$$\lambda_8 = 68687/294912,$$

$$\psi_8(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{416179814400\sqrt{\pi}}(-15810971904\cos 2\varphi + 27681472\cos 4\varphi - 8448\cos 6\varphi + \cos 8\varphi), \qquad (3.14)$$

基底状態（n＝0）の場合のエネルギー固有値は、Gの8次のオーダーまでで以下のようになる。

$$\lambda = G^2\left(-\frac{1}{2}\right) + G^4\left(\frac{7}{32}\right) + G^6\left(-\frac{29}{144}\right) + G^8\left(\frac{68687}{294912}\right) + \ldots, \qquad (3.15)$$

固有値への寄与として、奇数次はゼロと予想される。また、正負の符号は交互に現れるようである。証明は別の機会に行いたい。

3.2　第1励起状態（n=1）への適用

第1励起状態（n=1）に対し、§3.1で行った手順に従い波動関数及び固有値を摂動の6次まで求める。第1励起状態の無摂動解（第0次の解）は、(2.8) および (2.9) より

$$\psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{cases} \cos\varphi & (\textit{even function}) \\ \sin\varphi & (\textit{odd function}) \end{cases} , \qquad (3.16)$$

$$\lambda_0 = 1$$

であり、ハミルトニアンの固有値$\lambda_0 = 1$に属する固有状態は2重に縮退している。これを (A) 偶関数、(B) 奇関数のそれぞれの場合について摂動展開を実行する。

(A) 偶関数の場合

n＝1の無摂動解（第0次の解）

$$\psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\varphi \quad , \qquad (3.17)$$

を式 (2.17) へ代入し、

$$T_0(\varphi) = -\tan\varphi \qquad (3.18)$$

を得る。これを (2.16b) に代入すると、

$$\frac{d}{d\varphi}T_1(\varphi) - 2\tan\varphi\, T_1(\varphi) + \cos\varphi + \lambda_1 = 0 \qquad (3.19)$$

となる。これは1階の非斉次常微分方程式であり、

容易に積分可能である。これにより

$$T_1(\varphi)=\sec^2\varphi\left(c_1-\tfrac{1}{2}\lambda_1\varphi-\tfrac{3}{4}\sin\varphi-\tfrac{1}{4}\lambda_1\sin 2\varphi-\tfrac{1}{12}\sin 3\varphi\right)$$

ここで c_1 は積分定数である。$T_1(\varphi)$ の奇関数性 (2.15) 及び周期境界条件 (2.13) より

$$c_1=\lambda_1=0 \tag{3.20}$$

となり、

$$T_1(\varphi)=\sec^2\varphi\left(-\tfrac{3}{4}\sin\varphi-\tfrac{1}{12}\sin 3\varphi\right) \tag{3.21}$$

を得る。ここまでに得られた結果 ψ_0, T_0, T_1 を (2.17) に代入すると、

$$\frac{d}{d\varphi}\psi_1(\varphi)+\tan\varphi\,\psi_1(\varphi)-\frac{\sec\varphi}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{12}\sin 3\varphi\right)=0, \tag{3.22}$$

これを解いて、

$$\psi_1(\varphi)=\frac{1}{6\sqrt{\pi}}(c'\cos\varphi-3+\cos 2\varphi),\ \ (c'\text{は積分定数})$$

を得る。規格化条件 (2.18) により積分定数は定まり、

$$\psi_1(\varphi)=\frac{1}{6\sqrt{\pi}}(-3+\cos 2\varphi), \tag{3.23}$$

を得る。以下同様の手順を繰り返すことにより固有値及び波動関数が逐次得られる。摂動の２次から６次までの結果を数式処理ソフトに基づき求めたものを以下に列挙する。

$$\begin{aligned}&T_2(\varphi)=-\frac{\sec\varphi^3}{576}(254\sin\varphi-3\sin 3\varphi-\sin 5\varphi),\ \lambda_2=\frac{5}{12},\\&\psi_2(\varphi)=\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\cos 2\varphi,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&T_3(\varphi)=-\frac{\sec\varphi^4}{17280}(3805\sin\varphi-1299\sin 3\varphi+17\sin 5\varphi+\sin 7\varphi),\\&\lambda_3=0,\\&\psi_3(\varphi)=\frac{1800+215\cos 2\varphi+3\cos 4\varphi}{8640\sqrt{\pi}},\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}&T_4(\varphi)=-\frac{\sec\varphi^5}{331760}(310433\sin\varphi-345637\sin 3\varphi\\&\qquad-905\sin 5\varphi-202\sin 7\varphi-7\sin 9\varphi),\\&\lambda_4=-763/3456,\\&\psi_4(\varphi)=\frac{1}{138240\sqrt{\pi}}(293\cos 3\varphi+\cos 5\varphi),\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}&T_5(\varphi)=-\frac{\sec\varphi^6}{139345920}(8861524\sin\varphi-7023642\sin 3\varphi\\&\qquad+2454713\sin 5\varphi-9762\sin 7\varphi+450\sin 9\varphi+11\sin 11\varphi),\\&\lambda_5=0,\\&\psi_5(\varphi)=\frac{1}{87091200\sqrt{\pi}}(-17173800-736435\cos 2\varphi\\&\qquad+7014\cos 4\varphi+9\cos 6\varphi),\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}&T_6(\varphi)=-\frac{\sec\varphi^7}{267544166400}(14932879676\sin\varphi-491956201\sin 3\varphi\\&\qquad+8071366111\sin 5\varphi+9311442\sin 7\varphi+1170278\sin 9\varphi\\&\qquad-42373\sin 11\varphi-797\sin 13\varphi),\ \lambda_6=\frac{1002401}{4976640},\\&\psi_6(\varphi)=\frac{1}{2786918400\sqrt{\pi}}(-1952342\cos 3\varphi+5032\cos 5\varphi+3\cos 7\varphi),\end{aligned} \tag{3.28}$$

