神経衰弱における最適戦略の探索

荒川 正幹*

Exploration of optimal strategy for Memory

Masamoto Arakawa

Abstract: Memory is a popular card game playing with two or more players. Each player alternately faces up two cards. The player could get the cards if their numbers are match. Although Memory has been frequently playing in the world for a long time, the optimal strategy of the game has not been developed so far. In this study, I have developed the optimal strategy for 2-player Memory. Expected values of wining rate for 362,931 cases were calculated using memoized recursion. As a result of the calculation, the optimal strategy for 2-player Memory have been obtained successfully.

Key words: Memory, card game, optimal strategy, memoized recursion

1. はじめに

神経衰弱は2人以上で行うトランプゲームである。ジョーカーを除いた52枚のカードを、裏向きにして場に置いた状態からゲームを開始する。プレイヤーは裏向きのカードを2枚引き、それらの数字が一致すればそのカードを獲得し、もう一度プレイすることができる。数字が異なる場合は、カードを元の位置に戻し、相手の手番となる。場のカードが無くなるまでこれを繰り返し、取ったカードの枚数が一番多いプレイヤーが勝者となる。なお本稿では、一度もめくられていないカードを未知カード、一度めくられて数字が判明しているカードを既知カードと呼ぶ。

神経衰弱は、日本を含め世界中で長い間プレイされているゲームであるが、最適な戦略はこれまで知られていない。多くのプレイヤーが採用する通常の戦略は以下の通りである。まず、数字が同じ2枚の既知カードがある場合、それらをめくり獲得する。無い場合は未知カードを1枚めくる。そして、そのカードと同じ数字の既知カードがあれば、それをめくり獲得する。そうでない場合、未知カードをもう1枚めくる。1枚目にめくったカードと偶然数字が一致すれば獲得でき、そうでなければ手番が次の人に移る。ほぼ全てのプレイヤーがこのような戦略をとっていると考えられるが、必ずしもこの戦略が最適であるとは限らない。

神経衰弱の最適戦略について、これまでいくつかの研究が行われている[1-5]。

Zwick と Paterson[1]は2人で行う神経衰弱について、獲得することができるカード枚数の期待値を最大化する戦略を求めた。ただし、単純のため各数字のカードは通常の4枚ではなく2枚とした。また、プレイヤーの記憶は完全であると仮定し、1度めくられたカードの数字を忘れることは考慮していない。獲得枚数の期待値は、漸化式を解くことによって求めることが可能である。代数的な計算によって様々な局面の期待値を求め、通常戦略が必ずしも最適でないことを示した。また、どのような局面において特殊な戦略を採用するべきか示した。

篠田[5]は Zwick らの研究を拡張し、勝率の期待値を最大化するための戦略を求めた。獲得枚数の最大化と、勝率の最大化は類似しているが同じではない。通常の神経衰弱においては、獲得枚数の差を定量的に評価することは少なく、相手より1枚でも多く取れば勝利となる。よって、神経衰弱の最適戦略を考える上では勝率を最大化する方が現実に即している。獲得枚数を議論する際には、その局面以降を考慮すれば十分であるが、勝率の期待値を求めるためには、その時点までに各プレイヤーが獲得したカードの枚数を加味する必要がある。

篠田は、Zwick らと同様の手法を用いて解析を行い、状況によっては「0-戦略」や「1-戦略」が有効であることを示した。「0-戦略」は、数字の異なる2枚の既知カードをめくり、相手に手番を渡す戦略である。「1-戦略」は、1枚目にめくった未知カードと同じ数字の既知カードがない場合、未知カードをめくるのではなく、別の数字の既知カードをめくり相手に手番を渡す戦略である。

勝率を議論する際、引き分けの扱いには注意が必要である。篠田は、勝ったときに得られるポイントを 1、引き分けのときを 1/2 とする取得ポイントを定義し、その最大化を行った。本稿においても同様の考え方を採用し、相手よりも多くのカードを取る確率と、同じ枚数である確率の半分を足した値を単に勝率と呼ぶ。

2022年1月20日受理
* 宇部工業高等専門学校

Zwickらや篠田によって、各数字が2枚の場合についての解析は行われているものの、必ずしも全ての局面について最適戦略が判明したわけではない。また、通常の神経衰弱では各数字のカードは 4 枚であるが、その場合の最適戦略を解析した研究はこれまで知られていない。

