荷電粒子の対数微分法にもとづく非定常量子系の流体力学的記述～非相対論的系から相対論的系まで

新谷　明雲
山口県立大学 共通教育機構

A Fluid Mechanical Description of Non-Stationary System based on the Logarithmic Derivative Method ～From Non-Relativistic to Relativistic

Meiun　SHINTANI
The General Education Division of Yamaguchi Prefectural University

Abstract

For charged particles, we propose fluid mechanical descriptions for both of the time-dependent Schrödinger Equation and Dirac Equation based on the logarithmic derivative method of wave functions.

Key Words: fluid mechanical description of Quantum Mechanics, time-dependent Schrödinger Equation, logarithmic derivative, Dirac equation
キーワード：量子力学の流体力学的記述、非定常シュレーシンガー方程式、対数微分法、ディラック方程式

§１．はじめに

我々はこれまで対数微分法を用い定常量子系の散乱問題や固有問題を扱うことが可能であることを示してきた[1][2][3]。我々の取り組む次の課題は非定常な量子系に対し、対数微分法ないしはその拡張したものを用い物理量を計算可能とすることであった。

2010年の本紀要において、我々はこの課題に対し１つの方策を提案した[4]。空間一次元の非定常シュレーディンガー方程式から、対数微分法にもとづき、ニュートンの運動方程式に類似した非定常偏微分方程式を求め、その具体的応用例を取り扱った。

本論文では、3次元空間の中で荷電粒子が電磁場と相互作用をする方程式を、非相対論的な場合（§2）と相対論的な場合（§4）について、それぞれの基本方程式を導くことに主眼を置いた。§2では2つの速度場が出現しそれらの時間反転および空間反転についての変換性を求めた。§3では、非相対論的な場合について、2つの速度場の物理的意味を探るために、運動量期待値およびエネルギー期待値においてどのように出現するかを見ることとした。

§２．基本方程式の導出～非相対論

ここでは、空間3次元の一体の非定常シュレーディンガー方程式から出発する。ハミルトニアン演算子を以下のようにとる。

$$\hat{H}= \frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\mathbb{x},t) \quad , \quad (\hat{\mathrm{p}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla,\ \nabla\text{: ナブラ記号}). \tag{2-1}$$

荷電粒子が電磁場中で従う方程式は、空間と時間に関する微分記号を共変微分に置き換える (minimal coupling) 処方、

$$\nabla \rightarrow \left(\nabla - \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}}{\hbar \mathrm{c}}\mathbb{A}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\mathrm{e}}{\hbar}\mathrm{A}_0\right) \tag{2-2}$$

により得られる。すなわち、この微分作用素の置換に伴い対数微分関数 $\mathbb{T}(\mathbb{x},t)$ は、

$$\mathbb{T}(\mathbb{x},t) = -\frac{\hbar}{i}\nabla \ell n \psi(\mathbb{x},t) \quad ,$$

から

$$\mathbb{T}(\mathbb{x},t) = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\mathbb{A}(\mathbb{x},t) - \frac{\hbar}{i}\nabla \ell n \psi(\mathbb{x},t) \tag{2-3}$$

として再定義される。ここで再定義されたベクトル量 $\mathbb{T}(\mathbb{x},t)$ は、局所ゲージ変換の下に不変であるように決められた。この量を用い、シュレーディンガー方程式を書きなおすと、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left\{\frac{i}{\hbar}\nabla\cdot\mathbb{T}(\mathbb{x},t) + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\mathbb{T}^2(\mathbb{x},t)\right\} + V(\mathbb{x},\mathrm{t}) + \mathrm{eA}_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ell n\psi(\mathbb{x},t) \tag{2-4}$$

となる。この方程式は関数 $\mathbb{T}(\mathbb{x},t)$ について閉じた形をしていない。そこで再度 $\mathbb{x}$ で微分することにより、$\mathbb{T}(\mathbb{x},t)$ について閉じた非線形偏微分方程式、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}(\mathbb{x},t) = &- grad\, V(\mathbb{x},t) + i\hbar\frac{1}{2m}\, grad\left(\mathrm{div}\,\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\right) \\ &- \frac{1}{m} grad\left(\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\cdot\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\right) + \mathrm{e}\left(-\mathrm{gradA}_0(\mathbb{x},t) - \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}(\mathbb{x},t)\right)\end{aligned} \tag{2-5}$$

