

種々の切欠孔を有する薄肉円筒の応力集中 (第1報)

円孔付円筒 その1

望月 太喜雄*・小川 壽*

Stress Concentration of Thin-Walled Cylinders with Various Shapes
of Holes (Ist Report)

Cylinder with Circular Holes No.1

Takio MOCHIZUKI・Hisashi OGAWA

Abstract

This offers the Ist summary of the report of the experiments to investigate the stress concentration and stress distribution of thin-walled cylinders with various sorts of holes, such as circular, triangular, rectangular, square, ellipse, compound and etc. The theoretical analyses and experiments on the two-dimensional elastic problem of plane with various kinds of holes, above mentioned, subjected to tension were carried out to some extent and we have already many good results obtained. But few results on the problem of thin cyl. with holes under axial loads. The specimens used are large type of thin cyl. with holes of length 320mm, outside dia. 67.3mm, thickness 2mm. The maximum stress concentration occurred on the periphery of the hole, especially in the circumferential direction of the cyl. as we had presumed before the test. The stress concentration of the cyl. with a single hole was fairly big in comparison with that of the cyl. with a penetrated hole as the empirical results indicated.

1. ま え が き

薄肉円筒が Load pad 等を介して軸向き引張り、圧縮荷重を受ける場合は非常に多い。しかるに円筒が種々の切欠孔（円孔、三角孔、長方形孔、正方形孔、菱形孔、楕円孔、重複孔、その他）を有する場合、その応力集中に関する理論的解析は極めて困難である。切欠孔を有する平板に関する理論的解析^{1)~2)}および実験は、ある程度なされている。しかし切欠孔等を有する円筒の応力集中に関する系統的な実験結果は数少ない。そこで筆者等は後記の文献^{3)~11)}等を参考にして、軸向き引張荷重の場合について、上記の種々の切欠孔を有する薄肉円筒の応力集中に関する実験を行い、各切欠きに対する応力集中率の決定、切欠近傍における無次元化表現による応力解析等を試みることにした。まず円孔付円筒の場合の第1として片側円孔切欠きおよび両側円孔切欠きを有する場合の円筒の応力集中に関して、円筒径、厚さは一定として切欠孔の径を種々変えて実験を行った。直径方向に

円孔の貫通した円筒軸に関する実験は多いが、孔が片側に1個を有する円筒についての実験は少ない。しかし実際にこのような軸が機械部品に使用される例は多い。本報はその歪ゲージ使用による実験結果を示す。

2. 試験片材料および試験片

供試材は高圧配管用炭素鋼鋼管 (STS 35) を使用した。試験片の形状寸法は Fig. 1 に示すものであるが、鋼管の内側は市販のままとした。Fig. 2 に実験を行った試験片の一部を示す。

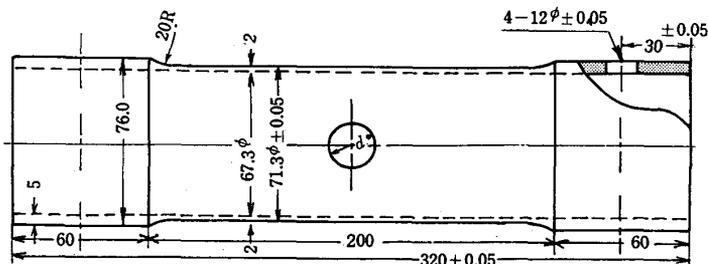


Fig.1 Dimensions of the thin-walled cylinder specimen with a hole

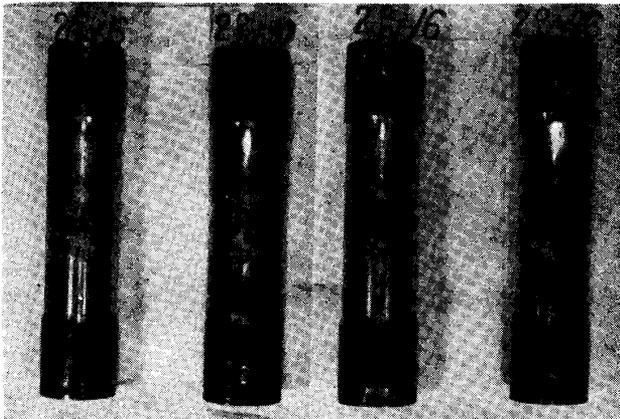


Fig 2 The picture of the thin-walled cylinder specimens tested

3. 実験装置および実験方法

使用機器の主なものはアムスラー万能試験機（東京衡機 KK），抵抗線動的歪測定器（共和電業 KK），安定化直流電源（高砂製作所）等である。試験片は4本宛のボルトで締付け，軸向き荷重を正しく負荷するためにピン接手とした。使用した附属部品をFig. 3に，実験装置をFig. 4に示す。実験方法は円筒の外径 $D=71.3\text{mm}$ ，厚

