

非 対 称 非 線 形 要 素 (第 3 報)

(可変非線形要素およびヒステラッシュの記述関数法)

嶺 勝 敏*

Unsymmetrical Nonlinear Element (3)

(Describing functional methods for Variable nonlinear element
and Hystelash)

by

Katsutoshi Mine

Abstract

The describing functions of the unsymmetrical nonlinear elements is considered on control loops and oscillatory systems.

In this paper I will describe the following problems.

- (1) Describing function method for a non-fixed Nonlinear element or Variable nonlinear element.
- (2) Describing function for a Hystelash (Hysteresis+Backlash) and sinusoidal response wave form.
- (3) Describing functions for other unsymmetrical nonlinear elements.

While these provide a satisfactory solution to design and analysis problems for a higher order nonlinear systems without harmonics and subharmonics.

1. ま え が き

従来の非線形要素の記述関数的な取り扱い方は、形状そのものに入力振幅、周波数および周囲環境依存性がないものとして処理する場合が多かったようである¹⁾。著者も前報までは、このような固定的な前提によって種々の非対称非線形要素について記述関数表²⁾および数値計算による特性曲線³⁾を求めて来た⁴⁾。

しかし実系の非線形特性には、後述のように非線形形状が固定的でないものもあり、2次の強制振動系において復原力の履歴特性に入力振幅による形状依存性がある場合の非線形方程式の記述関数的な解法が解説されている⁵⁾。

本報では、非線形形状の変化の実体に着目し、このような固定的でない非線形要素、可変非線形要素あるいは動非線形要素を有する制御系の安定問題の記述関数的な図式解法について報告する。

つぎに、非対称非線形要素の興味ある要素の1つとして、出力が一方で飽和し他方で飽和のない非対称ヒステ

ラッシュ（仮称、Hystelash: HysteresisとBacklashの合成語）の記述関数について述べる。

なお、前報³⁾に引きつづき非対称非線形要素の数値計算による特性曲線を示す。

2. 可変非線形要素の記述関数法的な手法

2-1 可変非線形要素の概要 非線形要素の形状は、厳密には殆どのが固定的でないと考えられる。すなわち入力振幅、周波数および周囲環境などの依存性を有する。このようないくつかの変数の値により形状変化をする非線形要素を、回路論での名称⁶⁾を参考にし、**可変非線形要素**と仮称する。

可変非線形要素の実例としては、直流電動機などの界磁による磁気ヒステリシス(B-H曲線)におけるHの変化に対するBの平均傾斜およびBに対するHの動作すきまの変化があげられる⁷⁾⁸⁾。なお磁気ヒステリシスは、入力振幅(H)を一定に保った状態で周囲温度を変えると平均傾斜および動作すきまが変化する⁹⁾。同様のことは強誘電体たとえばTiBaO₃などにも現われ、この場

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

合は周囲の気体によっても形状変化をする¹⁰⁾¹¹⁾。また、センデルタコアにおいてもDCから周波数を50(c/s)にすると動作すきまが約2倍に増加するものもある¹²⁾。

これらのことは、機械系についても同様にスプリングの荷重と変形履歴¹³⁾およびその温度依存性ならびに非線形摩擦などが考えられる。

2 ~ 2 記述関数法的手法 可変非線形要素の1例

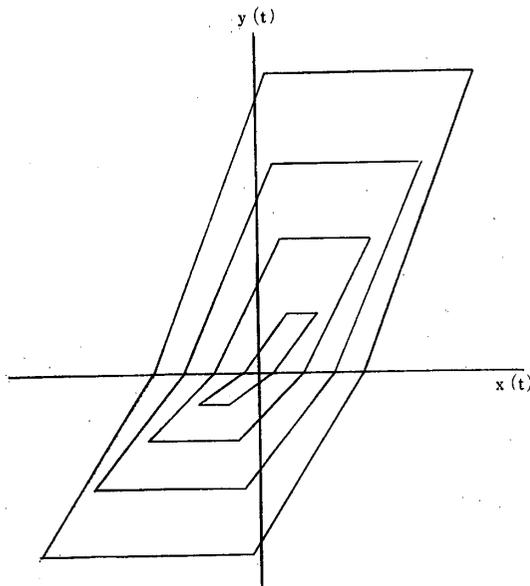


Fig. 1 One example for Variable Unsymmetrical Backlash

として、Fig. 1に示すような入力振幅によって傾斜と動作すきまが変化する非対称バックラッシュの記述関数的な手法を考察する。ただし形状の変化値は入力振幅に対して再現性を有するものとする。