(B) 奇関数の場合

(A) の偶関数の場合と全く同様の手順に従い摂動解を求める。

n＝１の無摂動解（第０次の解）のうち奇関数のものは

$$\psi_0(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi, \tag{3.29}$$

で与えられ式、これを (2.17) へ代入し、

$$T_0(\varphi)=\cot\varphi,\quad \lambda_0=1 \tag{3.30}$$

を得る。これを方程式群 (2.16) に代入し、$T_k(\varphi)$ を順次求める。(3.29) やこれらの結果を方程式 (2.17) に代入して、$\psi_k(\varphi)$ が求まる。以下に結果を列挙する。

$$\begin{aligned}&T_1(\varphi)=-\tfrac{1}{12}\mathrm{cosec}^2\varphi\,(3\sin\varphi-\sin 3\varphi),\quad \lambda_1=0\\&\psi_1(\varphi)=\frac{\sin 2\varphi}{6\sqrt{\pi}},\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}&T_2(\varphi)=-\frac{\mathrm{cosec}\varphi^2}{288}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi),\ \lambda_2=-\frac{1}{12},\\&\psi_2(\varphi)=\frac{\sin 3\varphi}{96\sqrt{\pi}},\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}&T_3(\varphi)=\frac{\mathrm{cosec}\varphi^2}{4320}(10\sin\varphi-5\sin 3\varphi+\sin 5\varphi),\ \lambda_3=0,\\&\psi_3(\varphi)=\frac{-25\sin 2\varphi+3\sin 4\varphi}{8640\sqrt{\pi}},\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&T_4(\varphi)=-\frac{\mathrm{cosec}\varphi^2}{414720}(85\sin 2\varphi-53\sin 4\varphi+7\sin 6\varphi),\ \lambda_4=\frac{5}{3456},\\&\psi_4(\varphi)=\frac{1}{138240\sqrt{\pi}}(-37\sin 3\varphi+\sin 5\varphi),\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&T_5(\varphi)=\frac{\mathrm{cosec}\varphi^2}{8709120}(-735\sin\varphi+406\sin 3\varphi-112\sin 5\varphi+11\sin 7\varphi),\\&\lambda_5=0,\\&\psi_5(\varphi)=\frac{1}{87091200\sqrt{\pi}}(10115\sin 2\varphi-924\sin 4\varphi+9\sin 6\varphi),\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}&T_6(\varphi)=-\frac{\mathrm{cosec}\varphi^2}{8360755200}(-78848\sin 2\varphi+53172\sin 4\varphi\\&\qquad-10228\sin 6\varphi+797\sin 8\varphi),\\&\lambda_6=-\frac{289}{4976640},\\&\psi_6(\varphi)=\frac{1}{2786918400\sqrt{\pi}}(31402\sin 3\varphi-680\sin 5\varphi+3\sin 7\varphi),\end{aligned} \tag{3.36}$$

n＝１の固有値スペクトルについて、上の結果をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}&\lambda(even)=1+G^2\left(\frac{5}{12}\right)+G^4\left(-\frac{763}{3456}\right)+G^6\left(\frac{1002401}{4976640}\right)+\dots,\\&\lambda(odd)=1+G^2\left(-\frac{1}{12}\right)+G^4\left(\frac{5}{3456}\right)+G^6\left(-\frac{289}{4976640}\right)+\dots,\end{aligned} \tag{3.37}$$

これより、n＝１の場合には、ハミルトニアンの固有値の縮退は G^2 のオーダーでほどかれることがわかる。

§４　まとめと展望

これまでの結果についてまとめと今後の展望をのべたい。

(1)　摂動の６次までの縮退固有値に対する公式は既に知られており［４］、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}&\lambda_0=n^2\ \ (for\ n\geq 0),\ \lambda_2=\frac{1}{2(4n^2-1)}\ \ (for\ n\geq 2),\\&\lambda_4=\frac{20n^2+7}{32(4n^2-1)^3(4n^2-9)}\ \ (for\ n\geq 3),\\&\lambda_6=\frac{144n^4+232n^2+29}{16(4n^2-1)^5(4n^2-9)(n^2-1)}\ \ (for\ n\geq 4),\end{aligned} \tag{4.1}$$

通常と異なる方法で我々は公式（4.1）を確認したことになる。我々の求めた波動関数は通常マチュー関数として知られるものとは異なったものである。それは規格化の条件の違いから起こる。規格化条件(2.17)を

$$(\psi(\varphi),\psi(\varphi))=1 \qquad (4.2)$$

とすれば、我々の求めた$T_k(\varphi)$を何ら変更すること無くマチュー関数に到達する。

(2)　§３及び付録（Appendix Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ）では第ｎ番目の励起状態の２重縮退が、摂動の２ｎ次目でとけることが、ｎ＝１，２，３，４についてわかった。ただし、ｎ＝４の場合については、摂動の8次まで計算して始めて縮退が解けていることがわかる。実際求めた結果は、

$$\lambda_8(even)=\frac{56675690063}{354949423356616704000},$$
$$\lambda_8(odd)=-\frac{52492329667}{354949423356616704000}$$

であり、確かに異なる値をもつことがわかる。任意のｎに対して成り立つ一般公式の導出については、すでに著者によって「部分的に」なされているところである。「部分的に」とは、縮退している間（第２ｎ次まで）の公式は求まっても、縮退がとけた後の次数、すなわち、(２ｎ＋１）次目以降についての一般公式を得るには至っていない、という意味である。今後の重要な課題の一つである。

(3)　我々の開発した方法が、１次元系でしかも１粒子系にのみに適用されるのでは、と読者の中には危惧される方がいるかもしれない。本論分も２次元平面回転子とはいえ、本質的に１次元系であるのだから、と。多次元系、多粒子系にも適用可能なパワーフルな道具立てであることを、今後の論文において示したい。また、リッカチ方程式の取扱を摂動論においてのみならず、厳密解を探索する上にも有用であることを示したい。