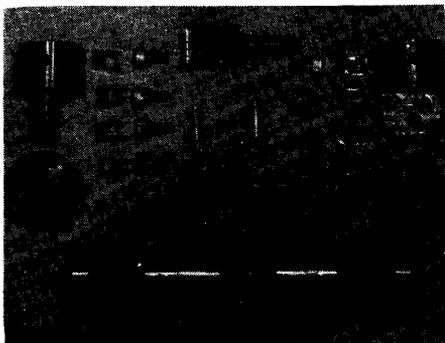


Fig.3 Attachments used in the test



Fig.4 The picture shows applied test equipments

さ $t=2\text{mm}$ を一定として，切欠孔の径 d を 6, 10, 16, 26mm の 4 通り（したがって孔径と外径の比はそれぞれ $6/71.3=0.0841$, $10/71.3=0.140$, $16/71.3=0.224$, $26/71.3=0.365$ ）に変化させて，片側孔と貫通孔の各々の場合に対して実験を行った。第1表に孔の種類と寸法を示す。使用荷重の大きさの範囲は材料の弾性域を考えて100kg より350kg までとした。

Table 1 Sorts and dimensions of the holes

Sorts	d_1	d_2	d_3	d_4
Typ.				
Single	6	10	16	26
Penetrated	6	10	16	26

4. ゲージの貼付位置および使用記号

Fig. 5 にゲージの貼付位置および応力の方向を示す。各記号は次のことを意味するものとする。

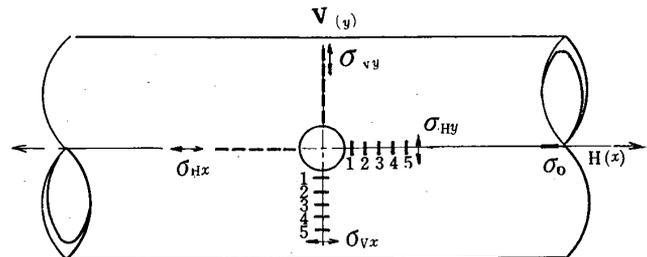


Fig.5 Positions of annexed gauges and notations used

- V, H.....ゲージの貼付位置を示す軸
- x, y.....応力（または歪）の測定方向
- 1, 2, ... 5貼付ゲージの孔縁からの順位
- σ_0 基準応力

5. 応力基礎式

ここに孔付円筒というのは円筒の側壁に孔1個を有する場合，それを直径方向に貫通して孔2個を有する場合，およびそれ以上の個数の孔を有する場合も含むものとする。孔付円筒において切欠孔（詳しくはさらにフィレット部分およびボルト締付部等）よりかなり離れた付近では，所謂サンブナンの定理が適用できて，明らかに単軸応力状態と解釈される。ところが切欠孔周辺部は厳密には厚さ方向の応力 σ_z も考慮に入れば一般に3軸応力状態（もちろん内壁，外壁においては σ_z はゼロであるが）と考えられる。しかし，薄肉であるため σ_z は極め

て小さいと考えられ従ってこれを無視することにすれば切欠周辺部は近似的に平面応力状態にあるものと仮定できる。

ところで一般の平面応力状態においては

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

任意の点において σ_x, σ_y が主応力 σ_x, σ_y の場合、すなわち $\tau_{xy} = 0$ の場合にはそれぞれの方向の主歪 ϵ_x, ϵ_y は

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E \quad (2)$$

よって主応力 σ_x, σ_y は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

($\epsilon_x > \epsilon_y$ のときは $\sigma_x > \sigma_y$)

よってあらかじめ主応力方向が確かめられている場合は、直交する2枚のゲージをその方向に貼れば主歪 ϵ_x, ϵ_y が求まるので上式より主応力を決定しうる。この場合、ゲージの横感度による誤差は通常1%以下と考えられる故無視する。主応力方向が不明の場合には、各主応力とその一方の主応力方向の3つが未知であるため最低3枚のゲージの組合されたローゼットゲージを必要とする。さらに言葉を加えておくと単純引張の場合には一方のみの観察でよく、フライホイールの遠心応力の如く軸対称の問題の場合は、主軸の1つは明らかにその半径方向故2方向の観察でよい。本報 Fig. 5 の各測定点の場合もその対称性より主応力方向は明白である。

基準応力 σ_0 に対応する歪を ϵ_0 とすれば、基準応力に対するその点の応力比は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} &= \frac{1}{(1-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon_0} + \nu \frac{\epsilon_y}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_0} &= \frac{1}{(1-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{\epsilon_y}{\epsilon_0} + \nu \frac{\epsilon_x}{\epsilon_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

で与えられ、応力集中点においては(4)式の値はそのままその切欠きの応力集中率 α を与える。例えば主歪 ϵ_x, ϵ_y において $\epsilon_x > \epsilon_y$ の場合、応力集中率 $\alpha = \sigma_x/\sigma_0$ と決定される。しばしば ϵ_x/ϵ_0 をもってその点の応力集中率 α とする場合も多いが、これはどこまでも近似値としての1つの目安であり、本報ではあくまでも厳密性を維持するために(4)式に