Fig. 1の非対称バックラッシュの記号をFig. 2のようにきめれば、記述関数 $N(X, j\omega)$ は¹²⁾

$$N(X, j\omega) = a - jb \tag{1}$$

$$= \frac{K_1 + K_2}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) + \frac{X - 2\delta}{X} \cos \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) \right\} \right. \tag{2}$$

$$\left. - j \frac{2\delta(K_1 + K_2)}{\pi X} \left(1 - \frac{\delta}{X} \right) \right\}$$

ただし、 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ 。

(1)式より等価利得 $|N(X, j\omega)|$ および位相差 φ は

$$\left. \begin{aligned} |N(X, j\omega)| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} b/a \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

(2), (3)式より数値計算をすれば、非対称バックラッシュの $|N(X, j\omega)|$ および φ の X に対する K_2 をパラメータとする特性曲線は、Fig. 3のようになる。

つぎに、提案の入力振幅依存形状特性を有するFig.

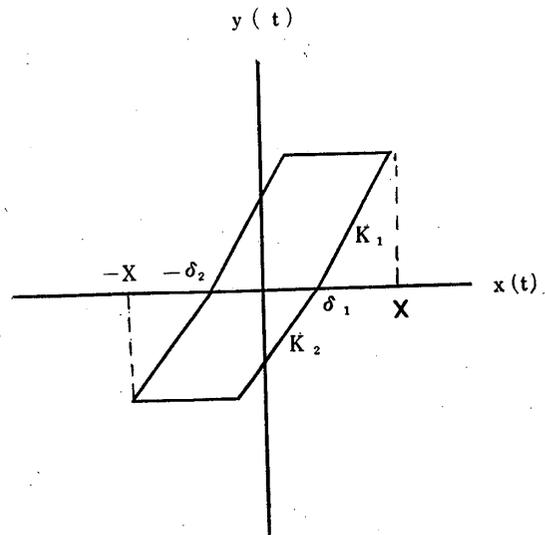


Fig. 2 Formalistic extension for Unsymmetrical Backlash

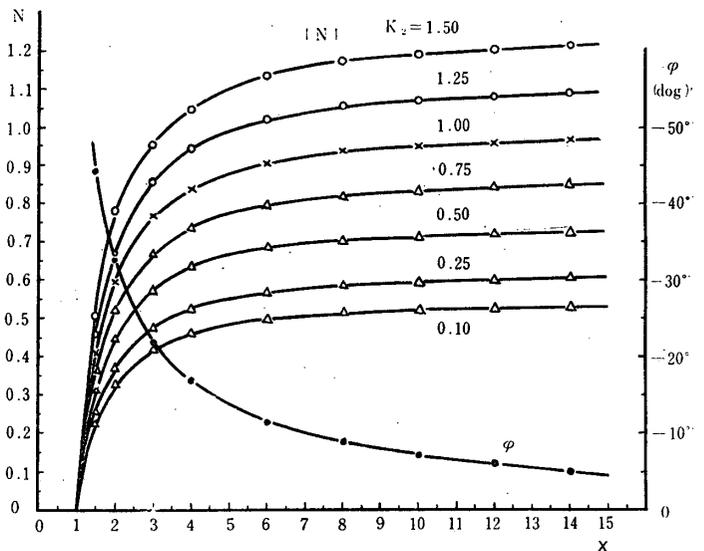


Fig. 3 Characteristic curves of the Backlash's describing functions, where $K_1=1, \delta_1=\delta_2=\delta=1$

1のような非対称バックラッシュの記述関数的な特性曲線とその作図法について述べる。

Fig. 2の記号を参考にしてFig. 1の非対称バックラッシュの入力振幅 X と傾斜 K_1, K_2 および動作すきま δ に着目して、Fig. 3より $|N(X, j\omega)|$ と φ の値を読みとりFig. 4にプロットする。つぎに他の X の値に対しても同様に逐次プロットしてFig. 4のような特性曲線を作る。