を得る。次の公式、

$$grad\,(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\cdot grad\,)\mathbb{B} + (\mathbb{B}\cdot grad\,)\mathbb{A} + \mathbb{A}\times\mathrm{rot}\mathbb{B} + \mathbb{B}\times\mathrm{rot}\mathbb{A} \ ,$$
$$grad\,(\mathrm{div}\mathbb{A}) = \Delta\mathbb{A} + \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbb{A}) \quad ,$$

および、電場 $\mathbb{E}(\mathbb{x},t)$、磁場 $\mathbb{H}(\mathbb{x},t)$ の定義式、

$$\mathbb{E}(\mathbb{x},t) = -\mathrm{gradA}_0(\mathbb{x},t) - \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}(\mathbb{x},t), \qquad \mathbb{H}(\mathbb{x},t) = \mathrm{rot}\,\mathbb{A}(\mathbb{x},t) \tag{2-6}$$

を用いて（2-5）を書き直すと、局所ゲージ変換不変な方程式、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}(\mathbb{x},t) + \frac{1}{m}(\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\cdot grad)\mathbb{T}(\mathbb{x},t) + \frac{1}{m}\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\times\left(rot\,\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\right) \\ &\quad = -gradV(\mathbb{x},t) + \mathrm{e}\mathbb{E}(\mathbb{x},t) + \frac{i\hbar}{2m}\left\{\Delta\mathbb{T}(\mathbb{x},t) + \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\right)\right\}\end{aligned} \tag{2-7}$$

に達する。さらに、以下で定義する複素速度ベクトル場 $\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)$ とその回転 (rot) 量である渦心、および速度ベクトル場に沿った微分 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}$（ラグランジュ微分ないしは物質微分）、

$$\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t) = \frac{1}{m}\mathbb{T}(\mathbb{x},t), \tag{2-8}$$

$$\mathrm{rot}\left(\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)\right) = -\frac{e}{c}\mathbb{H}(\mathbb{x},t) \ , \tag{2-9}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \left(\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)\cdot grad\right), \tag{2-10}$$

を用いて、方程式（2-7）を書き換えると、

$$m\frac{D}{Dt}\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t) =- \, gradV(\mathbb{x},t) + \{\ \frac{e}{c}\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)\times\mathbb{H}(\mathbb{x},t)\ +\ \mathrm{e}\mathbb{E}(\mathbb{x},t)\ \}$$

$$+\ \frac{i\hbar}{2}\left\{\Delta\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\mathrm{rot}\mathbb{H}(\mathbb{x},t)\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

に到達する。この方程式（2-11）は古典的なニュートンの運動方程式と酷似している。左辺は流線に沿った質量 m の粒子の運動量変化を表し、右辺第１項は外場 $V(\mathbb{x},t)$ 中の粒子におよぼす力を表し、第2項は電磁場中の荷電粒子にかかるローレンツ力を表している。この速度場 $\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)$ に関する方程式は本質的に非線形偏微分方程式である。なぜならば左辺の微分は通常の微分ではなく、非線形項（移流項）$\left(\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)\cdot grad\right)\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)$ を含むからである。右辺第3項は $\Delta\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)$ に比例し、純虚数の粘性係数 $(\frac{i\hbar}{2m})$ を持つ粘性項とみなしうる。第3項は $\hbar$ に依存するので総じて量子力学的ポテンシャルとみなしうる。方程式（2-11）はニュートン方程式と言うより、非線形項、粘性項を含む流体力学のナヴィエ・ストークス方程式に対応するモノと考えられる。

≪二つの速度ベクトル場の従う方程式≫

次に速度場の実数部、虚数部の役割について考えたい。以下のように $\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t)$ を実部 $\mathbb{v}(\mathbb{x},t)$ と虚部 $\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ に分解する。

$$\widetilde{\mathbb{V}}(\mathbb{x},t) = \mathbb{v}(\mathbb{x},t) + i\ \mathbb{u}(\mathbb{x},t)\ \ . \qquad (2\text{-}12)$$

