$\mathbb{R}^2$ 上のあるノルムにおける 2 次式 ax^2+by^2 の評価について

宮城 光廣*

On estimations of bilinear forms ax^2+by^2 on $\mathbb{R}^2$ with any norm

Mitsuhiro MIYAGI

Abstract: Let a,b be real numbers. In this paper, we get estimations of bilinear forms ax^2+by^2 on $\mathbb{R}^2$ with any norm . By these estimations, we can get estimations among some norms defined on $\mathbb{R}^2$.

Key words: normed space, bilinear form, ℓ^p-norm

1．まえがき

$\|\cdot\|$ を 実 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ 上のあるノルム、a,b を実数として、単位球（単位円）$\{w\in\mathbb{R}^2:\|w\|\leq 1\}$ における 2 次式 ax^2+by^2 の評価式を求める。これを求めると、$\mathbb{R}^2$ 上に定義されるあるノルムの評価式が得られる。

一般的には、実 n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (n は整数) にはいろいろなノルムが定義され、このノルムは開写像定理によってすべて同値である。これについては、いろいろな評価式（ヘルダーの不等式、ミンコーフスキーの不等式、シュワルツの不等式、クラークソンの不等式など）が与えられているが、ここではもっと具体的なノルムを考えることによって、$\mathbb{R}^2$ 上のノルムの評価式を与えることにする。

2．$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_p$ における ax^2+by^2 の評価式

$w=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ のとき、$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|w\|_p$ $(1\leq p\leq\infty)$ を次のように定義する。$1\leq p<\infty$ のとき、

$$\|w\|_p=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$p=\infty$ のとき、$\|w\|_\infty=\max\{|x|,|y|\}$ とする。これを ℓ^p- ノルムという。 ノルム空間 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_p)$ での単位球（単位円）を $\mathrm{B}_p=\{w\in\mathbb{R}^2:\|w\|_p\leq 1\}$ とする。a,b を実数として、$\mathbb{R}^2$ 上の 2 次式

$$f(w)=f(x,y)=ax^2+by^2 \quad (w=(x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

の B_p における最大絶対値

$$\|f\|_p=\sup_{\|w\|_p\leq 1}|f(w)|$$

を求めよう。点 $(1,0),\ (0,1)\in\mathrm{B}_p$ であり、$f(1,0)=a,\ f(0,1)=b$ だから、

$$\max\{|a|,|b|\}\leq\|f\|_p \quad \text{———}(2.1)$$

である。C を定数とすると、$ax^2+by^2=C$ は $ab\neq 0$ のとき 2 次曲線であり、楕円または双曲線を表している。次の結果はすぐに得られる。

命題 2.1 $1\leq p\leq 2$ ならば、

$$\|f\|_p=\max\{|a|,|b|\}$$

である。

［証明］$p=2$ のとき、$w=(x,y)\in\mathrm{B}_2$ ならば $x^2+y^2\leq 1$ であるから、

$$\begin{aligned}|f(w)|\leq|a|x^2+|b|y^2 &\leq \max\{|a|,|b|\}(x^2+y^2)\\ &\leq \max\{|a|,|b|\}\end{aligned}$$

よって、$\|f\|_2\leq\max\{|a|,|b|\}$。$1\leq p<2$ ならば $\mathrm{B}_p\subset\mathrm{B}_2$ であるから、$\|f\|_p\leq\|f\|_2\leq\max\{|a|,|b|\}$ となる。よって、不等式 (2.1) よりこの命題を得る。（証明終わり）

命題 2.2 $2<p<\infty$ ならば、

$$\|f\|_p=\begin{cases}\max\{|a|,|b|\} & (ab\leq 0)\\ \left(|a|^{\frac{p}{p-2}}+|b|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}=\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}} & (ab>0)\end{cases}$$

（2010 年 11 月 30 日受理）
*宇部工業高等専門学校　一般科数学教室

［証明］$w=(x,y)\in \mathrm{B}_p$ とする。最初に $ab\le 0$ のときに上の等式を示そう。まず $a\ge 0, b<0$ とする。

$$by^2 \le ax^2+by^2 \le ax^2$$

であり、$|x|\le 1, |y|\le 1$ だから

$$b\le ax^2+by^2\le a$$

よって、

$$|ax^2+by^2|\le \max\{|a|,|b|\}$$

これより、

$$\| f \|_p \le \max\{|a|,|b|\}$$

となるので、不等式 (2.1) より

$$\| f \|_p = \max\{|a|,|b|\}$$

を得る。$a<0, b\ge 0$ のときも同様である。

次に $ab>0$ とする。ここでは、$a>0, b>0$ としておく。$ax^2+by^2=C$ （$C>0$ はある定数) は楕円を表すので、

$$\| f \|_p = \sup_{(x,y)\in \mathrm{B}_p, x\ge 0, y\ge 0} |f(x,y)|$$

であるから、$x\ge 0, y\ge 0$ のときに考えればよい。$x>0, y>0$ として、

$$x^p+y^p=1 \text{ ———(2.2)}$$

の下で $f(x,y)=ax^2+by^2$ が極値を取るとすれば、ラグランジュの乗数法より

$$\frac{px^{p-1}}{2ax}=\frac{py^{p-1}}{2by}$$

を満たす必要がある。これより、

$$y^{p-2}=\frac{b}{a}x^{p-2} \text{ よって } y=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p-2}} x \text{ ———(2.3)}$$