このFig. 4は、Fig. 1のような可変非対称非線形要素の記述関数したがって等価伝達関数を表現している。

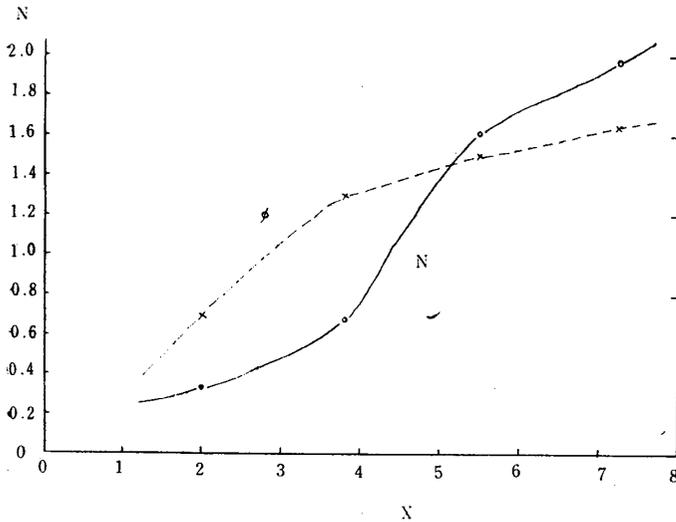


Fig. 4 Characteristic's curves for a Variable Nonlinear's $N(X, j\omega)$ (cf. Fig. 3).

2 ~ 3 例題 (制御系の安定問題)

いま Fig. 5 のような制御系において、制御対象の周波数伝達関数を $G_p(j\omega)$ 、可変非線形要素の等価線形化周波数伝達関数を $N(X, j\omega)$ とし、制御量 $C(j\omega)$ の検出系は理想的な補償¹⁵⁾がほどこされているとすれば下式が成立する。

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(X, j\omega) G_p(j\omega)}{1 + N(X, j\omega) G_p(j\omega)} \quad (4)$$

(4)式の分母の特性方程式から安定限界の式は

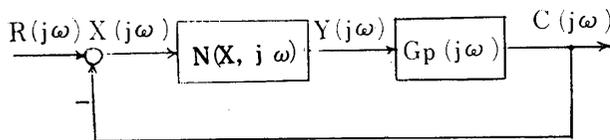


Fig. 5 Block diagram of a feedback control system including a Variable Nonlinear device.

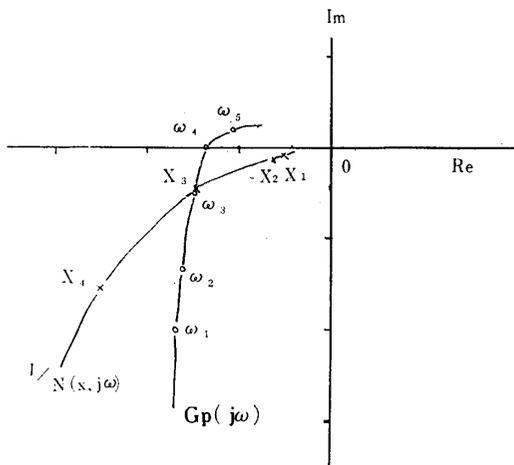


Fig. 6 Nyquist plots for a control system with a Variable Nonlinear device. (cf. Fig. 4)

Where, $G_p(j\omega) = \frac{14}{j\omega(10j\omega + 1)} e^{-j\omega}$

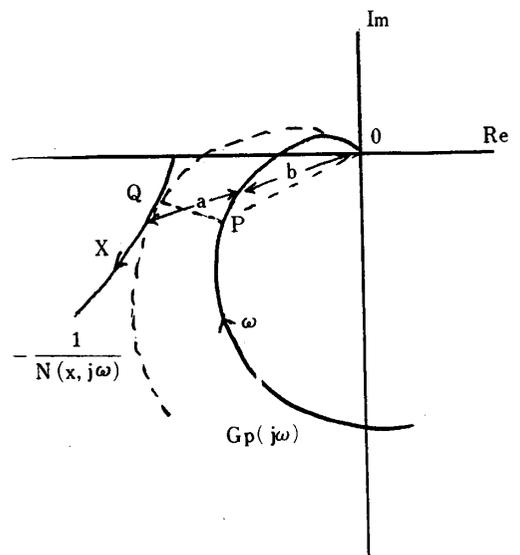


Fig. 7 Formalistic extension of the definition of M_{peak} and gain margin to the describing function.