具体的に波動関数とベクトルポテンシャルを用い、

$$\mathbb{v}(\mathbb{x},t) =\ \frac{1}{2\mathrm{m}}\left(\mathbb{T}(\mathbb{x},t) + \mathbb{T}^{\star}(\mathbb{x},t)\right)\ = \frac{1}{2\mathrm{m}}\left(-\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\ \mathbb{A}(\mathbb{x},t) + \frac{\hbar}{i}\ \nabla\ell n\frac{\psi(\mathbb{x},t)}{\psi^{\star}(\mathbb{x},t)}\right)\ , \qquad (2\text{-}13a)$$

$$\mathbb{u}(\mathbb{x},t) =\ \frac{1}{2\mathrm{m}\ i}\left(\mathbb{T}(\mathbb{x},t) - \mathbb{T}^{\star}(\mathbb{x},t)\right) = \frac{-\hbar}{2\mathrm{m}}\ \nabla\left(\ell n\rho(\mathbb{x},t)\right), \qquad (2\text{-}13b)$$

と書ける。ここで、

$$\rho(\mathbb{x},t) =\ \psi(\mathbb{x},t)\psi^{\star}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}14)$$

は確率密度を表す。またシュレーディンガー方程式から、確率保存を表す連続の方程式が得られる。すなわち、

$$0 =\ \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbb{x},t) + \nabla\left(\rho(\mathbb{x},t)\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\right) =\ \frac{D}{Dt}\rho(\mathbb{x},t) + \rho(\mathbb{x},t)\ \mathrm{div}\left(\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\right) \qquad (2\text{-}15)$$

が成り立つ。一般に、$\mathrm{div}\left(\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\right) \neq 0$ であるため流体は圧縮性で、流れに沿って確率密度は一定に保たれない。ちなみに自由場の中の波束の運動[4]では、波束の中心付近の密度は時間とともに小さくなってゆく。$\mathrm{div}\left(\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\right)$ は、

$$\mathrm{div}\left(\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\right) = \frac{\hbar^2\mathrm{t}}{a^4\mathrm{m}^2+(\hbar\mathrm{t})^2}\ \rightarrow\ 0\,,\quad (\mathrm{t}\rightarrow\infty) \qquad (2\text{-}16)$$

となる。

運動方程式を求めるために、（2-13）を（2-11）に代入しそれぞれの方程式を求めると、

$$m\frac{D}{Dt}\mathbb{v}(\mathbb{x},t) = m(\mathbb{u}(\mathbb{x},t)\cdot grad)\mathbb{u}(\mathbb{x},t) -\ gradV(\mathbb{x},t) + \left\{\ \frac{e}{c}\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\times\mathbb{H}(\mathbb{x},t)\ +\right.$$

$$\left.+\ \mathrm{e}\mathbb{E}(\mathbb{x},t)\right\} - \frac{\hbar}{2}\ \Delta\mathbb{u}(\mathbb{x},t), \qquad (2\text{-}17)$$

$$m\frac{D}{Dt}\mathbb{u}(\mathbb{x},t) = -m(\mathbb{u}(\mathbb{x},t)\cdot grad)\mathbb{v}(\mathbb{x},t) + \frac{e}{c}\mathbb{u}(\mathbb{x},t)\times\mathbb{H}(\mathbb{x},t)$$

$$-\frac{\mathrm{e}\hbar}{2\mathrm{mc}}\mathrm{rot}\mathbb{H}(\mathbb{x},t) + \frac{\hbar}{2}\Delta\mathbb{v}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}18)$$

となる。渦度 (vortex) は速度場の回転 (rot) であたえられる。波動関数の 1 価性 ($\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,)\equiv 0$) を用い、

$$\mathrm{rot}\big(\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\big) = \frac{\hbar}{\mathrm{mc}}\,\mathbb{H}(\mathbb{x},t)\ ,\ \mathrm{rot}\big(\mathbb{u}(\mathbb{x},t)\big) = 0\,, \qquad (2\text{-}19)$$