本研究の目的は、各数字のカードが 4 枚の場合について、神経衰弱の最適戦略を求めることである。これにより、実際の神経衰弱における戦略について有益な知見が得られると期待される。プレイヤーは 2 人とし、各プレイヤーの記憶は完全であると仮定した。

2. 手法

2.1. 勝率の期待値の計算

先行研究においては、局面の遷移を表現する漸化式を代数的に解くことによって最適戦略を議論しているが、本研究ではゲーム木を用いて解析を行った。各ノードは局面を表し、ルートノードは初期局面、リーフノードはすべてのカードが獲得された局面に対応する。

図 1 に本研究における最適戦略の求め方の概要を示す。ある局面における最適戦略を求めるためには、まず、その局面からカードを 2 枚めくった局面をすべて列挙する。そして、各局面の勝率の期待値を再帰的に計算し、それが最大となる戦略を求める。

神経衰弱では手番のプレイヤーが 2 枚のカードを引くため、2 手を一組として木を生成する。1 枚目について、プレイヤーの選択肢は、既知カードをめくるか、未知カードをめくるかである。既知カードについては、事前に数字が分かっているため選択可能である。一方で未知カードについては数字が未知であるため、場に残っている未知カードの枚数をもとに各確率を計算し期待値を求める必要がある。2 枚目については、1 枚目で生成した各局面について、同様の展開を行う。ただし、既知カードをめくる場合は、1 枚目に引いたカードと数字が同じかどうかのみが問題であるため、2 パターンのみを考慮すれば十分である。

ゲーム木の展開がすべて終了した後、期待値が最大となる選択肢を求めることで、この局面における最適戦略が得られる。

相手番の局面における勝率は、先行研究と同様に、相手の勝率を1から引くことで求める。引き分け確率の半分を勝率に加えているため、自分の勝率と相手の勝率の和は常に 1 である。パスの取り扱いについても先行研究と同様とした。互いにパスを繰り返した場合、ゲームは無限に続く。そこで、両プレイヤーが連続してパスをした場合には、その時点までの獲得枚数で勝敗を決定する。

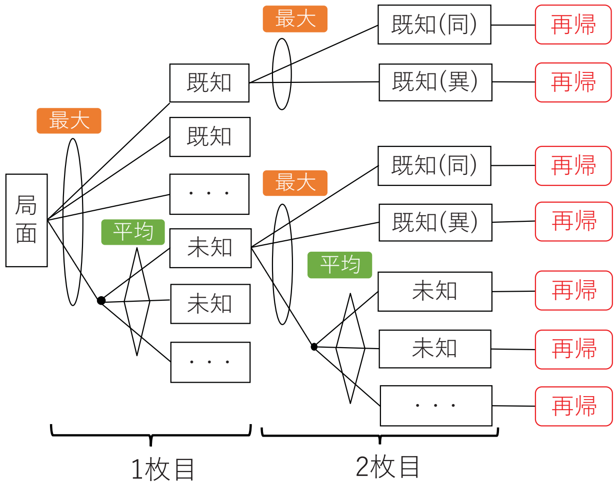

図 1　最適戦略の求め方の概要

2.2. 局面の表現

本研究においては神経衰弱における各局面を、「カード状態」、「獲得ペア数の差」、「直前のパスの有無」によって表現した。以下、順に説明する。

「カード状態」は、局面におけるカードの状態を表す。神経衰弱のシミュレーションを行うために必要なカードの情報は、各カードが未知であるか、既知であるかである。ただし、52 枚のカードについてこの情報を素朴に扱った場合、組み合わせの数は$2^{52} \fallingdotseq 4.5 \times 10^{15}$となり、列挙は困難である。

そこで各数字に着目し、以下のように考える。表 1 に、各数字のカードが取りうる状態のパターンを、エースを例にして示す。背景が白色のカードは既知カードを、灰色のカードは未知カードを表す。神経衰弱においては 2 枚ずつカードを取るため、各数字のカードの枚数は、4 枚、2 枚、0 枚のいずれかである。その中で任意の数のカードが未知カード、残りが既知カードとなるため、図に示す 9 パターンのみが考えられる。

A から K までの 13 種類の数字について、図のパターンのいずれの状態にあるかが分かれば十分である。また、神経衰弱においては数字の大小はゲームに影響しない。よって、確率を計算するためには、図の各パターンの状態にある数字が何種類であるかが分かれば十分である。このような表現を用いた際の場合の数は 203,490 通りであり、網羅的に取り扱うことが可能である。