(4)　この論文が行った同じ結果を再現するために「通常の縮退のある状態の摂動論」に従えば、どれだけの労力と時間を要するであろうか。途方も無い積分回数と大きなサイズの永年方程式を解かねばならないこと、加えてアルゴリズムの非単純性に遭遇しなければならない。一方我々の方法では、積分回数も少なく、量子系に依らず同一の単純なアルゴリズムで波動関数と固有値が計算できる。我々が実際行ったように、このような計算は数式処理ソフトを搭載したコンピュータにより対話型で可能であり、またプログラム化によりいっそうの高速化が実現可能となろう。

(4)　様々な分野、例えば低次元量子系と関連する物性分野（量子ホール効果や半導体デバイスなど）や量子化学分野（反応速度論など）への応用が可能と思われる。また将来、高校生、大学生を対象とする量子力学のテキストの中で我々の方法が標準化される日が間違いなく来ることを確信する。この方法論のもつ潜在能力は著者が想像する以上かもしれない。

この論文は、摂動の高次計算において数式処理プログラムソフト、マセマティカ第３版（Wolfram Research社）に基づいて行われた。本稿作成に際し本学教員である畔津忠博先生には、数式処理プログラムを始めとするコンピュータに関する情報ならびにご教示を頂き、また熱心に耳を傾け議論に参加して頂いたことに深く感謝する。

文　献

[１] M. Shintani, Bulletin of Yamaguchi Prefectural University, Faculty of Human Life Sciences（山口県立大学生活科学部研究報告）, vol.26（2000）39-42.

[２] M. Shintani, Bulletin of Yamaguchi Prefectural University, Faculty of Human Life Sciences（山口県立大学生活科学部研究報告）, vol.27（2001）39-42.

[３] 例えば、ランダウ・リフシッツ「量子力学Ⅰ、Ⅱ」東京図書（1969年）

[４] 例えば、M. Abramowitz and I.A. Stegun , Handbook of Mathematical Functions 9th edition, Dover Pub. Inc., New York（1970）.

Appendix　I　第2励起状態（n=2）の摂動解

§２の方法に基づき第2励起状態（n=2）の摂動計算の結果を以下にしめす。

(A) 偶関数の解

$$T_0(\varphi) = -2\,\mathrm{Tan}[2\varphi],\ \lambda_0 = 4,\ \psi_0(\varphi) = \frac{\mathrm{Cos}[2\varphi]}{\sqrt{\pi}};$$

$$T_1(\varphi) = -\frac{1}{120}\mathrm{Sec}[2\varphi]^2\,(60\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 10\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 6\,\mathrm{Sin}[5\varphi]),\quad \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-5\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 3\,\mathrm{Cos}[3\varphi]}{30\sqrt{\pi}};$$

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{7200}\left(\mathrm{Sec}[2\varphi]^3\,(-512\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 190\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 3\,\mathrm{Sin}[8\varphi])\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{30},\ \psi_2(\varphi) = \frac{5 + \mathrm{Cos}[4\varphi]}{240\sqrt{\pi}};$$

$$T_3(\varphi) = \frac{1}{189000}\left((-5565 - 304\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 1612\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 48\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 9\,\mathrm{Cos}[8\varphi])\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^4\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\right),$$

$$\lambda_3 = 0,$$

$$\psi_3(\varphi) = \frac{-3850\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 819\,\mathrm{Cos}[3\varphi] + 75\,\mathrm{Cos}[5\varphi]}{756000\sqrt{\pi}};$$

$$T_4(\varphi) = \frac{1}{2903040000}\left(\mathrm{Sec}[2\varphi]^5\,(-9539981\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 7257728\,\mathrm{Sin}[4\varphi] - 2198833\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - 326144\,\mathrm{Sin}[8\varphi] + 1395\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + 1152\,\mathrm{Sin}[12\varphi] + 279\,\mathrm{Sin}[14\varphi])\right),$$

$$\lambda_4 = \frac{433}{21600},$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{22400 + 2944\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 75\,\mathrm{Cos}[6\varphi]}{48384000\sqrt{\pi}};$$

$$T_4(\varphi) = \frac{1}{2903040000}\left(\mathrm{Sec}[2\varphi]^5\,(-9539981\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 7257728\,\mathrm{Sin}[4\varphi] - 2198833\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - 326144\,\mathrm{Sin}[8\varphi] + 1395\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + 1152\,\mathrm{Sin}[12\varphi] + 279\,\mathrm{Sin}[14\varphi])\right),$$

$$\lambda_4 = \frac{433}{21600},$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{22400 + 2944\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 75\,\mathrm{Cos}[6\varphi]}{48384000\sqrt{\pi}};$$

$$T_5(\varphi) = \left((-13014984 + 3090119\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 1333716\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - 5655087\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 330104\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 26139\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 1260\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 141\,\mathrm{Cos}[14\varphi])\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^6\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\right) / 10886400000,$$

$$\lambda_5 = 0,$$

$$\psi_5(\varphi) = (296800\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 1162656\,\mathrm{Cos}[3\varphi] + 75\,(477\,\mathrm{Cos}[5\varphi] + 5\,\mathrm{Cos}[7\varphi])) \Big/ \left(21772800000\sqrt{\pi}\right);$$

$$T_6(\varphi) = \big(\mathrm{Sec}[2\varphi]^7 (-23999348928\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 23999939494\,\mathrm{Sin}[4\varphi] - 8926470528\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - 457198200\,\mathrm{Sin}[8\varphi] + 1919730560\,\mathrm{Sin}[10\varphi] - 424989263\,\mathrm{Sin}[12\varphi] + 221088\,\mathrm{Sin}[14\varphi] + 1121340\,\mathrm{Sin}[16\varphi] + 31584\,\mathrm{Sin}[18\varphi] + 4059\,\mathrm{Sin}[20\varphi])\big) / 146313216000000;$$

$$\lambda_6 = -\frac{5701}{170100000},$$

$$\psi_6(\varphi) = -\frac{\mathrm{Cos}[2\varphi]}{36288000\sqrt{\pi}} + (4800\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 550157\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 25(-111496 + 192\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + \mathrm{Cos}[8\varphi])) / \left(174182400000\sqrt{\pi}\right).$$

