

逆関数補償形等価無時定数検出法 (第2報)

嶺 勝敏*・川崎元之*

Nontime Delay Detecting Method with Inverse Transfer Function Type Compensation. (Report No. 2)

by

Katsutoshi Mine and Motoyuki Kawasaki

Abstract

We reported universal principle about method with inverse transfer function type compensation. In the report, we explained in detail the theoretical analysis and the data by analog computer about step response on condition that detecting element was first-order lag and the transfer function was established.

In this report we explain the theory of ramp response, trapezoid response and frequency response in case of using method with inverse transfer function type compensation of first-order lag detecting element.

1. ま え が き

計測系における従来からの動誤差補償法については、前報¹⁾のまえがきで述べた以外の方法として、同一特性を有する熱電対において時定数の等しい2本に対して時定数の大きいもの1本を極性を考慮して直列に接続する熱電式温度検出誤差補償法²⁾、2種の物体の熱膨張の差を利用する方法³⁾、電気回路による方法⁴⁾などが報告されている。

これらは、比例不完全微分動作による補償法であるので、検出要素が1次おくれ系である場合においても完全には動誤差の補償が行なえないのであって、1950年に Ziegler と Nichols が発表⁵⁾した方法とその発想を等しくするものと考えられる。

われわれは、検出要素が1次おくれ系以外の計測系についても逆関数形補償をおこなえば、動誤差のみならず定常誤差も零にできることを述べ⁶⁾、さらに例として、1次おくれ検出要素の逆関数補償系のステップ応答について詳細に考察し、特に逆関数形補償要素の調整が完全でない場合、あるいは完全調整後検出要素のパラメータが変化した場合におけるステップ応答の有限整定条件およびアナログ計算機での実験結果について報告した¹⁾⁷⁾。

本報では、1次おくれ検出系の逆関数形補償法における、ランプ、梯形波および周波数応答についての解析、

ならびに有限整定条件について述べる。

2. 1次おくれ検出系の逆関数形補償

2-1 ランプ応答 (a) 基本式 Fig. 1に示すような検出における動誤差補償系において、検出要素の伝達

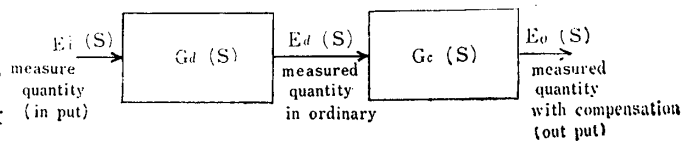


Fig.1 Block diagram of non time delay detecting system with inverse transfer function type compensation.

関数 $G_d(S)$ があらかじめ動特性を測定することによって求まっており、かつタイムインバリエントである場合、カスケードに接続する補償要素の伝達関数 $G_c(S)$ を $G_c(S) = 1/G_d(S)$ なる逆伝達関数形に選べば、 $E_o(S) = E_i(S)$ となり理想検出系を実現できる。

いま、 $G_d(S)$ と $G_c(S)$ が(1)式で表わされるときランプ入力 $E_i(S) = \mathcal{L} E_i K t = E_i K / S^2$ に対する応答 $\mathcal{L} E_o(S) = E_o(t)$ は、重極を含む場合の展開定理¹⁾より(3)式のように示すことができる。

$$G_d(S) = \frac{K_d}{1 + T_d S}, \quad G_c(S) = \frac{1 + T_c S}{K_c} \dots (1)$$

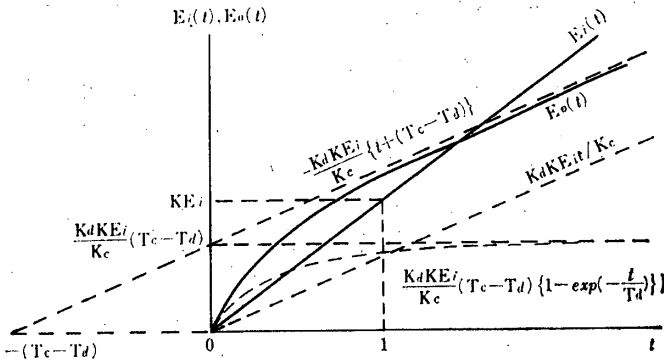
* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

$$E_o(S) = G_a(S) \cdot G_c(S) \cdot E_i(S) = \frac{K_d K E_i}{K_c} \frac{1 + T_c S}{S^2 (1 + T_d S)} \quad \dots\dots(2)$$

$$E_o(t) = \mathcal{L}^{-1} E_o(S) = \frac{K_d K E_i}{K_c} \left\{ t + (t_c - T_d) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) \right\} \right\} \quad \dots\dots(3)$$