「獲得ペア数の差」は、その局面に至るまでに互いが獲得したペア数の差を表す。手番側のプレイヤーの方が多く獲得している場合にプラス、少ない場合にマイナスとした。例えば獲得ペア数の差がマイナス2である場合、相手の方が 2 ペア多く獲得していることを意味する。トランプには 26 のペアが存在するため、14 ペア以上の差が付いた場合にはそこで勝敗が決する。よって、獲得ペア数の差はマイナス 13 からプラス 13 の値のみをとる。

「直前のパスの有無」は、一手前の相手の戦略がパスであったかどうかを表す。連続してパスが行われた場合にはその時点で終了となるため、その判定に必要である。

表 1　各数字のカードの状態のパターン

未知枚数	既知枚数	カードの状態（灰色：未知カード、白色：既知カード）
4	0	A A A A
3	1	A A A A
2	2	A A A A
1	3	A A A A
0	4	A A A A
2	0	A A
1	1	A A
0	2	A A
0	0	

2.3.　計算の効率化

最適戦略を効率的に求めるため、いくつかの工夫を行った。そのひとつは再帰計算におけるメモ化である。神経衰弱のゲーム木の探索においては、同一の局面が複数回出現する。そのため、一度出現した局面については、局面をキーとして勝率の期待値とその局面における最適戦略を保存し再利用することで高速化が可能である。

もうひとつの効率化は枝刈りである。木の展開において、明らかに無駄な枝を省略することで計算が高速化される。以下、本研究において実装した枝刈りについて述べる。

探索においては、獲得ペア数の差と、場の残り枚数の関係による判定を行っている。場に残っているすべてのカードを獲得しても、相手より獲得ペア数が少ない場合、この時点で負けが確定するため、以降の局面は展開する必要がない。同様に、場のすべてのカードを相手に取られても自分の枚数の方が多いのであれば勝ちが確定する。

両者がパスした場合、その時点の獲得枚数で勝敗を決定し、以降の局面は展開しない。これは、現状の獲得枚数が相手よりも下回っている場合、パスの選択肢を考慮する必要がないことを意味する。獲得枚数が少ない状態でパスを選択した場合、相手にもパスを選ばれるとその時点で負けとなるためである。

既知ペアが存在する局面の場合、既知ペアをとっても悪影響がないのであれば他の選択肢を考慮する必要はない。例えばある数字について、4 枚とも既知カードであれば、その局面ではこの中の 2 枚を取る戦略が明らかに最適である。ただし、後述のように既知ペアを取らない方がいい曲面もあることに注意が必要である。既知ペアを取ることによって、パスをするのに必要な既知カードがなくなる場合には、他の選択肢についても展開しなければならない。

1 枚目に既知カードをめくった後、2 枚目に未知カードをめくる戦略については考慮する必要がない。これは、1 枚目に未知カードをめくり、その数字によって 2 枚目の行動を決定する方が明らかに有利なためである。

3.　結果

3.1.　最適戦略

前章に示した方法にもとづき、python でプログラムを実装し、神経衰弱における最適戦略を求めた。神経衰弱の初期局面をルートとしてゲーム木を生成した結果、362,931 の局面の最適戦略が得られた。計算時間は、3.1GHz の Intel core i9-9900 を搭載した PC で約 13 秒であった。

表 2 に最適戦略の概要を示す。

362,931 局面のうち、322,084 局面においては、既知ペアを取ることが最適であった。実際の神経衰弱においては、ペアが取れるのであればすぐに取るが、ゲーム木の生成にあたっては、必ずしも最適でない行動をした場合の局面も生成する。そのため、既知ペアを含む局面が多く現れる。362,931 局面のうち既知ペアが含まれるのは 329,574 局面であり、その中の 322,084 局面において既知ペアを獲得することが最適である。なお、残りの 7,490 局面については、後述の通り未知カードを開くことが最適である。

40,717 局面については、1 枚目に未知カードをめくることが最適であった。そして、残りの 130 局面については、パスが最適戦略であるとの結果が得られた。約 36 万の局面に対し 130 と比率は少ないものの、パスが最適である局面が存在することは興味深い。どのような局面でパスが最適となるのかについては次節で示す。