基いて α を計算し、また上式に基いて測定点の応力解析を行った。

6. 円孔を有する無限平板と薄肉円筒

円孔列を有する薄肉円筒が引張力を受ける場合、その理論的解析は極めて困難である。ところで円孔列を有する無限平板がその円孔列に直角な方向に引張力を受ける場合の二次元弾性問題の解法は古くは Howland が $\rho/p < 0.54$ の範囲について、後 Schoultz および Hütter によって ρ/p の全域について求められ、石田誠氏も複素関数表示¹¹⁾によって解析した。Fig. 6 は円孔を有する無限平板と円筒との対応を示す。平板に対して薄肉円筒の特徴は次の諸元で与えられる。1) 円筒平均直径 $2R$, 2) 円孔直径 2ρ , 3) 円孔列ピッチ $2p$, 4) 円孔個数 $n = \pi R/p$ 。ここで

$R = \infty, n = \infty$ は無限円孔を有する無限平板に対応し

$R = \infty, n = 1$ は1円孔を有する無限平板に対応する。

R が有限値で n が1以上有限個の円孔を有するとき

は、円筒としての特異性を顕著に顕す場合となる。

R が一定で、 $n = 1, \rho$ が極めて小さい場合は1円孔を有する無限板にかなりの近似度をもって接近することは当然であろう。

2個の円孔を有する無限板が引張力を受ける場合の応力状態は一般に円孔の大きさ (ρ_1, ρ_2), 中心距離 ($2p$), その他により変化し複雑である。この問題については Jeffery を始め多くの研究がある。2円孔の直径が等しい場合、円孔の直径 2ρ に対して円孔の中心距離 $2p$ が大きいと応力状態はもちろん円孔がそれぞれ単独で存在する場合に等しくなるが、 p/ρ の減少と共に円孔縁の最近点の σ_x が増大して応力集中は高くなる。すなわち最近点の σ_x は $p/\rho = \infty$ のとき $3.0\sigma_0$ から $p/\rho = 1.0$ の極限で ∞ に向う。もちろん基準応力は遠方での一様引張

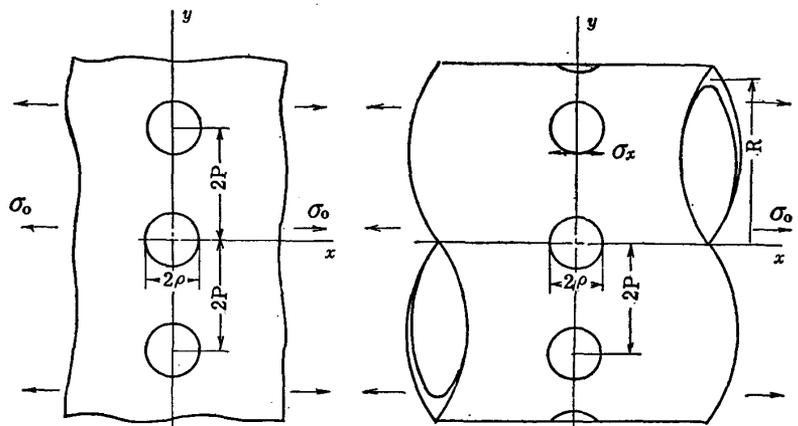


Fig. 6 Correspondence of an infinite plate to a cylinder with circular holes

応力である。円孔2個を有する薄肉円筒の場合も $R=\infty$ のときは同様に無限板に対応することは明らかである。以上のことを考慮しつつ上記の基礎応力式を用いて、1円孔および2円孔を有する円筒の実験を行った。

7. 実験結果

Fig. 7~14に実験結果を示す。Fig. 7~11は片側孔付円筒に対するもので Fig. 7より孔径 d が増すに従い歪比 $\varepsilon_{Vx}/\varepsilon_0$ は孔縁附近で急激に増すことが分る。 $\varepsilon_{Vy}/\varepsilon_0$ が負の値をとることをFig. 8は示す。Fig. 9の $\alpha_{Vx} = \sigma_{Vx}/\sigma_0$ の値より直ちに各円筒の孔縁における応力集中度が定まる。すなわち d が増すにつれて応力集中度は増大して $\rho=6$ で3.05, $2\rho=16$ で3.2, $2\rho=26$ で4.1の値をとるものと推定される。 d ゼロの極限においては1円孔を有する無限板の場合と同様応力集中度は3.0の値をとるものと考えられる。Fig. 10の $\alpha_{Hx} = \sigma_{Hx}/\sigma_0$ は1円孔を有する無限板の場合とよく似ており、また孔縁より僅か離れた附近に圧縮応力を生じているものと推定される。Fig. 11よりH軸方向の孔縁には圧縮応力が生じ d が小さい程その値は大きくなるものと考えられる。Fig. 12