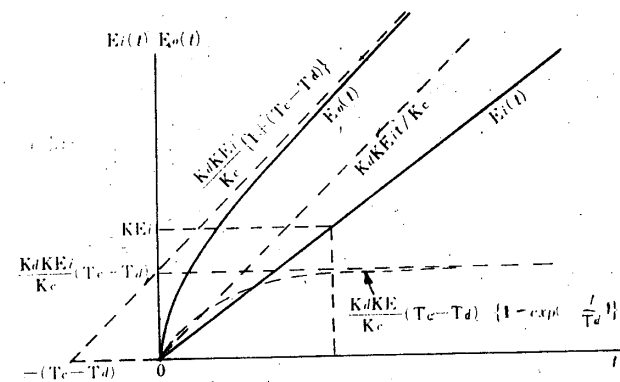
(3)式で、 $K_c = K_d$ 、 $T_c = T_d$ に調整すれば、 $E_o(t) = K E_i t = E_i(t)$ となる。同様に(3)式より初期値は、 $E_o(t)_{t=0} = 0$ 最終値は $E_o(t)_{t=\infty} = \infty$ となる。

(b) 応答波形と有限整定条件 (3)式において、 $T_c > T_d$ なるときを Fig. 2 に、 $T_c < T_d$ を Fig. 3 に示す。ともに、(a)は $K_d/K_c < 1$ なるときで、(b)は $K_d/K_c > 1$ なる場合である。



(a) $T_c > T_d$, $K_d/K_c < 1$

Fig. 2-a



(b) $T_c > T_d$, $K_d/K_c > 1$

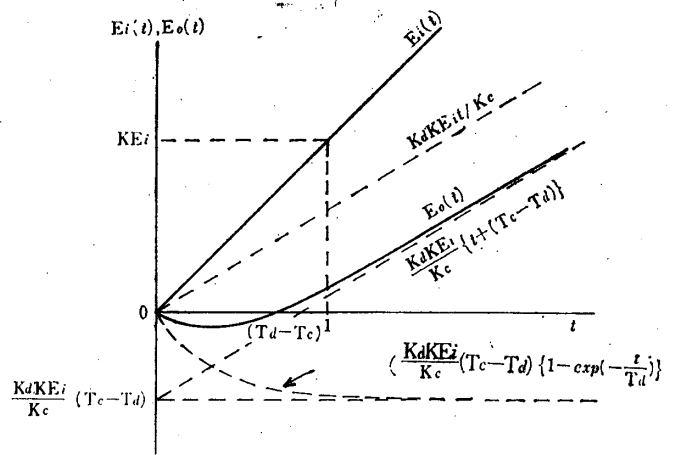
Fig. 2-b

Fig. 2 Ramp responses of first order detecting element with inverse type compensation, where $T_c > T_d$

Fig. 2 および Fig. 3 より、許容誤差を $\pm \epsilon_a$ とすれば、有限整定条件は

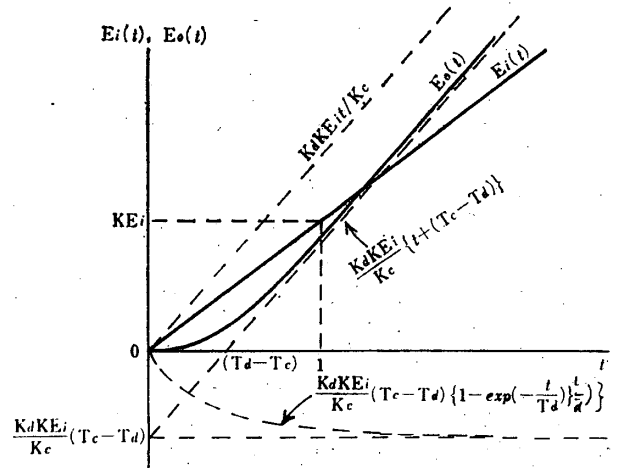
$$|\epsilon_a| > |E_o(t) - E_i(t)| \quad \dots\dots(4)$$