これを (2.2) に代入して、

$$x^p+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{p-2}}x^p=1$$

$$\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right\}x^p=1$$

$$x^p=\frac{a^{\frac{p}{p-2}}}{a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}}}$$

したがって、

$$x=\frac{a^{\frac{1}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{1}{p}}}$$

これを (2.3) 式に代入して、

$$y=\frac{b^{\frac{1}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{1}{p}}}$$

これより、

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a^{\frac{1}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{1}{p}}}, \frac{b^{\frac{1}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{1}{p}}}\right) \\
= \ & a\frac{a^{\frac{2}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{2}{p}}}+b\frac{b^{\frac{2}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{2}{p}}} \\
& \left(1+\frac{2}{p-2}=\frac{p}{p-2} \text{ だから}\right) \\
= \ & \frac{a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}}}{(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{2}{p}}} \\
= \ & \left(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}}=\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}} &= \left(a^{\frac{p}{p-2}}+b^{\frac{p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}} \\
&> \left(a^{\frac{p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}}=a
\end{aligned}$$

であり、同時に $\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}>b$ も得られるので、

$$\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}>\max\{a,b\}$$

$f(x,y)$ は条件 $x^p+y^p=1, x\ge 0, y\ge 0$ の下で最大値を取るので、よって $\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}$ が最大値になる。$a<0, b<0$ のときは、$-f(x,y)$ の最大値を考えればよいので、同様に最大値 $\|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}$ を得る。（証明終わり）

残り $p=\infty$ のときを述べる。

命題 2.3 $\| f \|_\infty = \begin{cases} \max\{|a|,|b|\} & (ab\le 0) \\ |a+b|=|a|+|b| & (ab>0) \end{cases}$

［証明］$ab\le 0$ のときは、命題 2.2 の証明と同様である。

$ab>0$ のとき、

$$|ax^2+by^2|=|a|x^2+|b|y^2$$

だから、

$$\| f \|_\infty \le |a|+|b|$$

である。$(1,1)\in \mathrm{B}_\infty$ であり、$f(1,1)=a+b$ だから、

$$\| f \|_\infty = |a|+|b|$$

となる。（証明終わり）

以上まとめて次の結果を得る。

定理 2.4 a,b を実数、$1 \le p \le \infty$、$f(x,y)=ax^2+by^2$ とするとき、$\| f \|_p$ は次に等しい。
(1) $(1 \le p \le 2)$ または $(2 < p \le \infty, ab \le 0)$ のとき、

$$\| f \|_p = \max\{|a|,|b|\} = \|(a,b)\|_\infty$$

(2) $2 < p < \infty, ab \ge 0$ のとき、

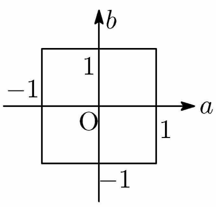
$$\| f \|_p = \|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}$$

(3) $p=\infty, ab>0$ のとき、

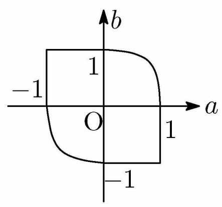
$$\| f \|_\infty = |a+b| = |a|+|b| = \|(a,b)\|_1$$

集合 $\mathcal{P}=\{ax^2+by^2 : a,b \in \mathbb{R}\}$ は 2 次元ベクトル空間であり、$1 \le p \le \infty$ のとき $\|f\|_p$ $(f \in \mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ 上のノルムである。ノルム空間（$\mathcal{P}, \|\cdot\|_p$）の単位円にあたるものは、定理 2.4 で $\|f\|_p=1$ を満たす点 (a,b) の描く図形である。これはおおよそ次のような形になる。

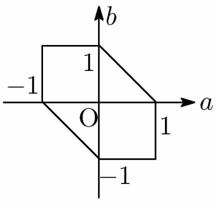
(1) $1 \le p \le 2$ のとき



(2) $2 < p < \infty$ のとき



(3) $p=\infty$ のとき



3．$\mathbb{R}^2$ 上のノルムの評価式

ここでは、$\mathbb{R}^2$ 上のいくつかのノルムの評価式を求める。

$a>0, b>0$ として、$w=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ のとき

$$\|w\|_{(a,b)} = \sqrt{ax^2+by^2}$$

とおく。$\|w\|_{(a,b)}$ は $\mathbb{R}^2$ 上のノルムであり、その単位円にあたるのは、楕円 $ax^2+by^2=1$ である。またすぐに $\|(x,y)\|_{(a,b)} = \|(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)\|_2$、$\|\cdot\|_{(1,1)} = \|\cdot\|_2$ となることが分かる。$\|\cdot\|_{(a,b)}$ と $\|\cdot\|_p$ の評価式を求めよう。