となり、$\mathbb{v}$ の過度は磁場 $\mathbb{H}$ に比例し、$\mathbb{u}$ の過度はゼロである。

この第1式を時間微分し、(2-17) を用いるとMaxwell方程式の一つ、

$$\mathrm{rot}\big(\mathbb{E}(\mathbb{x},t)\big) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{H}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}20)$$

がえられる。しかし、この方程式は式 (2-6) からも得られるので、理論の無矛盾性をチェックをしたにすぎない。また (2-19) 式の発散をとることにより、

$$\mathrm{div}\big(\mathbb{H}(\mathbb{x},t)\big) = 0\,, \qquad (2\text{-}21)$$

がえられる。

≪運動方程式の時間反転および空間反転対称性≫

＜時間反転＞　シュレーディンガー方程式は、時間反転 ($\mathrm{t}\longrightarrow -\mathrm{t}$) のもとで波動関数、ベクターポテンシャルおよび外場が、

$$\psi(\mathbb{x},t) \longrightarrow \psi(\mathbb{x},-t) = \psi^*(\mathbb{x},t)\,, \qquad (2\text{-}22)$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{x},-t) = -\mathbb{A}(\mathbb{x},t)\,, \qquad (2\text{-}23)$$

$$\mathrm{A}_0(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathrm{A}_0(\mathbb{x},-t) = \mathrm{A}_0(\mathbb{x},t), \qquad (2\text{-}24)$$

$$\mathrm{V}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathrm{V}(\mathbb{x},-t) = \mathrm{V}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}25)$$

と変換するとき、方程式は不変となる。2つの速度ベクトル $\mathbb{v}(\mathbb{x},t)$ と $\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ は、定義式 (2-13) より、次のように変換する。

$$\mathbb{v}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{v}(\mathbb{x},-t) = -\mathbb{v}(\mathbb{x},t)\,, \qquad (2\text{-}25)$$

$$\mathbb{u}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{u}(\mathbb{x},-t) = \mathbb{u}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}26)$$

このとき、方程式 (2-17) と (2-18) は時間反転不変であることが容易に確認できる。注意すべきは速度ベクトル $\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ が、$\mathbb{v}(\mathbb{x},t)$ とは異なる変換性を示す点である。$\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ の物理的解釈のためにも空間反転の変換性も求めておきたい。

＜空間反転＞　空間反転のもとでの波動関数の変換性を以下のようにして求める。ローレンツ力のあるNewton方程式の空間反転性から $\mathbb{E}(\mathbb{x},t)$ および $\mathbb{H}(\mathbb{x},t)$ の変換性が求められる。すなわち、

$$\mathbb{E}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{E}(-\mathbb{x},t) = -\mathbb{E}(\mathbb{x},t)\,, \qquad (2\text{-}27a)$$

$$\mathbb{H}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{H}(-\mathbb{x},t) = \mathbb{H}(\mathbb{x},t) \qquad (2\text{-}27b)$$

したがって、

$$\mathbb{A}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{x},-t) = -\,\mathbb{A}(\mathbb{x},t)\,, \tag{2-28}$$

$$\mathrm{A}_0(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathrm{A}_0(\mathbb{x},-t) = \mathrm{A}_0(\mathbb{x},t) \tag{2-29}$$

が求められる。ベクトルポテンシャルの変換性から、

$$\mathbb{v}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{v}(\mathbb{x},-t) = -\,\mathbb{v}(\mathbb{x},t) \tag{2-30}$$

となる。これと運動方程式（2-17）と（2-18）の不変性から、

$$\mathbb{u}(\mathbb{x},t) \longrightarrow \mathbb{u}(\mathbb{x},-t) = -\,\mathbb{u}(\mathbb{x},t) \tag{2-31}$$

が求まる。2つの速度ベクトルは全く同じ変換性を示すことがわかる。
　次に波動関数の変換性は定義式（2-13）式から、

$$\psi(\mathbb{x},t) \longrightarrow \psi(-\mathbb{x},t) = \psi(\mathbb{x},t) \tag{2-32}$$