$$G_p(j\omega) = -\frac{1}{N(X, j\omega)} \quad (5)$$

Fig. 6 に示すように、(5)式の $G_p(j\omega)$ のベクトル軌跡と Fig. 4 を利用して描いた $-1/N(X, j\omega)$ のベクトル軌跡の交点から、この固定的でない非線形要素を有する制御系のリミットサイクルの振幅と角周波数あるいは持続振動周期が求まる。

なお制御系が安定なる場合のゲイン余有は、Fig. 7 より求まる¹⁶⁾。

同様に、 M_{peak} と $Gain\ Margin$ は Fig. 7 から

$$M_{peak} = \frac{OP}{PQ \text{ (min. dist.)}} \quad (6)$$

$$Gain\ Margin = \frac{a+b}{b} \quad (7)$$

2 ~ 4 非線形々状が2変数で変る要素を含む制御系の記述関数的手法

たとえば、磁気ヒステリシスのように非線形々状が正弦波入力振幅 X のみならず温度 T でも変化する場合の記述関数的手法について考察する。(Fig. 8 参照)

まず Fig. 9 に示すように温度をパラメータとして T_1

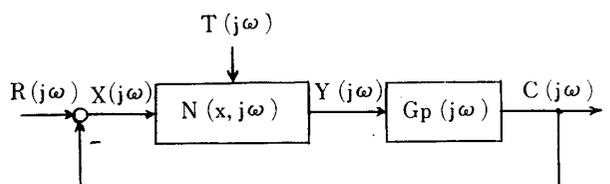


Fig. 8 Block diagram of a feedback control system including a Variable Nonlinear device with dual inputs.

$T_2 \dots \dots T_n$ 曲線を Fig. 4 と同様の手順で作図する。
つぎに, Fig. 10 のように Nyquist 線図の上に T

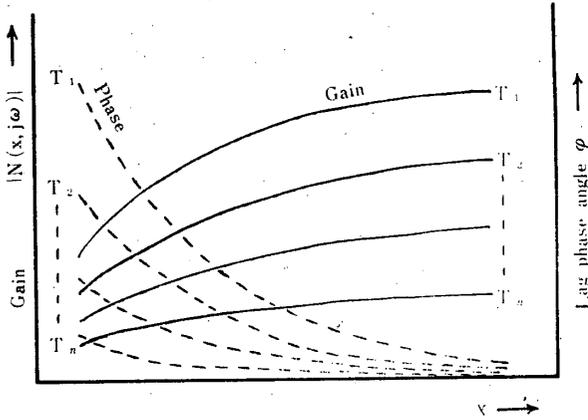


Fig.9 Characteristic curves of a Variable Nonlinear device's describing function with dual inputs, X and T.

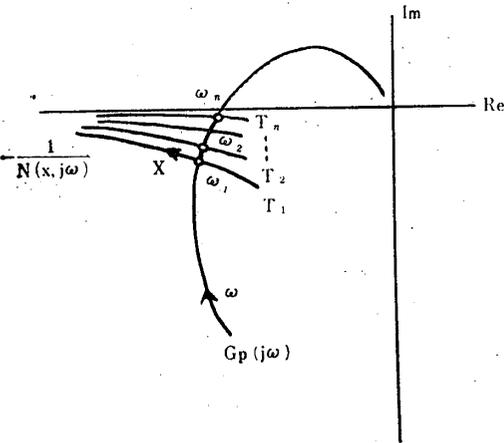


Fig.10 Nyquist plot for a feedback control system including a Variable Nonlinear device with dual inputs, X and T.