(B) 奇関数の解

$$T_0(\varphi) = 2\,\mathrm{Cot}[2\varphi],\ \lambda_0 = 4,\ \psi_0(\varphi) = \frac{\mathrm{Sin}[2\varphi]}{\sqrt{\pi}};$$

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{120}\mathrm{Csc}[2\varphi]^2(-60\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 10\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 6\,\mathrm{Sin}[5\varphi]),\quad \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-5\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 3\,\mathrm{Sin}[3\varphi]}{30\sqrt{\pi}};$$

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{3600}\left((-55 + 12\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 3\,\mathrm{Cos}[4\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^2\,\mathrm{Tan}[\varphi]\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{30},\ \psi_2(\varphi) = \frac{\mathrm{Sin}[4\varphi]}{240\sqrt{\pi}};$$

$$T_3(\varphi) = \frac{1}{189000}\left((-373 + 84\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 9\,\mathrm{Cos}[4\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\right),$$

$$\lambda_3 = 0,\quad \psi_3(\varphi) = \frac{1400\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 819\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 75\,\mathrm{Sin}[5\varphi]}{756000\sqrt{\pi}};$$

$$T_4(\varphi) = \frac{1}{1451520000}\left((114009 + 581590\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 11376\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 2826\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 279\,\mathrm{Cos}[8\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^4\,\mathrm{Tan}[\varphi])\right),$$

$$\lambda_4 = -\frac{317}{21600},$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{22400 + 2944\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 75\,\mathrm{Cos}[6\varphi]}{48384000\sqrt{\pi}};$$

$$T_5(\varphi) = \left((127323 + 582310\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 1800\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 2106\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 141\,\mathrm{Cos}[8\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^3\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\right) / 10886400000,$$

$$\lambda_5 = 0,$$

$$\psi_5(\varphi) = (-2223200\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 349344\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 35775\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 375\,\mathrm{Sin}[7\varphi]) \Big/ \left(21772800000\sqrt{\pi}\right);$$

$$T_6(\varphi) = -\left((539978830 + 510377296\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 385522091\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 4478184\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 336354\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - 64056\,\mathrm{Cos}[10\varphi] - 4059\,\mathrm{Cos}[12\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^6\,\mathrm{Tan}[\varphi]\right) / 73156608000000;$$

$$\lambda_6 = \frac{10049}{170100000},$$

$$\psi_6(\varphi) = \frac{-163843\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 25\,(192\,\mathrm{Sin}[6\varphi] + \mathrm{Sin}[8\varphi])}{174182400000\sqrt{\pi}}.$$

Appendix　II　第３励起状態（n=3）の摂動解

§２の方法に基づき第３励起状態（n=3）の摂動計算の結果を以下にしめす。

(A) 偶関数の解

$$T_0(\varphi) = -3\,\mathrm{Tan}[3\varphi],\ \lambda_0 = 9,\ \psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Cos}[3\varphi];$$

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{420}\,\mathrm{Sec}[3\varphi]^2\,(-210\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 21\,\mathrm{Sin}[5\varphi] - 15\,\mathrm{Sin}[7\varphi]),\quad \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-7\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 5\,\mathrm{Cos}[4\varphi]}{70\sqrt{\pi}};$$

$$T_2(\varphi) = \big(\mathrm{Sec}[\varphi]^3\,(4410\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 6912\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 2625\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 98\,\mathrm{Sin}[7\varphi] + 25\,\mathrm{Sin}[11\varphi])\big) / \big(156800\,(-1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^3\big),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{70},\quad \psi_2(\varphi) = \frac{14\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 5\,\mathrm{Cos}[5\varphi]}{2240\sqrt{\pi}};$$

$$T_3(\varphi) = \big((-135695 - 17142\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 18849\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 51054\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 2307\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 600\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 125\,\mathrm{Cos}[12\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\big) / \big(12348000\,(1 - 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^4\big),$$

$$\lambda_3 = 0,$$

$$\psi_3(\varphi) = (-50274\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 25\,(1809\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 49\,(-42 + 5\,\mathrm{Cos}[6\varphi]))) / \big(148176000\sqrt{\pi}\big);$$

$$T_4(\varphi) = \big(\mathrm{Sec}[\varphi]^5\,(329288736\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 399659427\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 274008480\,\mathrm{Sin}[5\varphi] - 89612523\,\mathrm{Sin}[7\varphi] + 30322269\,\mathrm{Sin}[9\varphi] - 19257372\,\mathrm{Sin}[11\varphi] + 4458174\,\mathrm{Sin}[13\varphi] + 16000\,\mathrm{Sin}[17\varphi] + 5125\,\mathrm{Sin}[19\varphi])\big) / \big(442552320000\,(-1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^5\big),$$

$$\lambda_4 = \frac{187}{10976000},$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{126714\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 30400\,\mathrm{Cos}[5\varphi] + 1225\,\mathrm{Cos}[7\varphi]}{2370816000\sqrt{\pi}};$$

$$T_5(\varphi) = \big((-5551016913 + 5247262955\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 1761866194\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 3799885140\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 2281371496\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 104970128\,\mathrm{Cos}[10\varphi] - 108411759\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 65292389\,\mathrm{Cos}[14\varphi] + 1127725\,\mathrm{Cos}[16\varphi] + 283500\,\mathrm{Cos}[18\varphi] + 38125\,\mathrm{Cos}[20\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^3\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\big) / \big(42595660800000\,(1 - 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^6\big),$$

$$\lambda_5 = 0,$$

$$\psi_5(\varphi) = (-2223200\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 349344\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 35775\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 375\,\mathrm{Sin}[7\varphi]) / \big(21772800000\sqrt{\pi}\big);$$