よって



(a) $T_c < T_d$, $K_d/K_c < 1$

Fig 3-a



(b) $T_c < T_d$, $K_d/K_c > 1$

Fig. 3-b

Fig. 3 Ramp responses of first order detecting element with inverse function type compensation, where $T_c < T_d$

$$|\epsilon_a| > \left| \frac{K_d K E_i}{K_c} \left\{ \left(1 - \frac{K_c}{K_d} \right) t + (T_c - T_d) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) \right\} \right\} \right| \quad \dots\dots(5)$$

ここで、定常誤差を ϵ_s とおけば

$$\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ E_o(t) - E_i(t) \} \quad \dots\dots(6)$$

有限整定するためには、 $|\epsilon_a| > |\epsilon_s|$ を満足しなければならない。この関係を(5)式の右辺に適用すれば、右辺第1項の t の項が零でなければ $t \rightarrow \infty$ で無限大となるので不都合となる。よってランプ応答における有限整定のための必要条件は、 $K_c / K_d = 1$ である。

したがって、(6)式を満足するための必要十分条件は、 $K_c = K_d$ かつ

$$|\epsilon_a| > |K E_i (T_c - T_d)| \quad \dots\dots(7)$$

これらの条件を満足している場合の一例を Fig. 4 に示す。ここで動誤差 ϵ_d の最大値 $\epsilon_{dm} = \epsilon_s$ であり、かつ $t = \infty$ のときであることがわかる。

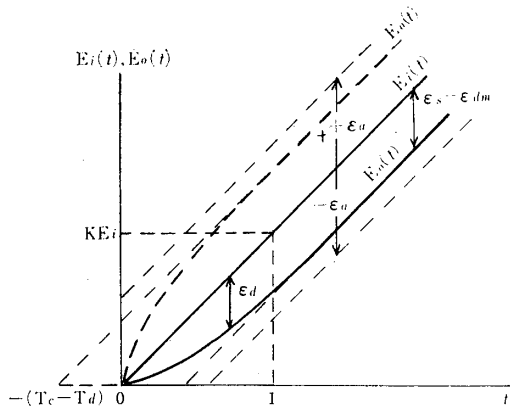


Fig. 4 Ramp responses of first order detecting element with inverse function type compensation, where $K_c = K_d$, real and dot line $E_o(t)$ are $T_c < T_d$ and $T_c > T_d$ conditions.

2-2 梯形波応答 (a) 基本式 梯形波応答の基本式は、前報¹⁾で述べたので物理的意味について解説する²⁾。

$$E_i(t) = E_i \cdot K \cdot t \cdot u(t) - E_i \cdot K \cdot (t - \tau) u(t - \tau) \dots\dots(8)$$

$$E_o(t) = \frac{K_d K E_i}{K_c} \left\{ (T_c - T_d) \{u(t) - u(t - \tau)\} + \{tu(t) - (t - \tau)u(t - \tau)\} - (T_c - T_d) \{ \exp(-tu(t)/T_d) - \exp(-(t - \tau)u(t - \tau)/T_d) \} \right\} \dots\dots(9)$$

(9)式は、 $K_{c1} = K_d$, $T_c = T_d$ なるとき(8)式と等しくなり、 $E_o(t) = E_i(t)$, よって動誤差 ϵ_d , 定常誤差 ϵ_s ともに零となる。

つぎに、 $E_o(t)$ の初期値および最終値は(9)式より

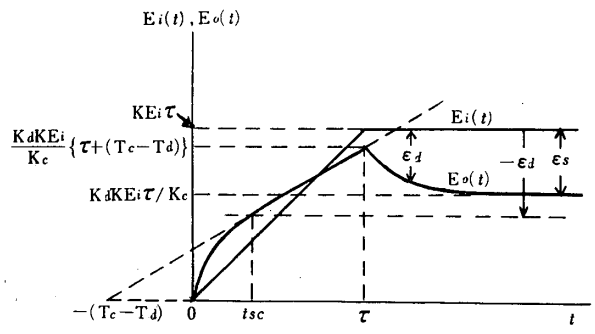
$$E_o(t)_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} E_o(t) = 0 \dots\dots(10)$$

$$E_o(t)_{t=\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} E_o(t) = K_d K E_i \tau / K_c \dots\dots(11)$$

(b) 応答波形と有限整定条件 $K_c \neq K_d$, $T_c \neq T_d$ なるときの梯形波応答波形は、Fig. 5 および Fig. 6 のようになる。Fig. 5 は $T_c > T_d$ なるときであり、Fig. 6 は $T_c < T_d$ なる場合である。

