黄金比の値は sin18° の２倍である

－三角関数の加法定理の演習問題として－

松浦利治*

Golden Ratio is equal to 2sin18°

—Application of Addition Theorem of Trigonometric Function—

Toshiharu MATSUURA

Abstract: A Drill of quadratic equation, factorization and addition theorem of trigonometric function is mentioned. Golden Ratio satisfies the equation $x^2 + x - 1 = 0$, where $x > 0$. Applying the addition theorem of trigonometric function, we know the value of $\sin 18^o (= t)$ satisfies the equation $4t^2 + 2t - 1 = 0$, where $t > 0$. Then $x = 2t$. We get “Golden Ratio $= 2\sin 18^o$ ”.

Key words: Golden Ratio, addition theorem, trigonometric function

１．はじめに

三角関数の加法定理の応用として３倍角の公式があるが、その応用問題として、$\sin 18^\circ$ の値を求めよ、という問題がある。その答え（$\sin 18^\circ$ の値）がどこかで見た値に似ていると感じたことがあった。そう、フィボナッチ数列の一般項の中の数値に。そしてそれは、黄金分割、黄金比に関係があるという。ここではこの関係について、述べてみる。

２．黄金比とは

黄金比は、最も美しいとされる比であり、$a > 0, b > 0$ として、線分を a, b の長さで分割するときに、$a : b = b : (a + b)$ が成り立つように分割したときの比 $a : b$ のことである 1)。

外項の積は内項の積に等しいから、$a \cdot (a + b) = b \cdot b$

よって、$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{a}{b} - 1 = 0$

となるから、その比の値すなわち黄金比の値 $\dfrac{a}{b}$ は２次方程式　$x^2 + x - 1 = 0$　　(1)

の正の解である。

よって、$x = \dfrac{a}{b} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$

黄金比は $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ である 2)。

３．sin18° の導出

$\sin 18^\circ$ の値を求めてみる。

$\theta = 18^\circ$ とおくと、$5\theta = 90^\circ$

よって、$3\theta = 90^\circ - 2\theta$

（2010 年 11 月 30 日受理）

＊　宇部工業高等専門学校　一般科
（元 経営情報学科 所属）

$\therefore \sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta)$ (2)

(2)式の左辺は、３倍角の公式を用いて、

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

この導出は、 $\sin(2\theta+\theta)$ として、 sin の加法定理の公式と、 sin 、 cos の２倍角の公式を用いればよい。即ち

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

(2)式の右辺は、cos の２倍角の公式を用いて

$\sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

左辺＝右辺より、 $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin\theta = t$ とおいて整理すると、

$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$

因数分解して、 $(t-1)(4t^2+2t-1) = 0$

$t = \sin\theta = \sin 18^\circ \neq 1$ ゆえ、

$4t^2 + 2t - 1 = 0$ (3)

よって、 $t = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$t = \sin 18^\circ > 0$ だから、 $t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

よって、 $t = \dfrac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2} = x/2$

ここで、 x ははじめに述べた黄金比の値 $x = \dfrac{a}{b}$

よって、 $x = \dfrac{a}{b} = 2t = 2\sin 18^\circ$

なお、具体的な数値をいわずに、 $x = 2t = 2\sin 18^\circ$ だけをいうのであれば、(3)式より

$(2t)^2 + 2t - 1 = 0$ (3)’

$x > 0, t > 0$ として、(1)式と(3)’ 式を比較すれば得られる。

（補足）２次方程式 $\phi^2 = \phi + 1$ の正の解を黄金数というという 1)。黄金数は黄金比の逆数となる。

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ より、 $\phi = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\phi > 0$ より、 $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

これが黄金数である。よって黄金比は黄金数の逆数であるから

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

（分母の有理化を行なった）

４．私の思い入れ、思いつくままに

１. 整数からなる数列であるフィボナッチ数列の一般項の式の中に、 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ という無理数が入っているのを知ったとき、不思議な感じがした。結果は整数なのに、計算の元は無理数なんて… 。しかしよく考えてみると、不思議ではない。整数係数の２次方程式の解が無理数になる例はありふれている。２次方程式の解の公式の中に根号$\sqrt{\ }$があるのだから。

２. 定規とコンパスのみ使用する作図問題で、正五角形の作図法は、忘れてしまったが、複雑だったと思う。しかし自然界には、例えば桜の花のように正五角形をベースとしたものが多く見られるのはなぜだろうか。

５．おわりに

黄金比 $= 2\sin 18^\circ$ を導いた。用いた数学は高校数学の範囲のものである。２次方程式、因数分解、三角関数の加法定理、それらの応用である。

参考文献

1) 黄金比－Wikipedia

2) 黄金分割、CD-ROM 世界百科大事典第２版、日立デジタル平凡社