表 2 最適戦略の概略

戦略	局面数
既知ペアを取る	322,084
未知カードをめくる	40,717
パスする	130
計	362,931

1 枚目に未知カードをめくった場合の 2 枚目に関する最適戦略を表 3 に示す。前述の通り、1 枚目に引いた未知カードの数字の状態によって、それぞれ行動を選択する必要があるため、その数字の未知カードおよび既知カードの枚数別に結果を示している。左の 2 列は、1 枚目に引いた未知カードの数字が、未知カードを開く前にどの状態であったかを表す。右の 3 列は、そのときに各戦略をとることが最適となる局面の数である。「既知(同)」は、1 枚目に引いたカードと同じ数字の既知カードを引きペアを獲得する戦略である。「既知(異)」は、1 枚目に引いたカードとは異なる数字の既知カードを敢えてめくり、相手に手番を渡す戦略である。「未知」は、2 枚目にも未知カードを開く戦略である。

1 枚目に引いた未知カードの数字が、未知カード 2 枚、既知カード 0 枚の状態であった場合、既知(異)を選択することが最適となる局面が 24,052 通り、未知カードを引くことが最適となる局面が 3,768 通りであった。通常の戦略においては、この場合未知カードをめくるため、既知(異)は通常の戦略とは異なる行動である。対象となる 27,820 局面のうち、約 86%の局面において通常とは異なる戦略が最適との結論が得られた。

未知カード 4 枚、既知カード 0 枚の状態の数字の未知カードを引いた場合も同様の傾向であった。対象である 24,910 の局面のうち、約 71%にあたる 17,636 局面で既知(異)が最適であった。既知(異)は、1 枚目と数字の異なる既知カードを敢えてめくり、相手に手番を渡す戦略である。1 枚目にめくった未知カードと同じ数字の既知カードが存在していない場合、2 枚目に未知カードをめくることは、多くの局面で最適でないことが分かった。なお、これらの状態については既知カードが 0 枚であるため、既知(同)を選択することはできない。

次に、未知カード 1 枚、既知カード 1 枚の場合について述べる。1 枚目にこの状態の未知カードをめくる局面は 33,213 通りであり、そのすべてで既知(同)を選択することが最適であった。これは通常の戦略と同様の行動である。他の可能性として、既知(異)や未知を選択することも可能であるが、これらが最適となることはなかった。未知カード 3 枚、既知カード 1 枚の場合についても同様の結果である。31,800 通りのすべての局面において既知(同)を選択することが最適であった。

未知カード 2 枚、既知カード 2 枚の場合についても同様に、対象となる全 7,490 局面について、既知(同)が最適との結果が得られた。しかし、これらの局面は既知カードが 2 枚であることに注意が必要である。つまり、既知ペアを取るという選択が可能であるにも関わらず、敢えて 1 枚目に未知カードをめくったことを意味する。

未知カード 1 枚、既知カード 3 枚の局面については、既知(同)、既知(異)、未知ともに 0 通りであった。これは、この状態のカードが場にある場合、既知ペアをとる戦略が常に最適であることを意味している。また、未知カードが 0 枚である状態については表に含まれていない。

以上の通り、今回の解析によって、通常の戦略とは異なる行動が最適となる局面が存在することが確認された。それらは、「パス」「1 枚目と異なる既知カードをめくる」「既知ペアを取らずに未知カードをめくる」である。また、2 枚目において、取れるペアを取らずに未知カードや異なる数字の既知カードをめくる戦略については、最適とはならないことが確認された。次節において、3 通りの戦略について詳細を示す。

表 3 1 枚目に未知カードを引いた場合の最適戦略

未知枚数	既知枚数	既知(同)	既知(異)	未知
2	0	-	24,052	3,768
4	0	-	17,636	7,274
1	1	33,213	0	0
3	1	31,800	0	0
2	2	7,490	0	0
1	3	0	0	0

3.2.　最適戦略の例

パスが有効な局面の例を図 2 に示す。灰色は未知カードを、白色は既知カードを意味している。いずれの局面もパス回数および獲得ペア数の差は 0 である。

これらの局面における通常戦略は、1 枚目に未知カードをめくることである。例えば(A)の局面では、2 や 3 を引いた場合はペアとして取ることができる。しかし、A を引いた場合には残り 5 枚の未知カードの中から A を引き当てない限り取ることができず相手の番となる。相手はすべてのカードを取ることができるため、負けとなる。(B)と(C)についても状況は同じである。A を 2 枚続けて引けば勝つことができるが、外した時点で相手にすべてのカードを取られ負けてしまう。このように、既知カードを増やすことのデメリットが大きい場合にはパスが最適戦略となることがある。