なお $K_c = K_d$, $T_c \neq T_d$ なるときの梯形波応答波形は、Fig. 7 のようになる。Fig. 7 より最大動誤差 ϵ_{dm} は³⁾,

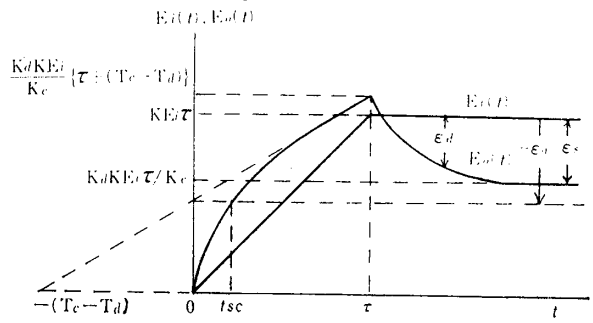
$$\begin{aligned} \epsilon_{dm} &= \lim_{t \rightarrow \tau} E_o(t) - E_i K \tau \\ &= \frac{K_d K E_i}{K_c} (T_c - T_d) \left\{ 1 - \exp(-\tau/T_d) \right\} \\ &\quad + E_i K \tau \left(\frac{K_d}{K_c} - 1 \right) = K E_i (T_c - T_d) \left\{ 1 - \exp(-\tau/T_d) \right\} \dots\dots(12) \end{aligned}$$



(a) $K_d / K_c < 1$

$$E_i K \tau > \frac{K_d K E_i}{K_c} \{ \tau + (T_c - T_d) \}$$

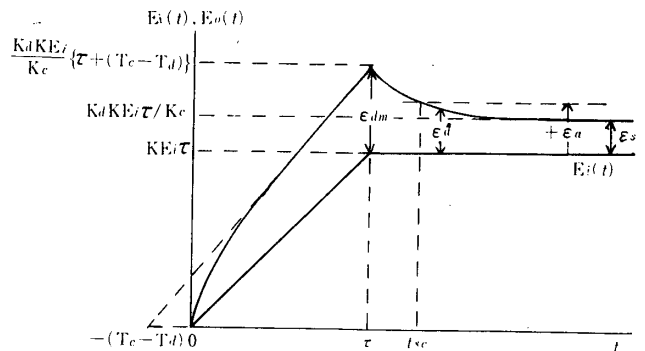
Fig. 5-a



(b) $K_d / K_c < 1$

$$E_i K \tau < \frac{K_d K E_i}{K_c} \{ \tau + (T_c - T_d) \}$$

Fig. 5-b



(c) $K_d / K_c > 1$

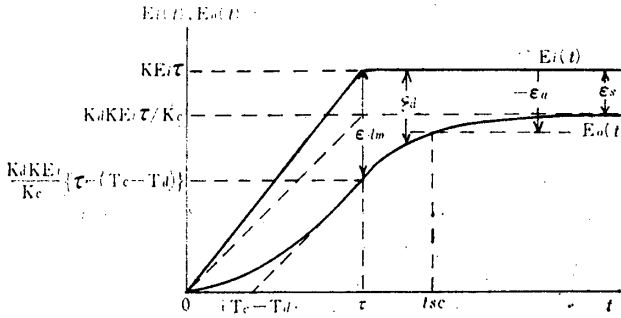
$$E_i K \tau < \frac{K_d K E_i}{K_c} \{ \tau + (T_c - T_d) \}$$

Fig. 5-c

Fig. 5 Trapezoid responses of first order detecting system with inverse function type compensation, where $T_c > T_d$ and $T_d \ll \tau$.

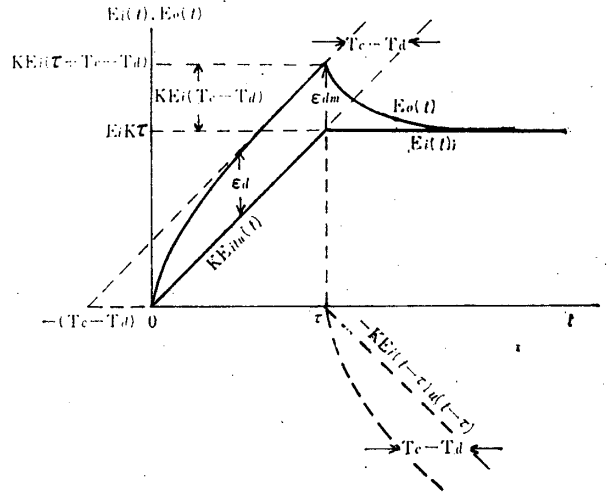
つぎに $K_c \neq K_d$, $T_c \neq T_d$ なるときの有限整定条件を考察する。まず定常誤差を ϵ_s とすれば Fig. 5, Fig. 6 および(11)式より

$$\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ E_o(t) - E_i(t) \} = K E_i \tau \left(\frac{K_d}{K_c} - 1 \right) \dots\dots(13)$$