~13に貫通孔すなわち2円孔の場合の実験結果を示す。2円孔の場合 $\varepsilon_{Vx}/\varepsilon_0$ の値は各測定点において1円孔の場合に比較して大きく減少することをFig. 12は示す。Fig. 13より2円孔を有する円筒の応力集中度は $2\rho=6$ で2.70, $2\rho=16$ で2.90, $2\rho=26$ で3.60と推定される。1円孔, 2円孔付き円筒の孔縁の歪比 $\varepsilon_{Vx}/\varepsilon_0$, 孔縁の応力集中度 α_{Vx} の値を表に纏めると第2表となる。() の値は $\varepsilon_{Vy} = 0$ を(4)式に代入して求めた計算値である。グラフによる推定値と大体一致していることがわかる。Fig. 14は片側孔付円筒についてV軸に沿い円周方向、中央点までの間にゲージを貼り $\varepsilon_{Vx}/\varepsilon_0$ を求めたものである。孔縁より中央部へ向って単調減少するものと予想していたが、予想に反して一度急激に落ち込むが、中央部までの途中で曲線は何れも山型を画いた。Fig. 15は外径 $D=71.3\text{mm}$, 厚さ $T=2\text{mm}$, すなわち $t/D=0.0281$ に対して横軸に d/D , 縦軸に円孔縁の応力集中度 α_{Vx} をとり応力集中度の無次元化を試みたものである。1円孔に対して2円孔付円筒の場合、 d/D がかなり大きくなると応力集中度の減少の仕方が急速にはやまることが認められる。

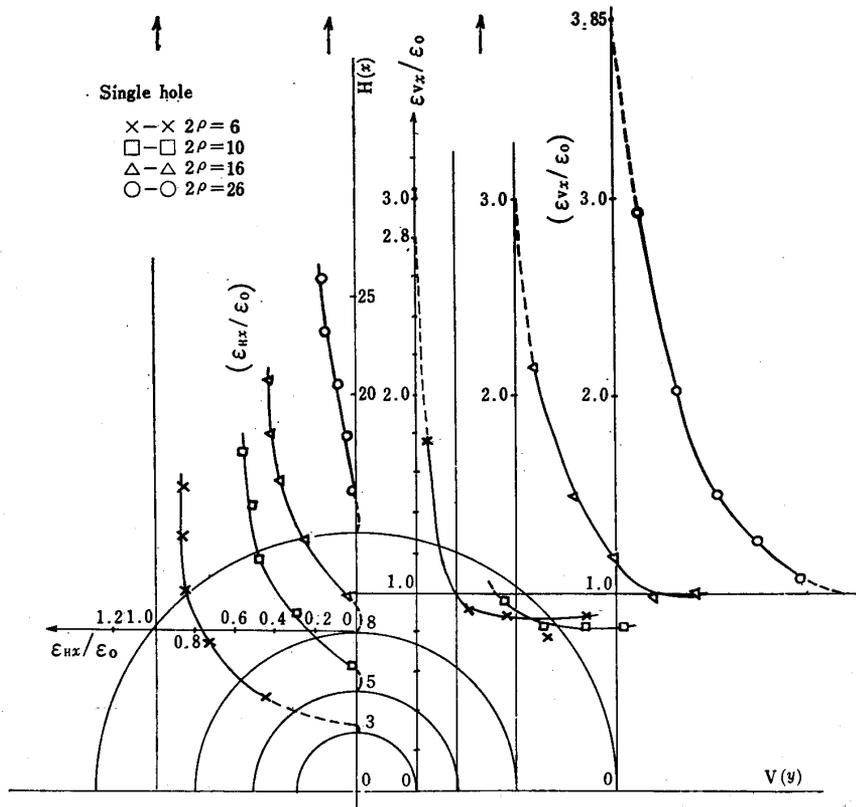


Fig.7 Distribution of strain ratios $\varepsilon_{Hx}/\varepsilon_0$ and $\varepsilon_{Vx}/\varepsilon_0$ measured on the longitudinal axis H and vertical axis V respectively in the vicinity of the hole, where ε_0 represents the strain corresponding to the nominal stress σ_0 .