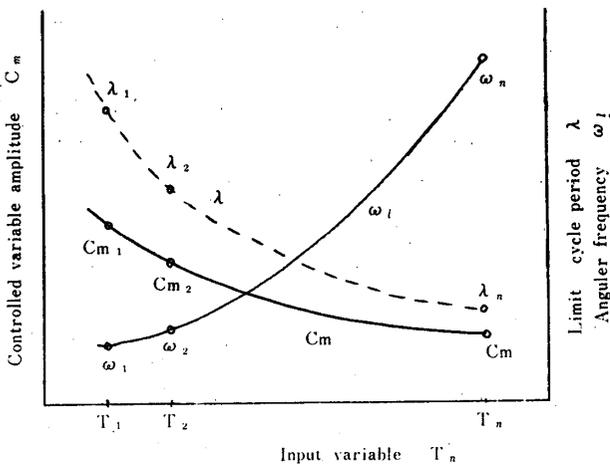


Fig.11 Characteristic curves of limit cycle for a Variable Nonlinear control system with dual input variables X and T. where $C_m = KX$ (K: forward gain)

パラメータとする $N(X, T, j\omega)$ の逆ベクトル軌跡を描けば, 線形系の $G(j\omega)$ のベクトル軌跡との交点から, Fig. 11 のような温度が変化した場合のリミットサイクル振幅と周期の変動特性曲線をうる. もちろん自励振動は Fig. 10 で示す場合のような安定なリミットサイクルとなる条件をみたしている場合である.

3. Hystelash の記述関数

たとえばプロセス制御系において, 管路抵抗が制御弁抵抗に比べて非常に大きい場合においては, 制御中心の位置によっては制御弁の有効流量特性が Fig. 12 のように一方では飽和, 他方ではバックラッシュの履歴特性に近似できる場合がある.

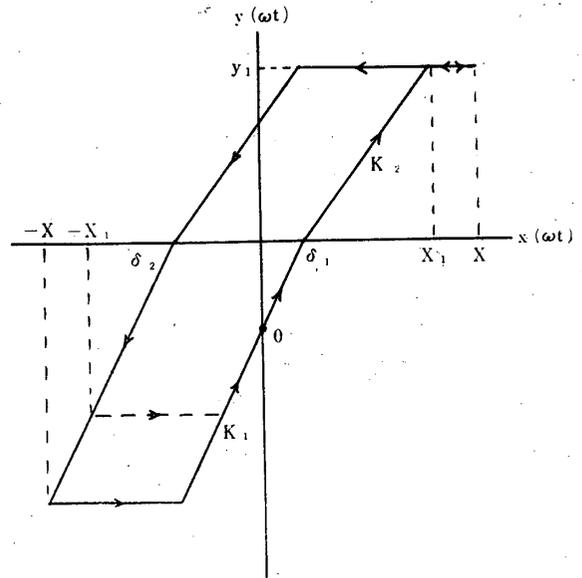


Fig.12 Formalistic extension for the Unsymmetrical Hystelash, where sinusoidal input $x = X \sin \omega t$ and $1 > X_1/X$.

このような非線形要素は, ヒステラッシュ (Hystelash) と呼ぶにふさわしいと考え名称の提案をする次第である.

つぎに, Fig. 12 の非対称ヒステラッシュの記述関数を求める. 入力 $x(\omega t) = X \sin \omega t$ とし, 出力を $y(\omega t)$ とする.

i) $\delta_1 < \delta_2, \delta_1/X \geq 1$ なる場合は, $y(\omega t) = 0$ であるから

$$N(X, j\omega) = 0 \tag{8}$$

ii) $\delta_1 < \delta_2, \delta_1/X > 1 > \delta_2/X$ なる場合は, $y(\omega t) = K_1(X - \delta_1)$ 一定であるから

$$N(X, j\omega) = 0 \tag{9}$$

iii) $\delta_1 < \delta_2, \delta_2/X < 1 < X_1/X$ なる場合は, 非対称バックラッシュとして動作するので, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ となると