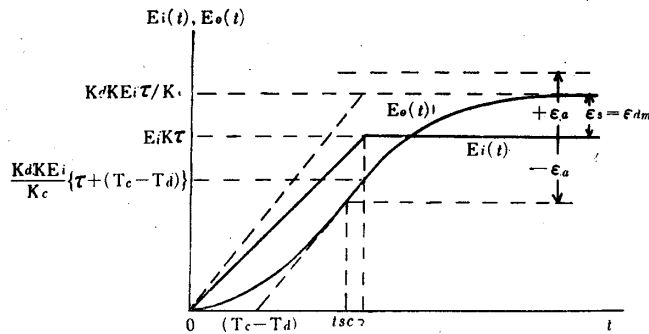
(a) $T_c < T_d, K_d/K_c < 1, T_d \ll \tau$

Fig. 6-a



(a) $T_c > T_d, K_a/K_c = 1, T_d \ll \tau$

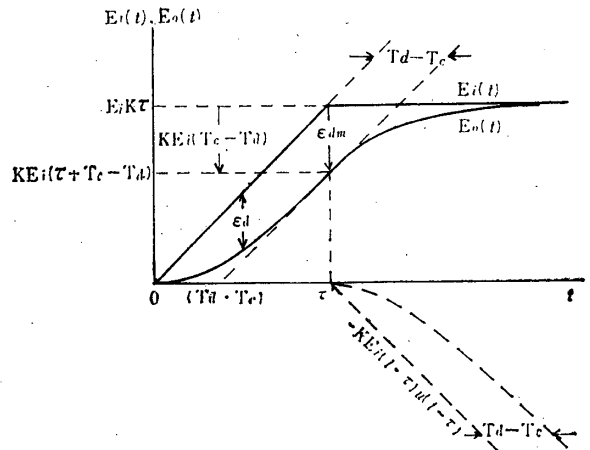
Fig. 7-a



(b) $T_c < T_d, K_d/K_c > 1, T_d \ll \tau$

$$\tau \left(\frac{K_c}{K_d} - 1 \right) > T_c - T_d$$

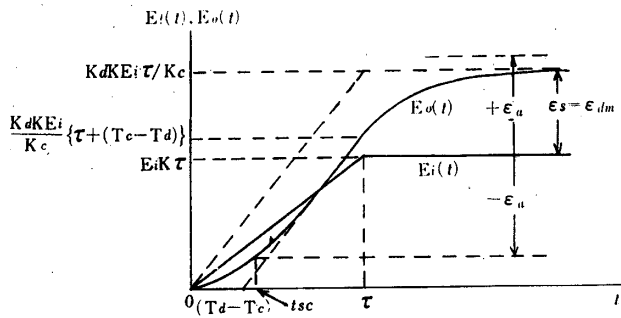
Fig. 6-b



(b) $T_c > T_d, K_d/K_c = 1, T_d \ll \tau$

Fig. 7-b

Fig. 7 Trapezoid responses of first order detecting system with inverse function type compensation, where $K_d/K_c = 1$ and $T_d \ll \tau$.



(c) $T_c < T_d, K_d/K_c > 1, T_d \ll \tau$

$$\tau \left(\frac{K_c}{K_d} - 1 \right) < T_c - T_d$$

Fig. 6-c

Fig. 6 Trapezoid responses of first order detecting system with inverse function type compensation, where $T_c < T_d$ and $T_d \ll \tau$

上式で $K_c = K_d$ に調整すれば, Fig. 7からも明らか
なように $\epsilon_s = 0$ となる. よって K_c の調整が定常誤差
に対して支配的であることがわかる.

有限整定のためには $|\epsilon_a| > |\epsilon_s|$ を満足しなければなら
ないので(13)式より有限整定条件はつぎのようになる.

$$|\epsilon_a| > \left| KE_i \tau \left(\frac{K_d}{K_c} - 1 \right) \right| \quad \dots (14)$$

上式から, $KE_i \tau$ の値が大きい程 ϵ_s が大となり, か
つ K_c の調整が大切なことがわかる. しかし, K_c が完
全に K_d と一致するように調整されていなくても(14)式
を満足しておれば有限整定する. なお T_c, T_d はこの
式に関係していないことがわかる.