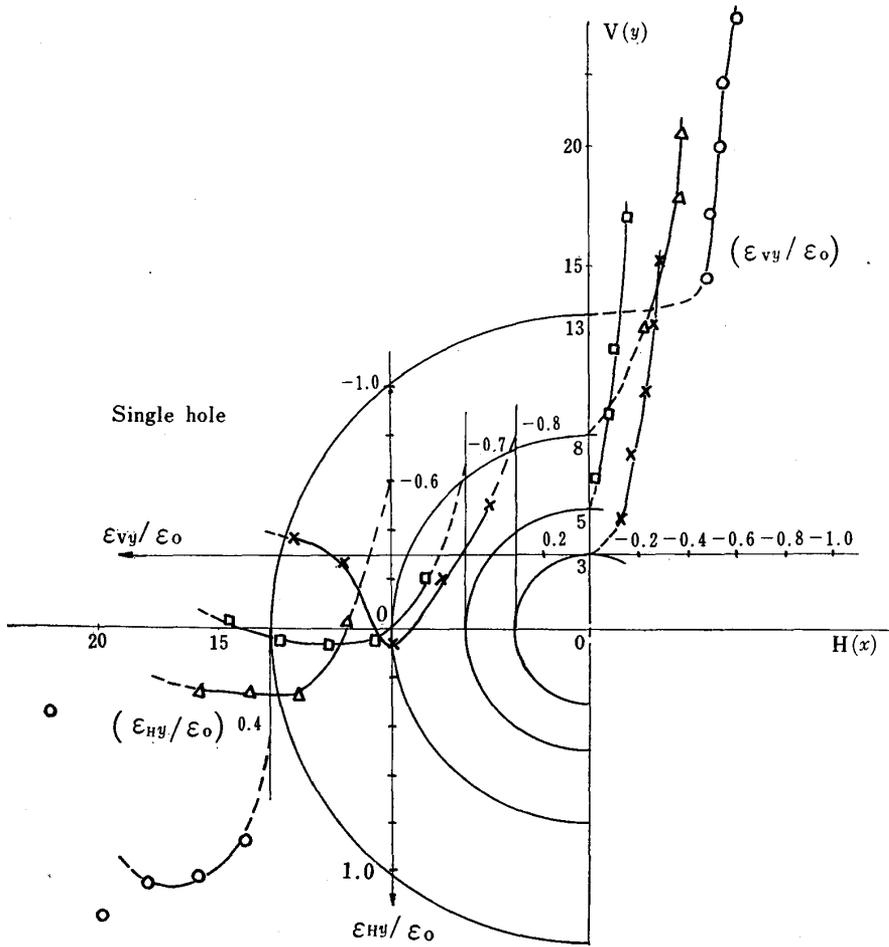


Fig. 8 Distribution of strain ratios ϵ_{Hy}/ϵ_0 and ϵ_{Vy}/ϵ_0 measured on the longitudinal axis H and vertical axis V respectively, where ϵ_0 represents the strain corresponding to the nominal stress σ_0 .

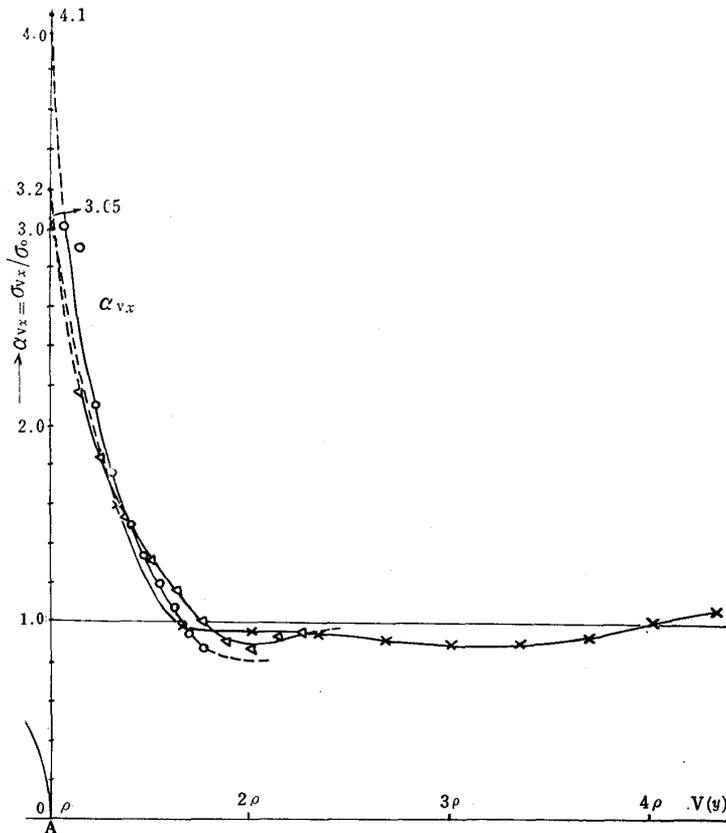


Fig. 9 Distribution of the stress ratio σ_{Vx}/σ_0 calculated from eq. (3) in relation to the distance from the center of the hole, where ρ represents the dimensionless radius of each hole. The figure shows the arisen stress concentration of the hole of dia. 26 mm takes the maximum value 4.1 on the periphery and as the dia. of the hole becomes smaller, the stress concentration at the pt. A on the circumferential edge decreases more and more until the limit value 3.0.