なお、これらの局面における獲得ペア数の差は 0 であるため、相手にとっても状況は同じである。よって、互いに最適戦略を用いた場合は引き分けとなる。

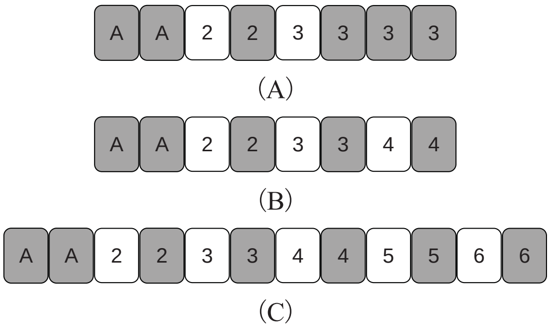

図 2　パスが最適である局面の例

2 枚目において、1 枚目とは異なる数字の既知カードをめくることが最適である局面の例を図 3 に示す。いずれの局面もパス回数および獲得ペア数の差は 0 である。

これらの局面における 1 枚目の最適戦略は、通常の戦略と同じく未知カードをめくることである。

（A）の場合、その未知カードが 3 であればペアを取るが、A や 2 であった場合にはもう 1 枚未知カードをめくるのではなく、敢えて既知カードの 3 をめくり相手に手番を渡す戦略が最適である。なお、その局面は図 2（A）であるため引き分けとなる。（B）と（C）についても同様に、A か 2 を引いた場合はいずれかの既知カードをめくり、これ以上の情報を相手に与えないようにする必要がある。

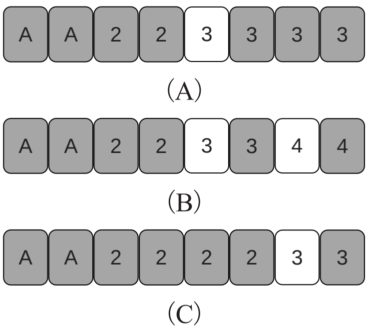

図 3　既知（異）が最適である局面の例

図 4 に、既知ペアを取らないことが最適である局面の例を示す。パス回数および獲得ペア数の差はいずれも 0 である。

（A）は、未知カード 2 枚、既知カード 2 枚の数字が 2 種類残っている局面である。このとき、通常の戦略では 2 つの既知ペアをとる。そして、A と 2 の未知カードが 2 枚ずつ残った局面で未知カードを開く。このとき 2 枚目でペアを獲得できる確率は 1/3 であり、2/3 の確率で相手に 2 ペアを取られてしまう。（A）における最適戦略は、1 枚目に未知カードをめくることである。50%の確率で A か 2 が開くが、いずれも既知カードがあるためペアを獲得することができる。以下同様にすべてのカードを取ることができるため、明らかにこの戦略の方が優れている。

（B）においても同様に、1 枚目に未知カードをめくることですべてのカードを獲得することができる。（C）では必ずしもすべてのカードを取ることはできないものの、やはり未知カードをめくる戦略が最適である。

なお、（A）の局面が実戦で現れるためには、直前のプレイヤーがペアを敢えて取らない選択をする必要がある。記憶が完全な状況で、互いに最適戦略や通常の戦略を用いいている場合にはこの局面が現れることはない。（B）および（C）については頻繁に現れる状況である。

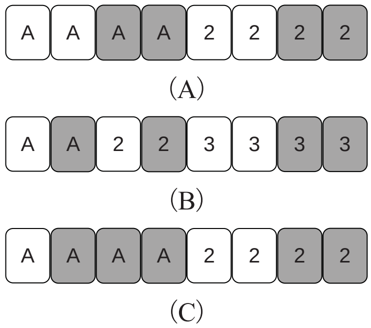

図 4　既知ペアを取らないことが最適である局面の例

3.3.　先手番の勝率

2 人でプレイする神経衰弱における先手番の勝率はこれまで知られていないが、最適戦略を求めたことで計算可能となった。用いる数字の種類を 1 から 35 まで変化させた場合の先手番の勝率を図 5 に示す。横軸が用いる数字の種類、縦軸が先手の勝率である。