$$\begin{aligned}
T_6(\varphi) = \big(&\mathrm{Sec}[\varphi]^7 (841924338121854\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 887545375927788\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + \\
&686584041320259\,\mathrm{Sin}[5\varphi] - 358092282487590\,\mathrm{Sin}[7\varphi] + \\
&176953894181647\,\mathrm{Sin}[9\varphi] - 115281026486307\,\mathrm{Sin}[11\varphi] + \\
&55470568816872\,\mathrm{Sin}[13\varphi] - 14348610323291\,\mathrm{Sin}[15\varphi] + \\
&1645821094599\,\mathrm{Sin}[17\varphi] - 621758082780\,\mathrm{Sin}[19\varphi] + \\
&319440625\,\mathrm{Sin}[21\varphi] + 896383125\,\mathrm{Sin}[23\varphi] + \\
&263520000\,\mathrm{Sin}[25\varphi] + 45634375\,\mathrm{Sin}[27\varphi])\big) / \\
&\big(412189690429440000000 (-1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^7\big);
\end{aligned}$$

$$\lambda_6 = \frac{6743617}{5808499200000},$$

$$\begin{aligned}
\psi_6(\varphi) = (&16402220604\,\mathrm{Cos}[\varphi] + \\
&25 (111509343\,\mathrm{Cos}[5\varphi] + 196 (27072\,\mathrm{Cos}[7\varphi] + 245\,\mathrm{Cos}[9\varphi]))) / \\
&\big(3680265093120000\sqrt{\pi}\big).
\end{aligned}$$

(B) 奇関数の解

$$T_0(\varphi) = 3\,\mathrm{Cot}[3\varphi],\ \lambda_0 = 9,\ \psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Sin}[3\varphi];$$

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{420}\,\mathrm{Csc}[3\varphi]^2 (-210\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 21\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 15\,\mathrm{Sin}[7\varphi]),\quad \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-7\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 5\,\mathrm{Sin}[4\varphi]}{70\sqrt{\pi}};$$

$$\begin{aligned}
T_2(\varphi) = (&-2081\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 248\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 25 (3\,\mathrm{Sin}[6\varphi] + \mathrm{Sin}[8\varphi])) / \\
&\big(19600 (1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^3\big),
\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{70},\quad \psi_2(\varphi) = \frac{14\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 5\,\mathrm{Sin}[5\varphi]}{2240\sqrt{\pi}};$$

$$\begin{aligned}
T_3(\varphi) = \big(&(-28154 - 18718\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + \\
&5957\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 1100\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 125\,\mathrm{Cos}[8\varphi])\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\big) / \\
&\big(771750 (1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^4\big),
\end{aligned}$$

$$\lambda_3 = 0,\quad \psi_3(\varphi) = \frac{-50274\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 25 (1809\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 245\,\mathrm{Sin}[6\varphi])}{148176000\sqrt{\pi}};$$

$$\begin{aligned}
T_4(\varphi) = ((&-17336559\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 12540753\,\mathrm{Cos}[3\varphi] - \\
&1693978\,\mathrm{Cos}[5\varphi] - 3308326\,\mathrm{Cos}[7\varphi] + 203625\,\mathrm{Cos}[9\varphi] + \\
&46750\,\mathrm{Cos}[11\varphi] + 5125\,\mathrm{Cos}[13\varphi])\,\mathrm{Sin}[\varphi]) / \\
&\big(6914880000 (1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^5\big);,
\end{aligned}$$

$$\lambda_4 = \frac{187}{10976000},$$

$$\psi_4(\varphi) = \frac{23814\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 30400\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 1225\,\mathrm{Sin}[7\varphi]}{2370816000\sqrt{\pi}};$$

$$\begin{aligned}
T_5(\varphi) \big(&(-374356251 - 66932751\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 206900753\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - \\
&98974950\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 38207011\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 3629350\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + \\
&512250\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 38125\,\mathrm{Cos}[14\varphi])\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\big) / \\
&\big(665557200000 (1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\varphi])^6\big),
\end{aligned}$$

$$\lambda_5 = 0\,,$$
$$\psi_5(\varphi) = (19530126\,\mathrm{Sin}[2\,\varphi] + 25\,(4377032\,\mathrm{Sin}[4\,\varphi] + 245\,(2805\,\mathrm{Sin}[6\,\varphi] + 49\,\mathrm{Sin}[8\,\varphi])))\Big/\left(63893491200000\,\sqrt{\pi}\right);$$
$$T_6(\varphi) = ((38102295072591\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 45234084629970\,\mathrm{Cos}[3\,\varphi] + 20721955185994\,\mathrm{Cos}[5\,\varphi] + 8413895232131\,\mathrm{Cos}[7\,\varphi] + 5142449515509\,\mathrm{Cos}[9\,\varphi] + 809360552470\,\mathrm{Cos}[11\,\varphi] + 21814469375\,\mathrm{Cos}[13\,\varphi] + 4647380625\,\mathrm{Cos}[15\,\varphi] + 628595000\,\mathrm{Cos}[17\,\varphi] + 45634375\,\mathrm{Cos}[19\,\varphi])\,\mathrm{Sin}[\varphi])\Big/\left(161011597824000000\,(1 + 2\,\mathrm{Cos}[2\,\varphi])^7\right),$$
$$\lambda_6 = -\frac{5861633}{5808499200000}\,,$$
$$\psi_6(\varphi) = (-1853062596\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 25\,(111509343\,\mathrm{Sin}[5\,\varphi] + 196\,(27072\,\mathrm{Sin}[7\,\varphi] + 245\,\mathrm{Sin}[9\,\varphi])))\Big/\left(36802650931200000\,\sqrt{\pi}\right).$$

Appendix Ⅲ 第４励起状態（n=4）の摂動解

第４励起状態（n=4）の摂動計算の結果を以下に示す。

(A) 偶関数の解

$$T_0(\varphi) = -4\,\mathrm{Tan}[4\varphi],\ \lambda_0 = 16,\ \psi_0(\varphi) = ;$$

$$T_1(\varphi) = \mathrm{Sec}[4\varphi]^2\left(-\frac{\mathrm{Sin}[\varphi]}{2} - \frac{1}{28}\mathrm{Sin}[7\varphi] - \frac{1}{36}\mathrm{Sin}[9\varphi]\right),\quad \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-9\,\mathrm{Cos}[3\varphi] + 7\,\mathrm{Cos}[5\varphi]}{126\sqrt{\pi}};$$