ランプ応答の有限整定条件式(7)式と比較すれば, (7)式
には $K_c = K_d$ なる必要条件がある点および T_c, T_d が
関係している点にランプ応答の場合の特長がある.

しかし, 実際系について考えれば, ランプ入力 $t \rightarrow \infty$
で無限大となるが, このような入力は存在しないと考
えてよいので, 梯形波入力の場合について考察する方が
実際的と考えられる. なお, 厳密な意味でのステップ入

力も実際には少ないと考えられるので、梯形波応答について詳細に論ずる意義があると考え、

そこでステップ応答と比較すれば、前報¹⁾の(13)式よりステップ応答の有限整定条件は、

$$|\varepsilon_a| > \left| E_i \left(\frac{K_d}{K_c} - 1 \right) \right| \quad \dots\dots(15)$$

上式を(14)式と比較すれば、非常に似ていることがわかる。ただ(15)式は右辺に $K\tau$ が掛っていない点だけが異なっている。

つぎに、有限整定条件を満足している場合における許容誤差 ε_a と整定時間 t_{sc} との関係は、

$$\varepsilon_a = E_o(t_{sc}) - KE_i\tau \quad \dots\dots(16)$$

よって具体的には、(16)式と(9)式から、

$$\begin{aligned} \varepsilon_a = & \frac{K_d KE_i}{K_c} \left\{ (T_c - T_d) \left\{ 1 - u(t_{sc} - \tau) \right\} \right. \\ & + \left\{ t_{sc} - \frac{K_c}{K_d} \tau - (t_{sc} - \tau) u(t_{sc} - \tau) \right\} \\ & \left. - (T_c - T_d) \left\{ \exp(-t_{sc}/T_d) - \exp \right. \right. \\ & \left. \left. \left(-(t_{sc} - \tau) u(t_{sc} - \tau) / T_d \right) \right\} \right\} \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

上式は、 $t_{sc} - \tau > 0$ なるとき $u(t_{sc} - \tau) = 1$ 、 $t_{sc} - \tau < 0$ なるとき $u(t_{sc} - \tau) = 0$ であるから、 $t_{sc} > \tau$ および $t_{sc} < \tau$ なるときでも成立する。

2-3 周波数応答 (a) 基本式 被測定量または入力 $E_i(t)$ が $E_i(t) = E_i \sin \omega_n t$ なるときの応答 $E_o(t)$ は、

$$\begin{aligned} E_o(t) = \mathcal{L}^{-1} E_o(S) = \mathcal{L}^{-1} \frac{K_d (1 + T_c S)}{K_c (1 + T_d S)} \frac{E_i \omega_n}{S^2 + \omega_n^2} \\ = \frac{K_d \omega_n E_i}{K_c} \left\{ \frac{(T_d - T_c) \exp(-t/T_d)}{1 + T_d^2 \omega_n^2} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1 + T_c^2 \omega_n^2}{(1 + T_d^2 \omega_n^2) \omega_n^2}} \sin(\omega_n t + \phi) \right\} \quad \dots\dots(18) \end{aligned}$$

ここで

$$\phi = \tan^{-1}(1/T_d \omega_n) - \tan^{-1}(1/T_c \omega_n) \quad \dots\dots(19)$$

(18)式の右辺第1項は、過渡項であり、 T_d の値が減衰特性を支配し、過渡項の初期値は $(T_d - T_c) / (1 + T_d^2 \omega_n^2)$ に $K_d \omega_n E_i / K_c$ を乗じた値となる。なお、 $T_c = T_d$ に調整すればこの項は零となり、 $E_o(t)$ は定常振動項となる。なお、定常振動の振幅を A とすれば、

$$A = \frac{K_d \omega_n E_i}{K_c} \sqrt{\frac{1 + T_c^2 \omega_n^2}{(1 + T_d^2 \omega_n^2) \omega_n^2}} \quad \dots\dots(20)$$

過渡項の初期値を B とすれば、

$$B = \frac{K_d \omega_n E_i}{K_c} \frac{T_d - T_c}{1 + T_d^2 \omega_n^2} \quad \dots\dots(21)$$