命題 3.1 $a>0, b>0, 1 \le p \le \infty$, $f(w)=f(x,y)=ax^2+by^2$ $(w=(x,y) \in \mathbb{R}^2)$ のとき、

$$\|w\|_{(a,b)} \le \|f\|_p^{\frac{1}{2}} \|w\|_p$$

が成立する。

［証明］定理 2.4 より、$w \in \mathrm{B}_p$ ならば $f(w) \le \|f\|_p$ である。$w=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(w \ne 0)$ のとき、

$$\|f\|_p \ge f\left(\frac{w}{\|w\|_p}\right) = \frac{1}{\|w\|_p^2} f(w) = \frac{1}{\|w\|_p^2} \|w\|_{(a,b)}^2$$

よって、すべての $w \in \mathbb{R}^2$ についてこの命題の不等式が成り立つ。（証明終わり）

$p \ge 1, q \ge 1$ として、$0 \le t \le 1$ のとき

$$h(t) = \frac{(1+t^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+t^p)^{\frac{1}{p}}}$$

とする。そのとき、$h(t)$ は $p<q$ ならば単調減少、$p>q$ ならば単調増加である。これを利用して、参考文献 2) は次の結果を得ている。

補題 3.2 $1 \le p \le q$, $w \in \mathbb{R}^2$ のとき、不等式

$$\|w\|_q \le \|w\|_p \le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|w\|_q$$

が成立する。

注意：この補題は $w \in \mathbb{C}^2$ のときも成立する。

この補題を使って次の不等式が成り立つことを示す。

命題 3.3 $1 \le p \le 2$, $a>0$, $b>0$, $w \in \mathbb{R}^2$ のとき、

$$\min\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|w\|_p \le \|w\|_{(a,b)}$$

が成立する。

［証明］補題 3.2 より $q=2$ のとき

$$\|w\|_p \le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|w\|_2 \quad (w \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ。$w=(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\|(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)\|_p &\le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)\|_2 \\
\{(\sqrt{a}x)^p + (\sqrt{b}y)^p\}^{\frac{1}{p}} & \\
&\le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \{(\sqrt{a}x)^2 + (\sqrt{b}y)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
(a^{\frac{p}{2}} x^p + b^{\frac{p}{2}} y^p)^{\frac{1}{p}} &\le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (ax^2+by^2)^{\frac{1}{2}} \\
\min\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\} \|(x,y)\|_p &\le 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|(x,y)\|_{(a,b)}
\end{aligned}$$

これはこの命題の不等式が成立していることを示している。（証明終わり）

$2 < p \leq \infty,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ とする。$\mathrm{B}_2 \subset \mathrm{B}_p$ だから、$\|(x,y)\|_p \leq \|(x,y)\|_2$ である。$a > 0,\ b > 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}\|(x,y)\|_{(a,b)} &= \|(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)\|_2 \\ &\geq \|(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)\|_p \\ &\geq \min\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\}\|(x,y)\|_p\end{aligned}$$

である。

上の不等式と、命題 3.1、3.3 より次の結果を得る。

定理 3.4 $a > 0,\ b > 0,\ 1 \leq p \leq \infty$,$w \in \mathbb{R}^2$ のとき、次の不等式が成り立つ。ここで、
$f(x,y) = ax^2 + by^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ である。
(1) $1 \leq p \leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}&\min\ \left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\right\} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|w\|_p \\ &\leq\ \ \|w\|_{(a,b)} \leq \|f\|_p^{\frac{1}{2}}\|w\|_p\end{aligned}$$

(2) $2 < p \leq \infty$ のとき、

$$\min\left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\ \right\}\|w\|_p \leq \|w\|_{(a,b)} \leq \|f\|_p^{\frac{1}{2}}\|w\|_p$$

定理 2.4 より上の定理をもう少し具体的に表すと次のようになる。

(1) $1 \leq p \leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}&\min\ \left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\right\} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|w\|_p \\ &\qquad \leq \|w\|_{(a,b)} \leq \max\left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\right\}\|w\|_p\end{aligned}$$

(2) $p > 2$ のとき、

$$\min\left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\ \right\}\|w\|_p \leq \|w\|_{(a,b)} \leq \|(a,b)\|_{\frac{p}{p-2}}^{\frac{1}{2}}\|w\|_p$$

(3) $p = \infty$ のとき、

$$\min\left\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\ \right\}\|w\|_\infty \leq \|w\|_{(a,b)} \leq (a+b)^{\frac{1}{2}}\|w\|_\infty$$

参考文献

1) Dineen, S.: 2 変数の関数, 学術図書出版 (1997), 翻訳（西原賢, 本田竜広, 宮城光廣, 吉田守　共訳）
2) Kuriyama, K., Miyagi, M., Okada, M. and Miyoshi, T.: Elementary proof of Clarkson's inequalities and their generarization, 山口大学工学部研究報告, 第 48 号, 第 1 号 (1997), 119-125.
3) Schaefer, H.H. and Wolff. M.P.: Topological vector spaces, Springer(1999), Second Edition.
4) 山中健：線形位相空間論と一般関数、共立数学講座 16(1966), 共立出版