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{635040}\big(\mathrm{Sec}[4\varphi]^3(12285\,\mathrm{Sin}[2\varphi] - 20480\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 8379\,\mathrm{Sin}[6\varphi] + 135\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + 49\,\mathrm{Sin}[14\varphi])\big),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{126},$$

$$\psi_2(\varphi) = \mathrm{Cos}[4\varphi]\left(-\frac{65}{15876\sqrt{\pi}} + \frac{(15\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 7\,\mathrm{Cos}[6\varphi])\,\mathrm{Sec}[4\varphi]}{5040\sqrt{\pi}}\right);$$

$$T_3(\varphi) = \frac{1}{110020680}\big((-639387 - 66592\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 80264\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - 78816\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 262076\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 13792\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 5160\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 1568\,\mathrm{Cos}[14\varphi] + 343\,\mathrm{Cos}[16\varphi])\,\mathrm{Sec}[4\varphi]^4\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\big),$$

$$\lambda_3 = 0,\quad \psi_3(\varphi) = \frac{1}{146694240\sqrt{\pi}}(-14553\,\mathrm{Cos}[\varphi] + 23595\,\mathrm{Cos}[3\varphi] - 14861\,\mathrm{Cos}[5\varphi] + 3087\,\mathrm{Cos}[7\varphi]);$$

$$T_4(\varphi) = \big(\mathrm{Sec}[4\varphi]^5(4300997760\,\mathrm{Sin}[2\varphi] - 6388315648\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 4221759360\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - 959410683\,\mathrm{Sin}[8\varphi] - 364478400\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + 532285952\,\mathrm{Sin}[12\varphi] - 339268160\,\mathrm{Sin}[14\varphi] + 77248044\,\mathrm{Sin}[16\varphi] + 855360\,\mathrm{Sin}[18\varphi] + 109760\,\mathrm{Sin}[22\varphi] + 40817\,\mathrm{Sin}[24\varphi])\big)/17744135270400,$$

$$\lambda_4 = \frac{109}{40007520},$$

$$\psi_4(\varphi) = (-20124720\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 14826548\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 6615(2079 - 976\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 147\,\mathrm{Cos}[8\varphi]))/\big(4436033817600\sqrt{\pi}\big);$$

$$T_5(\varphi) = \big((-135204785592 + 132272584316\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 499167872\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - 50278917183\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 101321933468\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - 54071476575\,\mathrm{Cos}[10\varphi] - 105875904\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 1481666706\,\mathrm{Cos}[14\varphi] - 3384617352\,\mathrm{Cos}[16\varphi] + 1820063634\,\mathrm{Cos}[18\varphi] + 36308032\,\mathrm{Cos}[20\varphi] + 10099439\,\mathrm{Cos}[22\varphi] + 2852388\,\mathrm{Cos}[24\varphi] + 420175\,\mathrm{Cos}[26\varphi])\,\mathrm{Sec}[4\varphi]^6\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\big)/3633111696614400,$$

$$\lambda_5 = 0\ ,$$

$$\begin{aligned}
\psi_5(\varphi) = {} & (-21567546\,\mathrm{Cos}[\varphi] - 503201556\,\mathrm{Cos}[3\varphi] + \\
& 7(33538804\,\mathrm{Cos}[5\varphi] - 14189175\,\mathrm{Cos}[7\varphi] + 1750329\,\mathrm{Cos}[9\varphi]))\Big/ \\
& \left(7266223393228800\sqrt{\pi}\right)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6(\varphi) = {} & \big(\mathrm{Sec}[4\varphi]^7\,(4937979397284972\,\mathrm{Sin}[2\varphi] - \\
& 7160899152609280\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 5394389970677906\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - \\
& 1852357581898560\,\mathrm{Sin}[8\varphi] - 541558638862254\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + \\
& 1266902600171520\,\mathrm{Sin}[12\varphi] - \\
& 1001327482625470\,\mathrm{Sin}[14\varphi] + \\
& 423422138476480\,\mathrm{Sin}[16\varphi] - \\
& 65500438938894\,\mathrm{Sin}[18\varphi] - 17177692979200\,\mathrm{Sin}[20\varphi] + \\
& 14376567673754\,\mathrm{Sin}[22\varphi] - 6340980740160\,\mathrm{Sin}[24\varphi] + \\
& 1158621342426\,\mathrm{Sin}[26\varphi] + 1923554633\,\mathrm{Sin}[30\varphi] + \\
& 739508000\,\mathrm{Sin}[32\varphi] + 150775597\,\mathrm{Sin}[34\varphi])\big)\,/ \\
& 16113576996824186880000\ ,
\end{aligned}$$

$$\lambda_6 = \frac{2707}{873344157840}\ ,$$

$$\begin{aligned}
\psi_6(\varphi) = {} & \\
& (358117029270\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 49915387600\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 1617(-59999940 + \\
& 3225157\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 3677940\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 416745\,\mathrm{Cos}[10\varphi]))\Big/ \\
& \left(671399041534341120000\sqrt{\pi}\right)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7(\varphi) = {} & \big((-9950469150166766 + 13130527661172224\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - \\
& 1805306918552370\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - \\
& 5901160063385600\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 9461218382442272\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - \\
& 6806698081783808\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + \\
& 1698574876828780\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + \\
& 515048719598464\,\mathrm{Cos}[14\varphi] - 850995307800248\,\mathrm{Cos}[16\varphi] + \\
& 667003863030912\,\mathrm{Cos}[18\varphi] - 213628798281524\,\mathrm{Cos}[20\varphi] + \\
& 786403410944\,\mathrm{Cos}[22\varphi] + 5273340357984\,\mathrm{Cos}[24\varphi] - \\
& 4262062969856\,\mathrm{Cos}[26\varphi] + 1618737032453\,\mathrm{Cos}[28\varphi] + \\
& 19049547328\,\mathrm{Cos}[30\varphi] + 5510943270\,\mathrm{Cos}[32\varphi] + \\
& 1128354752\,\mathrm{Cos}[34\varphi] + 124825589\,\mathrm{Cos}[36\varphi]) \\
& \mathrm{Sec}[4\varphi]^8\,\mathrm{Sin}[\varphi]^3\big)/ \\
& 25378883769998094336000\ ,
\end{aligned}$$