き(2)式で表わされる。

iv) $1 > X_1/X$ なる場合は, Fig. 13の移動角(電気角)決定図よりTable. 1をうる。

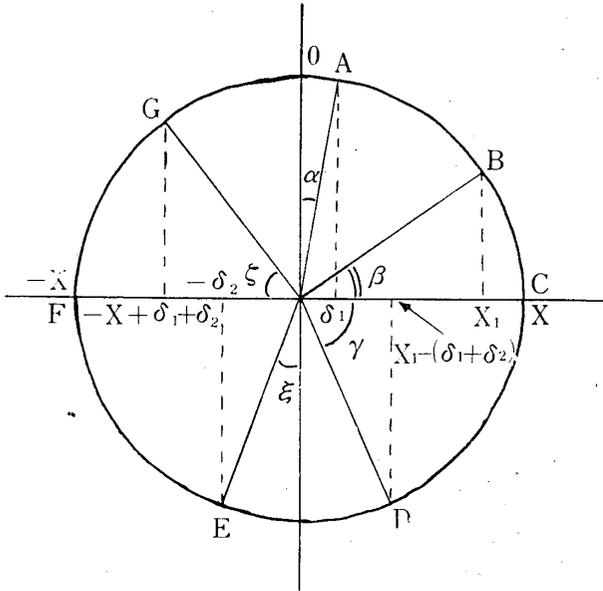


Fig.13 Circular diagram with a shift angles.

Table.1 Relation between $y(\omega t)$ and variations of shift angles.

Shift	Shift Angles	$y(\omega t)$
1 O A	$0 \leq \omega t \leq \alpha$	$K_2(x - \delta_1)$
2 A B	$\alpha \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} - \beta$	$K_1(x - \delta_1)$
3 B D	$\frac{\pi}{2} - \beta \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} + \gamma$	$K_1(X_1 - \delta_1)$
4 D E	$\frac{\pi}{2} + \gamma \leq \omega t \leq \pi + \xi$	$K_1(x + \delta_1)$
5 E F	$\pi + \xi \leq \omega t \leq 3\pi/2$	$K_2(x + \delta_2)$
6 F G	$\frac{3\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} + \zeta$	$-K_2(X - \delta_2)$
7 G O	$\frac{3\pi}{2} + \zeta \leq \omega t \leq 2\pi$	$K_2(x - \delta_1)$

ここで

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{\delta_1}{X} \quad (10)$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{y_1 + K_1 \delta_1}{K_1 X} \quad (11)$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{y_1 - K_1 \delta_2}{K_1 X} \quad (12)$$

$$\xi = \sin^{-1} \frac{\delta_2}{X} \quad (13)$$

$$\zeta = \cos^{-1} \frac{X - (\delta_1 + \delta_2)}{X} \quad (14)$$

$$N(X, j\omega) = a - jb$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{K_1}{2} (\pi - \alpha - \beta - \gamma + \xi) + \frac{K_2}{2} \right.$$

$$\left. (\pi + \alpha - \xi - \zeta) + \frac{\delta_1(K_2 - K_1)}{X} \cos \alpha \right.$$

$$+ \frac{K_1 - K_2}{4} \sin 2\alpha + \frac{K_1}{X} \sin \beta - \frac{K_1}{4} \sin 2\beta$$

$$+ \frac{K_1(X_1 - 2\delta_1)}{X} \sin \gamma - \frac{K_1}{4} \sin 2\gamma$$

$$+ \frac{K_1 \delta_1 - K_2 \delta_2}{X} \cos \xi + \frac{K_2 - K_1}{2} \sin 2\xi$$

$$+ \frac{K_2(\delta_2 - \delta_1 - X)}{X} \sin \zeta - \frac{K_2}{4} \sin 2\zeta \left. \right\}$$

$$- j \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3K_2}{4} + \frac{(K_2 - K_1)\delta_1}{X} \sin \alpha \right.$$

$$+ \frac{K_2 - K_1}{4} \cos 2\alpha + \frac{K_1 X_1}{X} \cos \beta - \frac{K_1}{4} \cos 2\beta$$

$$+ \frac{K_1(2\delta_1 - X_1)}{X} \cos \gamma + \frac{K_1}{4} \cos 2\gamma$$

$$+ \frac{K_1 \delta_1 - K_2 \delta_2}{X} \sin \xi + \frac{K_1 - K_2}{4} \cos 2\xi$$

$$+ \frac{K_2(\delta_1 + \delta_2 - X)}{X} \cos \zeta + \frac{K_2}{4} \cos 2\zeta \left. \right\}$$

(15)

この場合の基本正弦波応答波形は, Fig. 14のようになる。

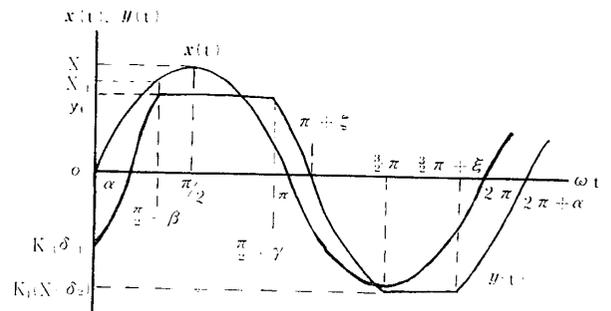


Fig.14 Input and output wave shapes for a sinusoidal input to the Unsymmetrical Hysteresis.