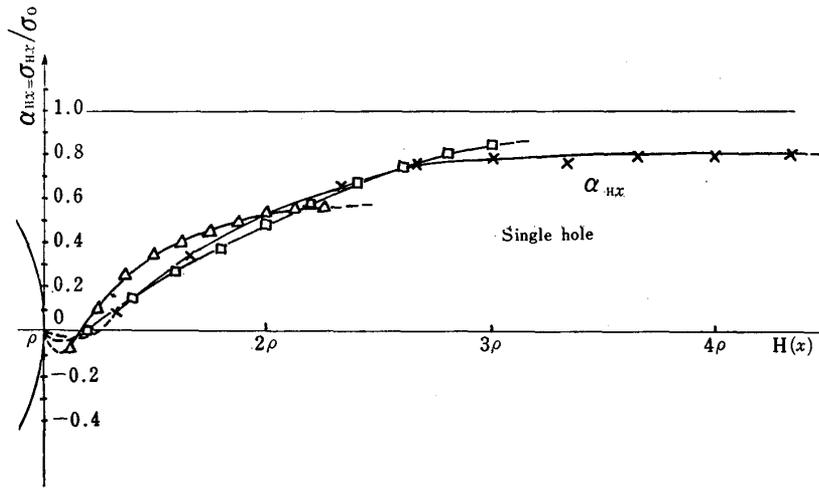


Fig.10 Distribution of the stress ratio σ_{Hx}/σ_0 calculated from eq. (3) in relation to the distance from the center of the hole.

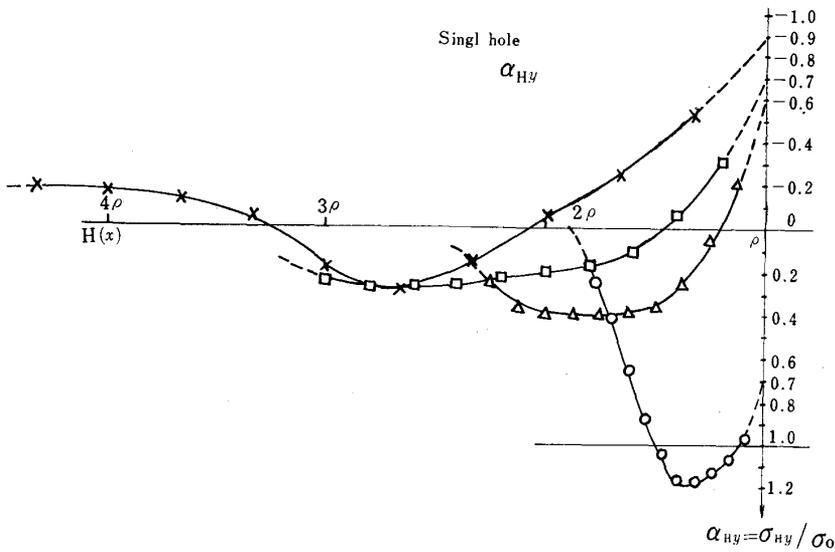
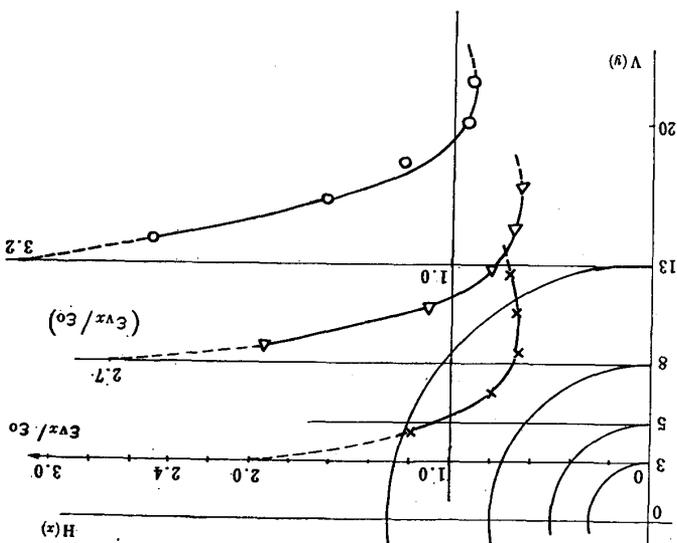