数字が 1 種類のみの場合は、必ずすべてのカードを取ることが可能であるため、先手の勝率は 100%である。それに対し、2 種類の場合は約 48.6%とやや低い値を示した。3 以上の範囲においては多少の変化は見られるものの概ね 50%であった。通常のトランプでは数字の種類は 13 であるが、そのときの先手の勝率は約 49.9%である。わずかに後手有利であるが、ほぼ無視できる差であるといえる。また、数字の種類を無限大にした場合、先手の勝率は 50%へ収束すると予想される。

なお、初期局面における先手の勝率を求めるために必要となるゲーム木のサイズは、数字の種類が 13 である場合は前述の通り 362,931 である。これに対し数字の種類が 35 である場合は、82,725,530 であり、概ね数字の種類の 5 乗に比例することが確認された。

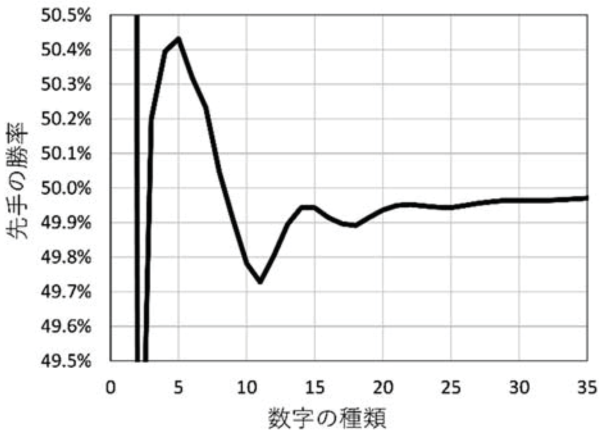

図5 先手番の勝率

3.4.　最適戦略の通常戦略に対する勝率

最適戦略の通常戦略に対する勝率を評価するため、先手と後手が異なる戦略を用いた際の勝率を求めた。結果を表4に示す。先述の通り、両者が最適戦略を用いた場合の先手の勝率は約 49.90%である。これに対し、先手のみが最適戦略を用いた場合は約71.93%、後手のみが用いた場合は約 28.24%であった。両者ともに記憶が完全であると仮定していることを考えると、これは非常に大きな差であるといえる。なお、両者ともに通常戦略を用いた場合は約50.17%であった。

表4 戦略による勝率の違い

先手の戦略	後手の戦略	先手の勝率
最適	最適	49.90 %
最適	通常	71.93 %
通常	最適	28.24 %
通常	通常	50.17 %

4. おわりに

本研究では、2 人で行う神経衰弱について、各局面における勝率の期待値を計算するプログラムを作成し、局面ごとに最適な戦略を求めた。その結果、多くのプレイヤーがとっている通常の戦略が、必ずしも最適でないことが分かった。相手に新たな情報を与えないため、敢えて既知カードをめくることが有効な局面が、かなりの割合で存在することが確認された。また、既知のペアがある状況において、敢えて未知カードをめくる戦略が有効である局面も存在することを示した。これらの戦略は勝率に大きな影響を与えるため、神経衰弱のプレイヤーにとって非常に有用である。

今後の課題としては、これらの戦略を用いるべき局面について、詳細な条件を決定することがあげられる。本研究の結果を実戦において活用するためには、各戦略が最適となる条件を簡潔な形でまとめる必要がある。また、プレイヤーの数を 3 人以上にした場合や、記憶が完全でない場合の解析についても今後の課題である。

参考文献

[1] U. Zwick, M. S. Paterson, The memory game, *Theoretical Computer Science*, **110**, 169-196, 1993.

[2] 野田 明男, カード・ゲームの数理ノート;「神経衰弱」における戦略について, *浜松医科大学紀要 一般教育*, **15**, 1-18, 2001.

[3] 野田 明男, カード・ゲームの数理ノートII;「神経衰弱」における戦略について, *浜松医科大学紀要 一般教育*, **16**, 9-29, 2002.

[4] 野田 明男, A mathematical note of card games III; on optimal strategies in the concentration game, *浜松医科大学紀要 一般教育*, **17**, 1-23, 2003.

[5] 篠田正人, Winning strategy of the memory game, *ゲームプログラミングワークショップ 2008 論文集*, **11**, 181-188, 2008.