として求められる。

§３．運動量とエネルギー期待値の表現　～　2つの速度ベクトルの役割

　本節では、運動量とエネルギー期待値を２つの速度ベクトルを用いて表現したい。

≪運動量期待値 $<\mathbb{P}>$ ≫ 運動量期待値は以下の条件 (reality condition) を満たさねばならない。すなわち、

$$<\mathbb{P}>= \langle\psi|\mathbb{P}\psi\rangle = \langle\mathbb{P}\psi|\psi\rangle. \tag{3-1}$$

（3-1）は $\mathbb{P}$ のエルミート性で、期待値の実数性を保証する。第2の等式から、

$$<\mathbb{P}>=\int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\mathbb{T}(\mathbb{x},t)$$

がえられ、第3の等式から、

$$<\mathbb{P}>=\int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\mathbb{T}^*(\mathbb{x},t)$$

となり、この両式より、

$$<\mathbb{P}>=\int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\mathbb{v}(\mathbb{x},t), \tag{3-2}$$

$$\int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\mathbb{u}(\mathbb{x},t) = 0\,. \tag{3-3}$$

運動量の荷い手は速度ベクトル $\mathbb{v}(\mathbb{x},t)$ であり、$\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ でないことがわかる。

≪エネルギー期待値 $<\widetilde{\mathrm{H}}>$ ≫　エネルギー期待値についても運動量と同様の議論が成り立ち、

$$\mathrm{E} = <\widetilde{\mathrm{H}}>= \langle\psi|\widetilde{\mathrm{H}}\psi\rangle = \langle\widetilde{\mathrm{H}}\psi|\psi\rangle \quad \text{(reality condition)} \tag{3-4}$$

より、

$$\mathrm{E} = \int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\ell n\frac{\psi(\mathbb{x},t)}{\psi^*(\mathbb{x},t)} = \int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\mathbb{T}(\mathbb{x},t)\mathbb{T}^*(\mathbb{x},t) + V(\mathbb{x},\mathrm{t}) + \mathrm{eA}_0\right\}$$

$$= \int d^3\mathbb{x}\,\rho\,(\mathbb{x},t)\left\{\frac{\mathrm{m}}{2}\mathbb{u}(\mathbb{x},t)^2 + \frac{\mathrm{m}}{2}\mathbb{v}(\mathbb{x},t)^2 + V(\mathbb{x},\mathrm{t}) + \mathrm{eA}_0(\mathbb{x},\mathrm{t})\right\} \tag{3-5}$$

をうる。ここで注目すべき点がある。運動量期待値には貢献しなかった速度ベクトル $\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ が運動エネルギーの形でエネルギーに寄与している点である。どうしてこのようなことが可能なのか、疑問が残る。

§４．ディラック方程式の流体力学的記述

電子はスピン1/2をもつ荷電粒子であり、粒子の速度が光速に近づくにつれシュレーディンガー方程式での記述には限界が生じた。その相対論化が1932年ディラックによってなされた。その相対論的方程式はディラック方程式と呼ばれている。ディラックは波動関数としてエネルギーの±とスピンの↑↓を記述するために4成分のスピノールΨと呼ばれる量を導入した。本節では自然単位系 $(\hbar = \mathrm{c} = 1)$を採用し、4次元計量を $\mathrm{g}^{00} = -\mathrm{g}^{11} = -\mathrm{g}^{22} = -\mathrm{g}^{33} = 1$ ととる。Dirac方程式は、

$$\left(-i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} + \mathrm{m} - \mathrm{e}\gamma^{\mu}\mathrm{A}_{\mu}\right)\Psi = 0 \tag{4-1}$$

であり、成分であらわすと、

$$(i\,\gamma_{\mathrm{k}}\,\partial_{\mathrm{k}} - i\,\gamma_0\,\partial_0 + \mathrm{m} + \mathrm{e}\gamma_{\mathrm{k}}\mathrm{A}_{\mathrm{k}} - \mathrm{e}\gamma_0\mathrm{A}_0)\Psi = 0 \tag{4-2}$$

となる。対数微分は、Ψが4成分の列表示なので§2の（2-3）式はそのまま使えず、それを拡張した次の局所ゲージ変換不変な表式、

$$T_k(\mathbb{x},t)\Psi(\mathbb{x},t) = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\mathrm{A}_k(\mathbb{x},t)\Psi(\mathbb{x},t) - \frac{\hbar}{i}\partial_{\mathrm{k}}\Psi(\mathbb{x},t) \quad (\mathrm{i} = 1,2,3) \tag{4-3}$$