4. 種々の非対称非線形要素の特性曲線

前報³⁾では $K_2 = 1$ とし δ を変化した場合の特性曲線を示したが, 今回は δ を固定し, K_2 を変化した場合の特性曲線を Fig.15および Fig.16に示す。

5. む す び

非線形振動の挙動を非線形微分方程式を解いて求める

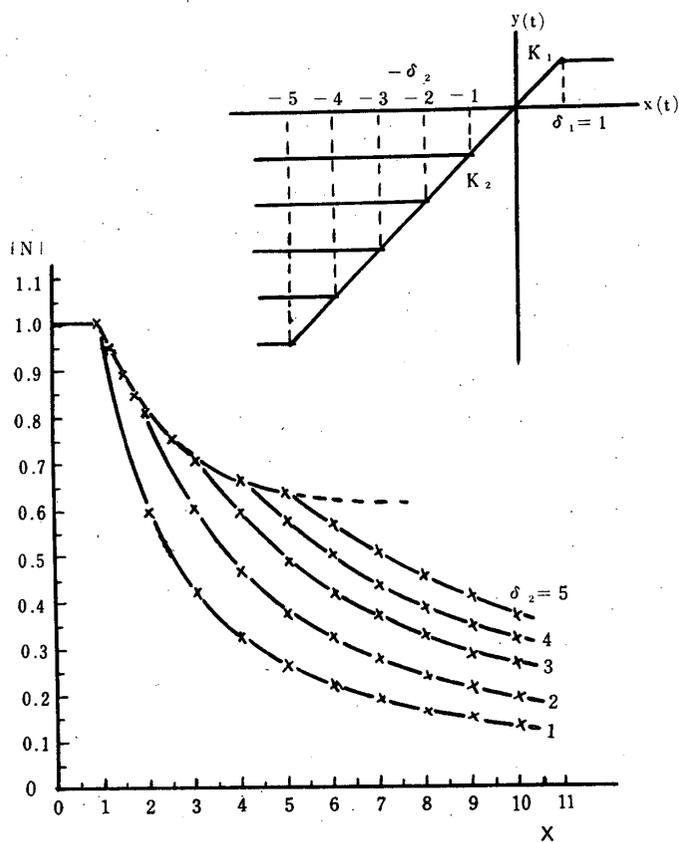


Fig.15 Characteristic curves of the Unsymmetrical saturations, where $K_1=K_2=1$, $\delta_1=1$.

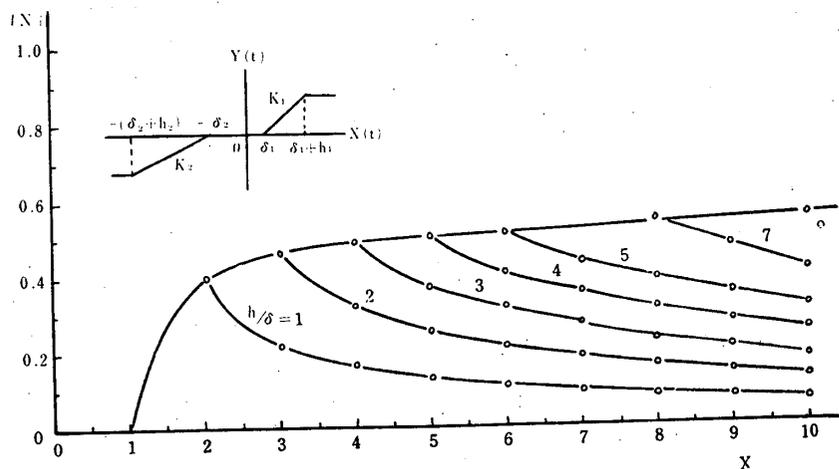


Fig.16 Characteristic curves of the Unsymmetrical saturations with dead zone, where $K_1=1$, $K_2=0.5$, $\delta_1=0.5$, $\delta_2=1$, and $h_1/\delta_1 = h_2/\delta_2 = h/\delta$.