$$\lambda_7 = 0\ ,$$

$$
\begin{aligned}
T_8(\varphi) = \big(&\mathrm{Sec}[4\varphi]^9\,(25689459842636338080\,\mathrm{Sin}[2\varphi] - \\
&3741037370961333113294\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + \\
&3005139650125020518400\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - \\
&1221899585435634555136\,\mathrm{Sin}[8\varphi] - \\
&290500622415781283840\,\mathrm{Sin}[10\varphi] + \\
&933470569194632204322\,\mathrm{Sin}[12\varphi] - \\
&845225002145860403200\,\mathrm{Sin}[14\varphi] + \\
&440458882346326626304\,\mathrm{Sin}[16\varphi] - \\
&104571349618921390080\,\mathrm{Sin}[18\varphi] - \\
&31290078642879223993\,\mathrm{Sin}[20\varphi] + \\
&45232624661974574080\,\mathrm{Sin}[22\varphi] - \\
&26365290780995428224\,\mathrm{Sin}[24\varphi] + \\
&9135210467761280000\,\mathrm{Sin}[26\varphi] - \\
&1471546528078309121\,\mathrm{Sin}[28\varphi] - \\
&94390694700380160\,\mathrm{Sin}[30\varphi] + \\
&80888114282694656\,\mathrm{Sin}[32\varphi] - \\
&29660701661696000\,\mathrm{Sin}[34\varphi] + 2400169131549\,\mathrm{Sin}[36\varphi] + \\
&23886622735360\,\mathrm{Sin}[38\varphi] + 7655113601408\,\mathrm{Sin}[40\varphi] + \\
&1917321047040\,\mathrm{Sin}[42\varphi] + 266685459061\,\mathrm{Sin}[44\varphi])\big) / \\
&65489701990804682472161280000 \quad ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda_8 = \frac{56675690063}{354949423356616704000} \,.$$

(B) 奇関数の解

$$T_0(\varphi) = 4\,\mathrm{Cot}[4\varphi] \quad , \lambda_0 = 16,\ \psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Sin}[4\varphi] \quad ;$$

$$T_1(\varphi) = \mathrm{Csc}[4\varphi]^2 \left(-\frac{\mathrm{Sin}[\varphi]}{2} + \frac{1}{28}\,\mathrm{Sin}[7\varphi] + \frac{1}{36}\,\mathrm{Sin}[9\varphi]\right) \quad , \ \lambda_1 = 0,$$

$$\psi_1(\varphi) = \frac{-9\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 7\,\mathrm{Sin}[5\varphi]}{126\sqrt{\pi}} \quad ;$$

$$
\begin{aligned}
T_2(\varphi) = \frac{1}{2540160}\big((&-3796 - 5314\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 1520\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + \\
&625\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + 196\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 49\,\mathrm{Cos}[10\varphi]) \\
&\mathrm{Sec}[\varphi]^2\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^3\,\mathrm{Tan}[\varphi]\big) ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{126},\ \psi_2(\varphi) = \frac{(-1300\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 63\,(11 + 7\,\mathrm{Cos}[4\varphi]))\,\mathrm{Sin}[2\varphi]}{158760\sqrt{\pi}} \quad ;$$

$$
\begin{aligned}
T_3(\varphi) = {} & \frac{1}{1760330880} \\
&\big((-296814 - 342216\,\mathrm{Cos}[2\varphi] - 57015\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 56972\,\mathrm{Cos}[6\varphi] + \\
&14862\,\mathrm{Cos}[8\varphi] + 2940\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 343\,\mathrm{Cos}[12\varphi]) \\
&\mathrm{Sec}[\varphi]\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^4\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\big) \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_3 = 0,\ \ \psi_3(\varphi) = \\
&(-14553\,\mathrm{Sin}[\varphi] + 23595\,\mathrm{Sin}[3\varphi] - 14861\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 3087\,\mathrm{Sin}[7\varphi]) / \\
&\left(146694240\sqrt{\pi}\right) \ ;
\end{aligned}
$$

$$T_4(\varphi) = \Big(\mathrm{Sec}[\varphi]^5\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^5\,(-185267454\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 531061958\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 266176760\,\mathrm{Sin}[5\varphi] + 92555768\,\mathrm{Sin}[7\varphi] - 9687968\,\mathrm{Sin}[9\varphi] - 63946944\,\mathrm{Sin}[11\varphi] + 3930355\,\mathrm{Sin}[13\varphi] + 1161055\,\mathrm{Sin}[15\varphi] + 313845\,\mathrm{Sin}[17\varphi] + 40817\,\mathrm{Sin}[19\varphi])\Big) \Big/ 567812328652800,$$

$$\lambda_4 = \frac{109}{40007520},$$

$$\psi_4(\varphi) = (-20124720\,\mathrm{Sin}[2\varphi] + 14826548\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 6615(-976\,\mathrm{Sin}[6\varphi] + 147\,\mathrm{Sin}[8\varphi])) \Big/ \left(4436033817600\sqrt{\pi}\right);$$

$$T_5(\varphi) = \big((-19516751322 - 14931856260\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 7004847438\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + 7958644128\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 4427092328\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - 3541516336\,\mathrm{Cos}[10\varphi] - 923800221\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 180334614\,\mathrm{Cos}[14\varphi] + 36037442\,\mathrm{Cos}[16\varphi] + 5373438\,\mathrm{Cos}[18\varphi] + 420175\,\mathrm{Cos}[20\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^3\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^6\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\big) \Big/ 232519148583321600,$$

