ピタゴラス数の話

－中学生に向けて－

松浦利治*

About Pythagoras Numbers

—— For Junior High School Pupils ——

Toshiharu MATSUURA

Abstract: A Memorandum of the Sample Lecture for Junior High School Pupils on Pythagoras Numbers is mentioned.

1. What are Pythagoras Numbers ?
2. What Rules do Pythagoras Numbers have ?
3. How can we get all Pythagoras Numbers ?

Key words: Pythagoras Numbers

１．はじめに

近年学校と地域との関係を深めることがいっそう推奨されている。そのため公開講座や中学生向きのジュニア科学教室等もその重要度を増している。

ここでは著者が関心を持ち、中学生向きのジュニア科学教室用の一つの題材として、ピタゴラス数をとりあげ、中学生に話をすることを想定してみた。

２．ピタゴラス数の話

２．１　ピタゴラス数って何？

中学生の皆さん、こんにちは！　宇部高専ジュニア科学教室へようこそ。今回はピタゴラス数について、話をします。

（2009 年 12 月 14 日受理）

* 宇部工業高等専門学校　一般科

皆さんは中学校で、三平方の定理＝ピタゴラスの定理、を習いましたね。ピタゴラスの定理って、何でしたっけ。そう、直角三角形の３つの辺の長さを x, y, z とすると、

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

が成り立つという有名な定理ですね。なおここでは話を簡単にするため、 x, y, z の中で z を一番大きい値とします。直角三角形の斜辺の長さを z とするということですね。

直角二等辺三角形だと辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ 、角が 60°,30° の直角三角形だと辺の比は $z : x : y = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 、となることは中学校で習いましたね。

ついでに、余計なことですが、図形の中に初めて具体的に無理数を意識するのが、このあたりですね。実は円周率 π も無理数なのですが、定数 3.14 （実は近似値）として円の面積を求めるのに用いて無理数として意識することはあまりありませんね。

さて、上記 (1) 式を満たす正の整数 x, y, z をピタゴラス

数といいます。話を簡単にするため、x,y,z の中で x を一番小さい数、z を一番大きい数としましょう。

$$0 < x \leq y < z \qquad (2)$$

としましょうね。

２．２　ピタゴラス数にはどんな規則性があるのかな？

では皆さんはどんなピタゴラス数を知っていますか。

そう、3,4,5 ですね。$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ ですね。これはよく知られていますね。

他には？　そう、5,12,13 ですね。

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

ですね。

また一度見つけたピタゴラス数の倍数もピタゴラス数となることがわかりますので、話を簡単にするため、これらは除くことにしましょう。3,4,5 なら、6,8,10 も 9,12,15 もピタゴラス数となるので、これらは除きましょう。

次は？　一番小さい数が、3,5 ときたので 7 はどうですか。ちょっとむずかしいかな。7,24,25 はどうなりますか。

$$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$$

ですね。

(2) 式の条件のもとで (1) 式を満たすピタゴラス数をいくつか求めてきました。まとめますと、(x,y,z) の形でピタゴラス数を表すと、

(3,4,5),

(5,12,13),

(7,24,25)