ことは Van der Pol 以来おこなわれており、可変非線形要素を有する2階非線形微分方程式も解かれている。しかし、従来の方法に対して、非線形要素の形状変化の実体に着目して記述関数法的な図式解法を与えた点、ならびにプロセス制御系に多くみられる高次積分系において可変非線形要素を有する場合の設計あるいは解析の手法を与えた点に、本報告の実用性があると考え。

非対称ヒステラッシュならびにその他の非対称非線形要素の記述関数や特性曲線は、上記の手法を実施する場合に役立つであろう。Fig. 2, Fig. 15 および Fig. 16 以外の形状の非対称非線形要素についても記述関数の特性曲線を求めているが、紙面の都合で次報で述べる。

なお、非定常応答波形ならびに実系については、非対称非線形々状を固定的と仮定してプロセスの自励系解析をする¹⁶⁾ことから始めて、漸次可変非線形要素を有する制御系について実験中である。

終りに、常々御激励を賜わっている山県清校長、九工大井上順吉教授、三菱化成工業(株)藤田威雄部長、山工学部神谷健児助教授ならびに第8回自動制御連合講演会¹⁷⁾において御討論を賜わった味の素中研山下直博士、数値計算を御手伝い下さった卒業研究学生、島崎、倉重、江藤、畝田、河崎、水崎、葉玉の諸君に深謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 例えば R. J. Kochenburger: Analyzing Contactor Servomechanisms by Frequency-Response Methods, Electrical Engineering, PP. 687~892, Aug. (1950)
- 2) 嶺, 足立: 非対称非線形要素(第1報), 本誌, Vol. 1-1, No. 1, PP. 73~80, (1964)
- 3) 嶺, 許斐: 非対称非線形要素(第2報), 本誌, Vol. 2-1, No. 2, PP. 47~53, (1965)
- 4) 嶺: 記述関数の動向, アナログ計算機を用いた非線

- 形制御の解析ゼミナール資料, PP. 1~67, 山口県電力協議会主催, (1965)
- 5) 榎木: 非線形振動論, PP. 121~123, 共立出版, (1958)
- 6) 喜安, 戸田: 可変定数回路論, 現代エレクトロニクス選書10, 共立出版, (1960)
- 7) J. E. Gibson & F. B. Tuteur: control System Component, PP. 182~184, Mc Graw Hill (1958)
- 8) 宮入, 片岡: ヒステリシス電動機の基本等価回路, 電学誌, Vol. 85-10, No. 925, PP. 1740~1748, (1965)
- 9) 水上: コアメモリスタック(その1), 三菱電機技報, Vol. 39, PP. 1273~1281, Oct. (1965)
- 10) 熊谷, 藤本: 強誘電体とその応用, PP. 63~64, P. 97, PP. 250~251, 朝倉書店, (1961)
- 11) 籠田, 嶺: Ba Ti O₃ 磁器振動子による定値点の温度検出, 本誌 Vol. 1-1, No. 1, PP. 81~85, (1964)
- 12) 和久井: 直流コンバータ回路, TV学誌, Vol. 19, No. 11, P. 801, (1965)
- 13) M. G. Fangemann: Instruments of Automation, Vol. 27, pp. 780~782, May. (1954)
- 14) 嶺, 川崎: 等価無時定数検出法, 機学会43期東京秋期講演前刷集, No. 139, PP. 63~66, (1965)
- 15) J. E. Gibson: Nonlinear Automatic Control, PP. 389~395, Mc Graw Hill, (1963)
- 16) 嶺, 足立: 熱系プロセスの自励振動における位相進み現象, 機学会41期全国大会前刷集, No. 99, PP. 93~96 (1963)
- 17) 嶺, 足立: バックラッシュと位相進み現象を有する熱系プロセス自励振動の解析, 第8回自動制御連合講演会論文集, PP. 263~264, (1965)

(昭和40年12月25日受理)