を導入する。式（4-3）を（4-2）に代入しΨの空間微分をあらわに出てこないようにすると、

$$-\gamma_{\mathrm{k}}\mathrm{T}_{\mathrm{k}}\Psi - i\,\mathrm{i}\gamma_0(\partial_0 - i\,\mathrm{eA}_0)\Psi + \mathrm{m}\Psi = 0 \tag{4-4}$$

となるが、なおΨの時間微分があるのでこれを除くために、x_ℓ で微分し、$\Psi(\mathbb{x},t)$ の空間部分を式（4-3）で再度取り除けば、つぎの方程式、

$$[\mathrm{M}_\ell]_{\mathrm{ij}}\Psi_{\mathrm{j}} = 0,\ (\ell = 1,2,3\,) \tag{4-5}$$

に到達する。ここで M_ℓ は以下の4行4列の正方行列である。

$$\mathrm{M}_\ell = -\gamma_{\mathrm{k}}\,\partial_\ell T_k + \gamma_0\,\partial_0 T_\ell + \mathrm{e}\gamma_0(\partial_0\mathrm{A}_\ell - \partial_\ell\mathrm{A}_0)\,. \tag{4-6}$$

方程式（3-5）が非自明な解をもつ必要十分条件は、

$$\det[\mathrm{M}_\ell] = 0,\ (\ell = 1,2,3\,) \tag{4-7}$$

である。式（4-6）の第3項は荷電粒子の電場 E_ℓ による力を表す。方程式（4-7）を解くことにより $T_k(\mathbb{x},t)$ が求まり、最終的に式（4-3）から $\Psi(\mathbb{x},t)$ が求まることになる。この方程式の具体的系への適用は別稿としたい。

§５．議論と展望

本論文では、電子を例とした荷電粒子に対する非定常シュレーディンガー方程式及び相対論的なディラック方程式の対数微分法に基づく定式化を行った。非相対論的取扱いについては、前稿[4]における定式化の3次元版であり、電磁場が入った場合の流体力学的記述を行った。この定式化はNelson による確率微分形式[5]によるものと微細な点を除きほぼ一致した。若干の相違点について今後に研究に委ねられる。相対論的な場合への拡張については本稿が初の試みと思われる。

非相対論的な場合に2つの速度場が現れ、その物理的解釈が今後重要となる。特に $\mathbb{u}(\mathbb{x},t)$ 場（osmotic velocityと呼ばれている）は確率の流れには関与せず、運動量のはこび手でもないが、エネルギー値には寄与

し、時間反転で変化しないという、ミステリアスな存在様式を呈している。

摂動論を方程式（2-17）と（2-18）に基づき展開するのは興味深い問題である。その際、流体力学で開発された手法が有効であると思われる。また、1次元の問題ではあるが、論文[4]でみたように、コヒーレント解に周期的摂動が加わることにより系全体がどのように振る舞うかを見ることは興味深い。ブランコを背後から周期的に揺らすことによる自励振動のようなものがあるか否かであり、このことは応用面でも興味深い問題である。

References

[1]M. Shintani, Bulletin of Yamaguchi Prefectural University, Faculty of Human Life Sciences（山口県立大学生活科学部研究報告）, vol.26(2000)39-42.

[2]M. Shintani , Bulletin of Yamaguchi Prefectural University, Faculty of Human Life Sciences（山口県立大学生活科学部研究報告）, vol.27(2001)39-42.

[3] M. Shintani, Bulletin of Yamaguchi Prefectural University, Faculty of Human Life Sciences（山口県立大学生活科学部研究報告）, vol.30(2004)29-45.

[4] M. Shintani, Bulletin of the General Education Division of Yamaguchi Prefectural University,（山口県立大学学術情報第3号 [共通教育機構紀要　創刊号]）,vol.1(2010)57-60.

[5]E. Nelson, Phys. Rev. vol.150(1966)1076-1085, “Dynamical Theories of Brownian Motions”（Princeton University Press, 1967）, and ”Quantum Fluctuation”(Princeton University Press, 1985)