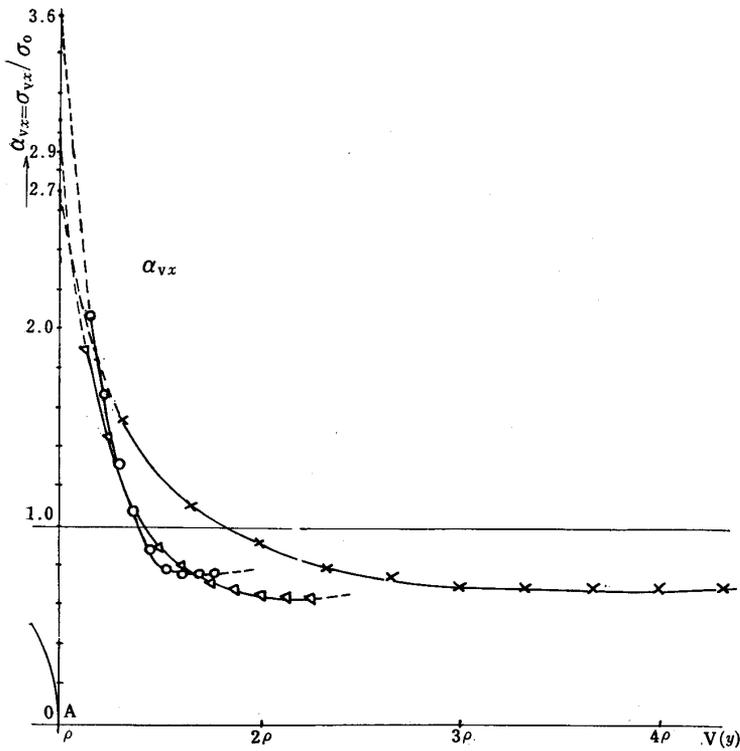
Fig.11 Distribution of the stress ratio σ_{Hy}/σ_0 calculated from eq. (3) in relation to the distance from the center of the hole.



Two holes

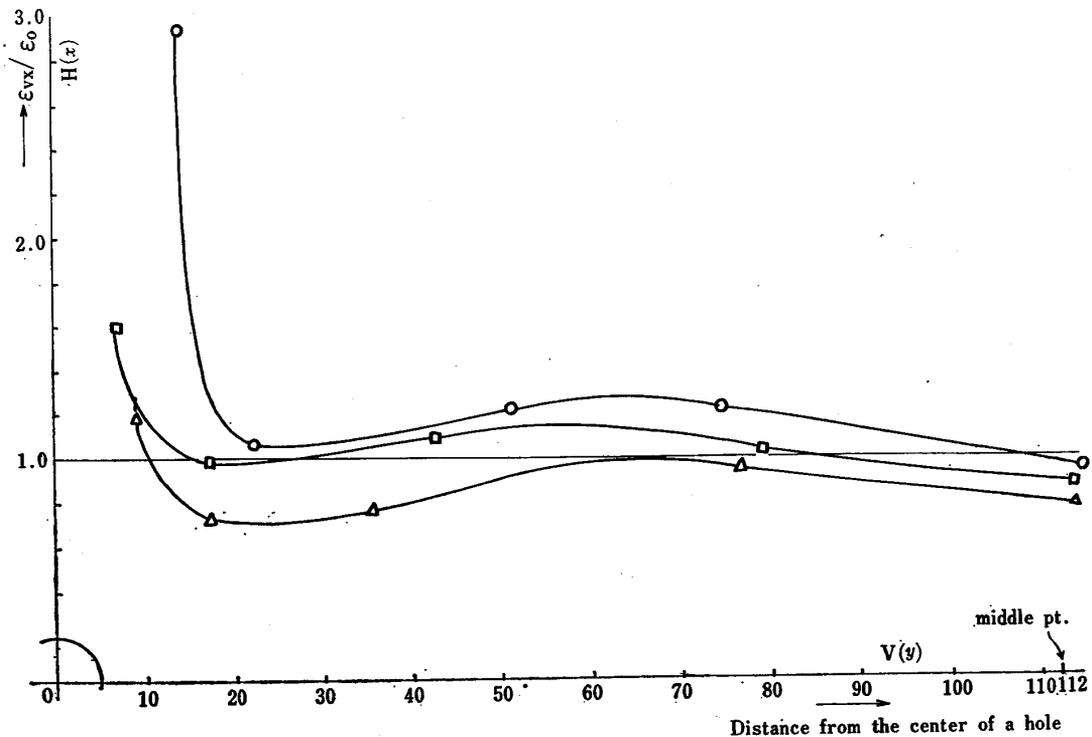
- ×—× $2\rho = 6$
- △—△ $2\rho = 16$
- $2\rho = 26$

Fig.12 Distribution of the strain ratio ϵ_{vx}/ϵ_0 in the case of thin-walled cylinders with a penetrated hole.



Two holes

Fig. 13 Variation of α_{vx} in relation to the distance from the center of the hole. The figure shows clearly that in the case of a penetrated hole the stress concentration at the pt. A on the circumferential edge becomes considerably small in comparison with that of a single hole.