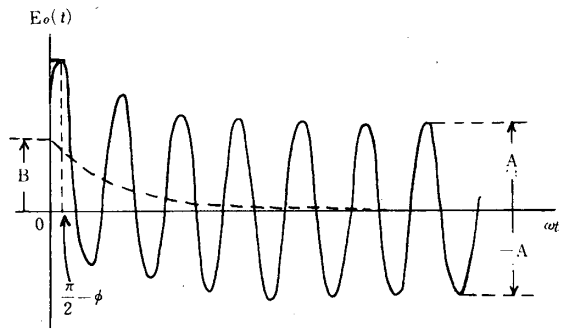
ここで、(18)式は下式のように書ける。

$$E_o(t) = B \exp(-t/T_d) + A \sin(\omega_n t + \phi) \quad \dots\dots(22)$$

上式で位相差 ϕ は、 $T_c = T_d$ のとき零、 $T_c < T_d$ の

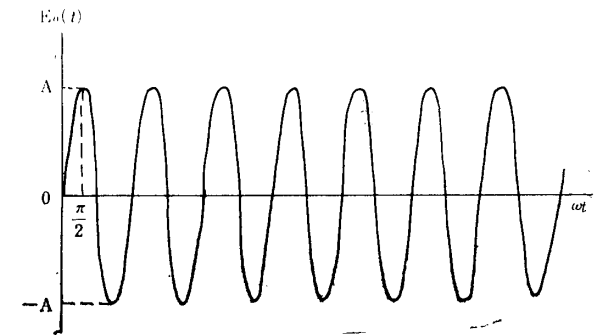
とき進み角、 $T_c > T_d$ のとき遅れ角となる。

Fig 8 に(22)式の応答波形を示す。



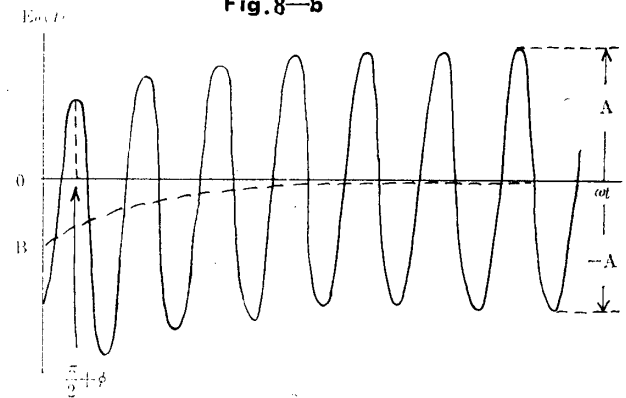
(a) $T_c < T_d$

Fig. 8-a



(b) $T_c = T_d$

Fig. 8-b



(c) $T_c > T_d$

Fig. 8-c

Fig.8 Sinusoidal responses for first order detecting system with inverse function type compensation.

(b) **Bode 線図** この検出補償系の周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は、

$$G(j\omega) = \frac{E_o(j\omega)}{E_i(j\omega)} = \frac{K_d}{K_c} \frac{1 + j\omega T_c}{1 + j\omega T_d} \quad \dots\dots(23)$$

ここで、利得を g (db)、位相を φ (deg) とおけば、

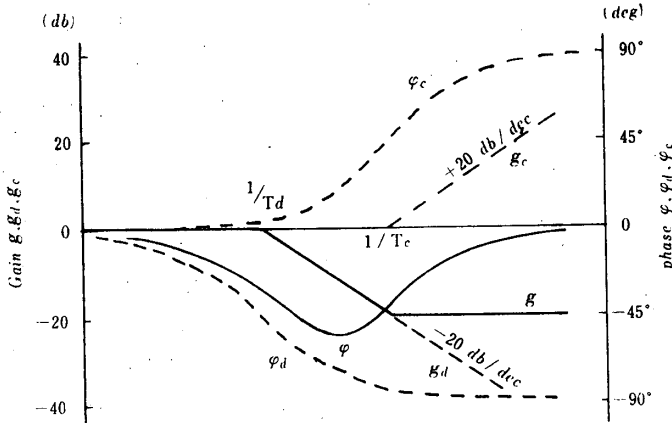
$$\begin{aligned} g = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} K_d / K_c \\ + 20 \log_{10} (1 + \omega^2 T_c^2)^{1/2} - 20 \log_{10} \end{aligned}$$