でしたね。

ここで何か気がつきませんか。

そう、x,y,z の組の中で一番小さい数 x は奇数ではないか、とか、$z - y = 1$ で、しかも y は偶数ではないか、とか。

そこで、次の予想を立ててみましょう。

ピタゴラス数は次の予想を満たすのではないか。

予想１：x,y,z の組の中で一番小さい数 x は奇数である。

予想２：$z - y = 1$ が成り立つ。

予想３：y は偶数である。

まず、今までの延長として $x = 9$ の場合を考えてみましょう。9,40,41 が知られています。

$$9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681 = 41^2$$

ですね。上記予想をすべて満たしていますね。3,5,7,9 ときて、予想は正しそうですね。

では、7 と 9 の間の 8 はどうですか。8,6,10 は 4,3,5 の倍数なのでここではピタゴラス数として扱わないことにしましたね。

8,15,17 が知られています。

$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$$

ですね。

$(x,y,z) = (8,15,17)$ ですね。これを見ると、予想はすべてはずれていますね。

よって上記予想 1 から 3 はすべて誤りであることがわかりました。

ではピタゴラス数 x,y,z の間には規則性はないのでしょうか。

そのような規則性を見つけたいので、ちょっと式の展開やら因数分解やらをみてみましょう。

一般に次の式が成り立ちます。

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \qquad (3)$$

なぜなら、皆さんが中学校で習ったように、2 乗の展開式

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

を、辺々引き算すると、

$$(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$$

よって、

$$(A - B)^2 + 4AB = (A + B)^2$$

ここで $A = m^2, B = n^2$ とおくと、

$$(m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$$

よって、

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

となり、(3) 式が得られます。

(3) 式は (1) 式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

の形になっていますね。

$$x = m^2 - n^2,$$

$y = 2mn,$

$z = m^2 + n^2$

ですね。

m, n を正の整数とし、簡単のため $m > n$ としましょう。

$m = 2, n = 1$ とおくと、(3) 式より、

$(2^2 - 1^2)^2 + (2 \bullet 2 \bullet 1)^2 = (2^2 + 1^2)^2$

$\therefore \quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

同様に $m = 3, n = 2$ とおくと、(3) 式より、

$(3^2 - 2^2)^2 + (2 \bullet 3 \bullet 2)^2 = (3^2 + 2^2)^2$

$\therefore \quad 5^2 + 12^2 = 13^2$

$m = 4, n = 3$ とおくと、(3) 式より、

$(4^2 - 3^2)^2 + (2 \bullet 4 \bullet 3)^2 = (4^2 + 3^2)^2$

$\therefore \quad 7^2 + 24^2 = 25^2$

$m = 5, n = 4$ とおくと、(3) 式より、

$(5^2 - 4^2)^2 + (2 \bullet 5 \bullet 4)^2 = (5^2 + 4^2)^2$

$\therefore \quad 9^2 + 40^2 = 41^2$

ここまでは、$m - n = 1$ の例でした。

$m - n = 1$ の条件のもとでは、

$y = 2mn, z = m^2 + n^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} z - y &= m^2 + n^2 - 2mn \\ &= (m-n)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、予想２：$z - y = 1$ が成り立つ。

$y = 2mn$ だから、予想３：y は偶数である。

$x = m^2 - n^2$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= (m+n)(m-n) \\ &= (m+n) \bullet 1 \\ &= m + n \end{aligned}$$

$m - n = 1$ だから、m が奇数なら n は偶数、m が偶数なら n は奇数である。よって、$x = m + n$ は奇数になります。

x, y, z の組の中で x が一番小さい数となる条件を求めてみましょう。

x, y, z の組の中で z が一番大きい数となることは次のようにしてわかります。

$m^2 + n^2 > m^2 - n^2$ だから常に $z > x$

次に、$x < y$ となる条件を求めてみましょう。

$m^2 - n^2 < 2mn$ とすると、

$m^2 - 2mn - n^2 < 0$

$m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 < 0$

$(m-n)^2 - 2n^2 < 0$

$\{(m-n) + \sqrt{2}n\}\{(m-n) - \sqrt{2}n\} < 0$

$\therefore \quad -\sqrt{2}n < m - n < \sqrt{2}n$

$\therefore \quad (1 - \sqrt{2})n < m < (1 + \sqrt{2})n$

$m > n > 0$ だから、

$n < m < (1 + \sqrt{2})n$

よって、この条件を満たすとき、$x < y$ となります。

$m - n = 1$ の条件のもとで考えてみると、

$0 < m - n < \sqrt{2}n$

$1 < \sqrt{2}n$

$n \geq 1$ であるから、これは常に満たされます。

よって、予想１：x, y, z の組の中で一番小さい数 x は奇数である、の通り。

よって以上より、

$x = m^2 - n^2,$

$y = 2mn,$

$z = m^2 + n^2$

とおくと、

$x^2 + y^2 = z^2$

で、

$\underline{m - n = 1 \text{ の条件のもとでは}}$、

予想１：x, y, z の組の中で一番小さい数 x は奇数である。

予想２：$z - y = 1$ が成り立つ。

予想３：y は偶数である。

は、正しいことがわかりました。

$m = 4, n = 1$ とおくと、（$m - n = 1$ でないことに注意して）(3) 式より、

$(4^2 - 1^2)^2 + (2 \bullet 4 \bullet 1)^2 = (4^2 + 1^2)^2$

$\therefore \quad 15^2 + 8^2 = 17^2$

よって、以上より、m, n を正の整数、$m > n$ とすると、

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \tag{4}$$

とおくと、

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

より、$x^2+y^2=z^2$ となり、x,y,z はピタゴラス数となります。

２．３　すべてのピタゴラス数はどうしたら得られるの？

(4) 式 $x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$ ならば、$x^2+y^2=z^2$ となることがわかりました。

逆に、すべてのピタゴラス数は(4)式で得られるのでしょうか。すなわち、$x^2+y^2=z^2$ ならば、

$$x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$$

なのでしょうか。ただし m,n を正の整数、$m>n$ とします。

(1)式を満たす正の整数はすべて(4)式の形で得られるのでしょうか。(4)式の形以外にはないのでしょうか。

すでに解決されているのかもしれませんが、私もわかっていません。皆さんの課題として残しておきましょう。考えてみてください。

3．おわりに

中学生に話をするという想定で、ピタゴラス数について述べてみた。すべてのピタゴラス数を得るには？、という課題は今後に残されている。

４．参考文献

ネットで「ピタゴラス数」を検索すると、いろいろな話題に出会えるかもしれません。