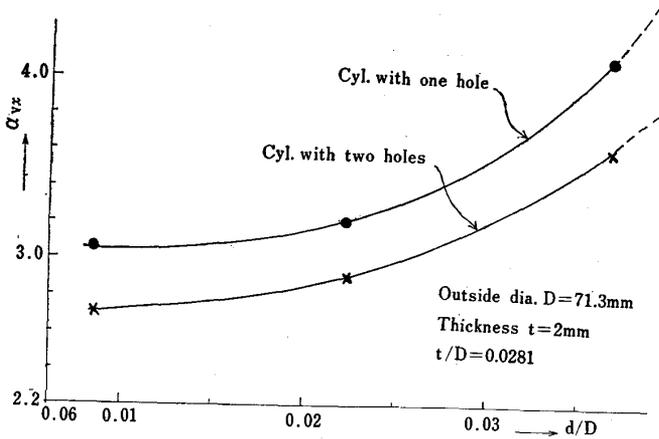
Single hole

- $2\rho=10$
- △—△ $2\rho=16$
- $2\rho=26$

Fig. 14 Distribution of the strain ratio ϵ_{vx}/ϵ_0 measured along the vertical axis in the circumferential direction to the opposite side-corresponding pt. of the center of the hole.

Table 2 Variation of ϵ_{vx}/ϵ_0 and α_{vx} of cylinders with holes

cyl. type	ϵ_{vx}/ϵ_0			α_{vx}		
	6	16	26	6	16	26
Cyl. with one hole	2.8	3.0	3.85	3.05 (3.05)	3.2 (3.27)	4.1 (4.20)
Cyl. with two holes	2.4	2.7	3.2	2.7 (2.62)	2.9 (2.94)	3.6 (3.50)

Fig. 15 Stress concentration factor α_{vx} of the thin-walled Cylinders with circular holes against d/D

8. む す び

外径 D , 厚さ t を一定としてかつ応力状態を平面応力状態と仮定して計算した場合の結論を列挙すると

- 1) 1円孔付円筒の場合孔径が大きくなる程応力集中率は大きくなる。 $d=0$ の極限では1円孔を有する無限板の場合と同様3.0に近づくことが推定され得る。(しかし、これはあくまでも基準応力として孔縁より、かなり遠方の一様応力 σ_0 を採用した場合で、もし基準応力として最小断面における平均応力 σ_0' を採用するときは $d=0$ の極限では同じく3.0の値をとるが最小断面部が殆んどゼロに近い極限では当然1.0の値をとる筈である。石橋正氏はその論文³⁾において曲げを受ける場合の $d/D \leq 0.5$ に対して計算値を求めている。)
- 2) 2円孔にすることにより円筒の応力集中率はかなり減少することが認められた。勿論この場合も基準応力のとり方は上記の通りである。(もし最小断面における平均応力 σ_0' を採用すれば孔径最大の極限においてはやはり1.0の値に近づく筈である。)
- 3) 片側孔付円筒の応力集中率が貫通孔付円筒のそれより高いことは筆者等が行った回転曲げ疲労試験⁵⁾において前者の疲労限が貫通孔のそれより低くなることも符

号する。

- 4) 1円孔付円筒の場合孔縁より円周沿いに中央点まで測定された ϵ_{vx}/ϵ_0 の曲線は単調減少とはならず途中で極大点をもち両側で1.0をわたった。

9. 謝 辞

終りに本題に対し終始熱心に研究を進めた44年度および45年度卒論生、麻生英治、齊藤篤、古川光男、吉村巧治、米元正治の諸君に対し深甚なる感謝の意を表します。

また試験片の製作に当り協力を惜まれなかった機械工場の工藤、岡崎、江村の皆さんに対しても深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) R. C. J. Howland : On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension. Phil. Trans. Roy. Soc., A, Vol. 229, P48, (1930)
- 2) 平野富士夫 : 2次元弾性体の形状係数の研究 (第4報), 機械学会論文集, 17, 61, P16, (1951)
- 3) 石橋正 : On the Form-Factors of a Round Bar with a Diametrical Circular Hole, 九大工学部紀要, 10, 165, P77, (1947)
- 4) 大野元明, 吉松靖雄 : 外周切欠材の応力集中と回転曲げ疲労強度について, 第4報 (孔付円筒その1) 山口大学工学部研究報告, 18, 3, P23, (1967)
- 5) 大野元明, 望月太喜雄 : 外周切欠材の応力集中と回転曲げ疲労強度について, 第6報 (孔付円筒その3), 山口大学工学部研究報告, 19, 2, P13, (1968)
- 6) 大野元明 : 外周切欠材の応力集中と回転曲げ疲労強度について, 第7報 (孔付円筒その4), 山口大学工学部研究報告, 20, 3, P131, (1970)
- 7) 大野元明, 藤満達朗, 藤野宏史 : 孔付円筒の疲れ試験, 機械学会論文集, No. 705-2, P19, (1970)
- 8) Miloslav Benick : Experimental Study of Thin

- Cylindrical Shells under Local Axial Loadings,
Experimental Stress Analysis, Vol. 24, P 506,
(1967)
- 9) 西田正孝: 応力集中, P 218, 258, 森北出版,
(1967)

- 10) 津村利光: 切欠きによる応力集中, 機械学会誌,
45, 301, P264, (1942)
- 11) 石田誠: 円孔列を有する無限板の2次元弾性問題,
機械学会論文集, 25, 159, P1118, (1959)
(昭和46年5月1日受理)