$$\lambda_5 = 0,$$

$$\psi_5(\varphi) = (1480214736\,\mathrm{Sin}[\varphi] - 503201556\,\mathrm{Sin}[3\varphi] + 7(33538804\,\mathrm{Sin}[5\varphi] - 14189175\,\mathrm{Sin}[7\varphi] + 1750329\,\mathrm{Sin}[9\varphi])) \Big/ \left(7266223393228800\sqrt{\pi}\right);$$

$$T_6(\varphi) = \big((-623442246354704 - 677741450418920\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 91994128612288\,\mathrm{Cos}[4\varphi] - 13308647859709\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 41930340903688\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - 24819091467565\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 13261067738208\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + 709024832962\,\mathrm{Cos}[14\varphi] - 1536544451184\,\mathrm{Cos}[16\varphi] - 876687701118\,\mathrm{Cos}[18\varphi] + 60103796704\,\mathrm{Cos}[20\varphi] + 13267540125\,\mathrm{Cos}[22\varphi] + 1945712776\,\mathrm{Cos}[24\varphi] + 150775597\,\mathrm{Cos}[26\varphi])\,\mathrm{Sec}[\varphi]^6\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^7\,\mathrm{Tan}[\varphi]\big) \Big/ 1031268927796747960320000,$$

$$\lambda_6 = \frac{2707}{873344157840},$$

$$\psi_6(\varphi) = (-220069149300\,\mathrm{Sin}[2\varphi] - 49915387600\,\mathrm{Sin}[4\varphi] + 1617(3225157\,\mathrm{Sin}[6\varphi] - 3677940\,\mathrm{Sin}[8\varphi] + 416745\,\mathrm{Sin}[10\varphi])) \Big/ \left(67139904153434112000\sqrt{\pi}\right);$$

$$
\begin{aligned}
T_7(\varphi) = \Big(\big(&-434125292447748 - \\
&3088500343817792\,\mathrm{Cos}[2\varphi] + 143976851017271\,\mathrm{Cos}[4\varphi] + \\
&72487094593496\,\mathrm{Cos}[6\varphi] - 258118794095866\,\mathrm{Cos}[8\varphi] - \\
&126955762470280\,\mathrm{Cos}[10\varphi] + 2644606062237\,\mathrm{Cos}[12\varphi] + \\
&25734185780400\,\mathrm{Cos}[14\varphi] - 6560069802396\,\mathrm{Cos}[16\varphi] - \\
&4484166383568\,\mathrm{Cos}[18\varphi] - 908762172617\,\mathrm{Cos}[20\varphi] + \\
&118736935240\,\mathrm{Cos}[22\varphi] + 19031502490\,\mathrm{Cos}[24\varphi] + \\
&2126959464\,\mathrm{Cos}[26\varphi] + 124825589\,\mathrm{Cos}[28\varphi]\big) \\
&\mathrm{Sec}[\varphi]^5\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^8\,\mathrm{Tan}[\varphi]^3\Big) \Big/ \\
&6496994245119512150016000 \quad ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda_7 = 0 \ ,$$

$$
\begin{aligned}
T_8(\varphi) = -\Big(&\mathrm{Csc}[\varphi]^2\,\mathrm{Sec}[\varphi]^9\,\mathrm{Sec}[2\varphi]^9\,\big(16101414894082662144 0\,\varphi\,\mathrm{Cos}[\varphi] + \\
&145124594769034520640\,\varphi\,\mathrm{Cos}[3\varphi] + \\
&117582700871261545920\,\varphi\,\mathrm{Cos}[5\varphi] + \\
&85349605265626141440\,\varphi\,\mathrm{Cos}[7\varphi] + \\
&55083787795545949440\,\varphi\,\mathrm{Cos}[9\varphi] + \\
&31249456537857798240\,\varphi\,\mathrm{Cos}[11\varphi] + \\
&15359902366065697440\,\varphi\,\mathrm{Cos}[13\varphi] + \\
&6355821668716840320\,\varphi\,\mathrm{Cos}[15\varphi] + \\
&2118607222905613440\,\varphi\,\mathrm{Cos}[17\varphi] + \\
&529651805726403360\,\varphi\,\mathrm{Cos}[19\varphi] + \\
&75664543675200480\,\varphi\,\mathrm{Cos}[21\varphi] - \\
&21703674943640555 28\,\mathrm{Sin}[\varphi] + \\
&42912245598659178828\,\mathrm{Sin}[3\varphi] - \\
&69063498874183739820\,\mathrm{Sin}[5\varphi] - \\
&10954162147663554216\,\mathrm{Sin}[7\varphi] - \\
&9062767807064242328\,\mathrm{Sin}[9\varphi] + \\
&4511152725925397922\,\mathrm{Sin}[11\varphi] - \\
&20637518320059660306\,\mathrm{Sin}[13\varphi] - \\
&667733267027810736\,\mathrm{Sin}[15\varphi] - \\
&259762117732615984\,\mathrm{Sin}[17\varphi] + \\
&302594312227189262\,\mathrm{Sin}[19\varphi] - \\
&93084931948708851 0\,\mathrm{Sin}[21\varphi] + \\
&15349642241750282 4\,\mathrm{Sin}[23\varphi] + \\
&24623442319090776\,\mathrm{Sin}[25\varphi] + \\
&547745661293481\,\mathrm{Sin}[27\varphi] - \\
&4132825694490465\,\mathrm{Sin}[29\varphi] + \\
&153558985823460\,\mathrm{Sin}[31\varphi] + 28543553784396\,\mathrm{Sin}[33\varphi] + \\
&3784119260467\,\mathrm{Sin}[35\varphi] + 266685459061\,\mathrm{Sin}[37\varphi]\big)\Big) \Big/ \\
&134122909677167989702986301440000 \quad ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda_8 = -\frac{52492329667}{354949423356616704000} \ .$$