# 「７２の法則」の導出

## －複利で元利合計が２倍になる年数の目安を得る演習問題として－

松浦利治*

# Deduction of “The Law of 72”

## —— How many years to receive interest equal to the amount of the principal deposit ——

Toshiharu MATSUURA

**Abstract:** “The Law of 72” is deduced. “The Law of 72” reveals to us the years to receive interest equal to the amount of the principal deposit. We applied natural logarithm, approximation, power series, integral and Maclaurin expansion.

**Key words:** Law of 72, approximation, natural logarithm, power series, Maclaurin expansion

### １．はじめに

複利の世界において、銀行に金を預けたら、何年で倍になるか、を知りたくなる。元利合計が２倍になるのに要する年数の目安を得るのに、「７２の法則」というのが知られている 1)。この法則を導き出してみよう。

### ２．７２の法則とは

複利で年１回年末に利子を元金に繰り込むものとする。

７２の法則とは、

７２÷年利＝元利合計が２倍になる年数

ここで、年利は%

をいう。

（2010 年 11 月 30 日受理）

＊　宇部工業高等専門学校　一般科

（元 経営情報学科 所属）

### ３．７２の法則の導出

年利を $R$ ％、元利合計が２倍になる年数を $n$ 年とする。$R$ （%）を小数で表したものを $r$ とする。

すなわち $100r = R$

今、$P$ 円という金額をもっていて、これを年利 $R$ ％の銀行に $n$ 年間預けると、$n$ 年後には複利で元利合計が２倍になるのであるから、$P \cdot (1+r)^n = 2P$

両辺を $P$ で約して、

$$(1+r)^n = 2$$

自然対数をとると、

$$n \log_e(1+r) = \log_e 2$$

ここで $e$ はネピアの数、自然対数の底（てい）といわれる数で、

$$e = 2.718281828459\cdots$$

自然対数では底 $e$ は書かない習慣があるので、これに従うと、

$n\log(1+r)=\log 2$

また $\log 2 = 0.693\cdots$ であることが知られている。よって

$n\log(1+r)=0.693\cdots$

ここで、近似式を用いる。

$0 < r << 1$ のとき（$r$ は 1 に比べて非常に小さいとき）

$$\log(1+r)\approx r \qquad \text{(A)}$$

（$\approx$ は近似的に等しいことを示す。≒とも書く）

よって、$nr \approx 0.693\cdots$

両辺を 100 倍して

$n\cdot 100r \approx 69.3\cdots$

よって、$nR \approx 69.3\cdots$

ここで、さらに近似を用いる。$69.3\cdots$ を 72 で近似する。

$$69.3\cdots \approx 72 \qquad \text{(B)}$$

よって、$nR \approx 72$

$\therefore \quad 72 \div R \approx n$

７２の法則が導けた。

近似式(A)の根拠

$0 < x << 1$ のとき、初項１、公比 $-x$ の無限等比級数（等比数列の和）は収束して（$\because |-x| << 1 < 1$）、

$$1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots=\frac{1}{1-(-x)}$$

$$\therefore \quad 1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x}$$

左辺と右辺を入れ替えると、

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

両辺を積分すると、

$$\int\frac{1}{1+x}dx=\int(1-x+x^2-x^3+\cdots)dx$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

$x$ は 1 に比べて非常に小さいから、2 次以上の項 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$ を無視すると、

$\log(1+x)\approx x$

（(別法) $x=0$ におけるマクローリン展開による近似については後述する。）

近似(B)の根拠

$69.3\cdots$ に近い数で、1 桁の数 $1,2,3,4,\cdots,9$ の多くで割り切れると実用上便利なので、そのような数として、72 を用いて近似した。

## ４．近似の程度

$(1+r)^n = 2$

の両辺の常用対数（10 を底とする対数）をとると、

$$n\log_{10}(1+r)=\log_{10}2$$

$$\therefore \quad n=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}(1+r)}$$

この式は、年利 $R(\%)=100r$ のとき、元利合計が 2 倍になる年数 $n$ の正確な値を与える。

なお、$\log_{10}2 \approx 0.3010\cdots$ であることが知られている。

いくつかの例を示す。常用対数表から必要なデータをとってきて計算すると、

| | | $n$ (年) | |
|---|---|---|---|
| $R(\%)$ | $1+r$ | 正確な値 | 72 の法則による値 |
| 1 | 1.01 | 69.66… | 72 |
| 2 | 1.02 | 35.00… | 36 |
| 3 | 1.03 | 23.44… | 24 |
| 4 | 1.04 | 17.67… | 18 |
| 5 | 1.05 | 14.20… | 14.4 |
| 6 | 1.06 | 11.89… | 12 |
| 7 | 1.07 | 10.24… | 10.28 |
| 8 | 1.08 | 9.00… | 9 |
| 9 | 1.09 | 8.04… | 8 |
| １０ | 1.1 | 7.27… | 7.2 |
| １２ | 1.12 | 6.11… | 6 |
| １４ | 1.14 | 5.29… | 5.14 |
| １６ | 1.16 | 4.67… | 4.5 |
| １８ | 1.18 | 4.18… | 4 |
| ２０ | 1.2 | 3.80… | 3.6 |

元利合計が 2 倍になる年数 $n$ の目安を得るという実用上の観点からは良い近似と言える。しかも整数値で得られる場合が多いのは便利である。72 という数字の威力であ

ろう。

なお、この７２の法則は、ヨーロッパに複式簿記の知識を広めたルカ・パチョーリの著書「ズンマ」（算数、幾何、比および比例全書）（1494 年）に述べられているという1)。微分積分が発明されるズッと前に、商売の世界においてですよ！

## ５．おわりに

７２の法則を導いた。用いた数学は現在宇部高専で習う範囲のものである。等比数列の和、無限等比級数の収束、対数の微積分、（別法では、マクローリン展開）等である。

## 参考文献

1）７２の法則―Wikipedia

## 補足　近似式(A)の別法

（別法）$x = 0$ におけるマクローリン展開による近似

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = \log(1+x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

$f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \cdots$ だから

$f(0) = \log 1 = 0,\ f'(0) = 1,$

$f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2, \cdots$ より

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$