$$(1 + \omega^2 T_d^2)^{1/2} \quad \dots\dots(24)$$

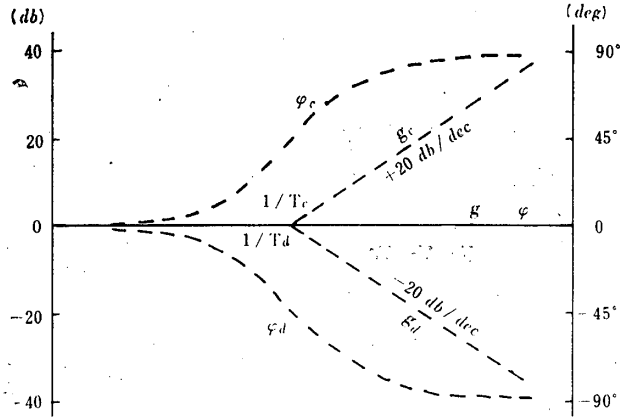
$$\varphi = \tan^{-1} \omega T_c - \tan^{-1} \omega T_d \quad \dots\dots(25)$$

24, 25式よりBode線図は, Fig. 9 のようになる.

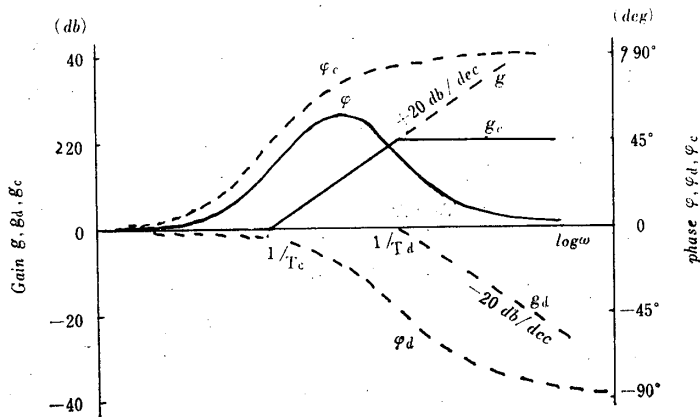
Fig. 9において, (a) $T_c < T_d$ では位相遅れ補償系と



(a) $T_c < T_d$
Fig. 9-a



(b) $T_c = T_d$
Fig. 9-b



(c) $T_c > T_d$
Fig. 9-c

Fig. 9 Bode diagrams for first order detecting system with inverse function type compensation, where $K_d/K_c = 1$.

なり, (c) $T_c > T_d$ では位相進み補償系, (b) $T_c = T_d$ では理想検出系となることがわかる. $K_d/K_c \neq 1$ では 24式右辺第1項の直流分の作用で利得曲線のみが上下に移動する.

5. む す び

1次おくれ検出系の逆関数形補償法における, ランプ, 梯形波, 周波数応答波形の解析ならびに有限整定条件について述べた.

計測における情報量あるいは周波数帯域は, 所要目的以上にとると不要のノイズで必要な情報がマスクされることや補償器自体の製作上の問題点などが生じ, 必ずしも有利とならないことが多い.

しかし, ノイズまでも打ち消したい制御系の検出器としての利用が期待される.

高次おくれ検出要素に対する逆関数形補償法, 検出部のパラメータが変動する系ならびに間接測定系に対する本方式の適用⁹⁾ならびに実系についても実験中である.

参 考 文 献

- 1) 嶺, 川崎: 本誌, Vol. 2-1, PP. 55~64, (1965)
- 2) 高橋: 自動制御, PP. 53, 科学技術社, (1954)
- 3) 榎木, 和田, 貞本: 空気圧式比例+微分型温度検出装置について, 制御工学, Vol. 5, No. 3, PP. 17~22, (1961)
- 4) 金田: 内燃機関のガス温度の測定, 機学会第134回講習会予稿, PP. 17~26, (1960)
- 5) J. G. Ziegler & N. B. Nichols: Dynamic Accuracy in temperature measurement, Instruments, 23, PP. 60~69, (1950)
- 6) 嶺, 川崎: 等価無時定数検出法, 機学会43期東京秋期学術講演大会予稿, No. 139, PP. 63~66, (1965)
- 7) 嶺, 川崎, 前田: 高速度検出法, 電気四学会九州支部連大論文集, PP. 31~32, (1965)
- 8) 嶺, 川崎: 検出動誤差補償法, 電気四学会中国支部連大講演要旨, PP. 3~4, (1965)
- 9) 嶺, 川崎: 逆関数補償形等価無時定数検出法, 機学会43期全国大会前刷集, No. 145, PP. 5~8, (1965)

(昭和40年12月25日受理)