

逆関数補償形等価無時定数検出法 (第1報)

嶺 勝 敏*・川 崎 元 之*

Nontime Delay Detecting Method with Inverse Transfer Function Type Compensation. (Report No.1)

by

Katutoshi Mine* and Motoyuki Kawasaki*

Abstract

In this report, we declared about nontime delay detecting method with inverse transfer function type compensation.

There is dynamic error when measured quantity is dynamic error, by the means of detecting element. $G_d(S)$ was connected to cascade inverse transfer function type compensation, and this transfer function $G_c(S)$ was controlled to $G_c(S) = 1/G_d(S)$ when measured quantity is detected by detecting element that transfer function was decided to $G_d(S)$.

Then, we could realize the equivalent nontime delay detecting system.

1. ま え が き

計測系において、従来精度あるいは確度といえ、静的(定常的)な絶対誤差の真値に対する百分率で表わされてきた。

然し動的(過渡的)には、一般に $t=0$ における精度、すなわち動誤差は100%である計測系が殆んどである。

自動制御の進歩とともに、特定なプロセスからの要求により、動誤差の軽減が必要となった。

この動誤差を、検出要素の後に微分演算要素をカスケードに接続することによって軽減する空気圧式による方法が、Ziegler と Nichols によって1950年に発表¹⁾され、その後電気式による方法も発表された²⁾。

一方、国内においても、工業測定系の動特性の研究が多く発表^{3)~7)}されている。また、高橋安人教授の1952年の発表⁸⁾以後プロセスの動特性の定量的な一般化が研究され、現在種々のプロセスの伝達関数決定の研究がなされつつあり、宇部でも講習会⁹⁾などがなされている。

最近、電子計算機を利用したプロセスの最適制御¹⁰⁾の研究が発達してきたが、試行的に最適な操作条件を見出すに当って、応答の定常化をまたないで制御する必要が生じてきた¹¹⁾。

このような場合、検出における動誤差についての考慮

が、従来の自動制御におけるよりも重要になると考えられる。

以上の他にも、被検出系の時定数、あるいは被検出量の変化速度に対して、検出要素系の時定数あるいは、応答速度が無視できない場合、また間接測定の場合や検出要素の時定数が他の変数(外乱)の関数である場合に対して、より一般的な動誤差の軽減法が必要と考えられる。

本研究は、あらかじめ測定することによって伝達関数 $G_d(S)$ が決定されている検出要素を用いて検出する場合、発生する動誤差を検出要素にカスケードに逆関数形補償要素を接続し、この伝達関数を $G_c(S) = 1/G_d(S)$ に調整することによって動誤差をなくしようとするものである。

したがって、等価的な無時定数検出系、すなわち理想検出系を実現することができる¹²⁾。

なお逆関数補償については、適応制御系分野で研究^{13)~15)}がなされているが、検出系の動誤差補償法として適用された文献は見当たらないようである。

本報告では、逆関数補償形等価無時定数検出法の一般的な原理、ならびに例として検出要素の伝達特性が一次おくれ系に近似できる場合についての被測定量関数に対する測定量の応答の理論式、ならびにアナログ計算機での実験結果について述べる。

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

2. 原 理

Fig. 1 に示すような検出系において、検出要素の伝達関数 $G_d(S)$ が既知で、例えば(1)式で表される場合、逆関数形補償要素の伝達関数 $G_c(S)$ を(2)式のように選び、Fig. 1 のように $G_d(S)$ に対してカスケードに接続すれば、この検出系の等価伝達関数 $G(S)$ は(3)式のようになり、(4)式で示すような等価無時定数検出系、したがって理想的検出系を形成することになる。

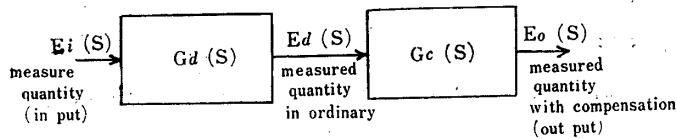


Fig. 1 Block diagram of nontime delay detecting system with inverse transfer function type Compensation.

$$G_d(S) = \frac{E_d(S)}{E_i(S)} = \frac{K_d(1 + a_1S + a_2S^2 + \dots)}{S^n(1 + b_1S + b_2S^2 + \dots)} \quad \dots\dots(1)$$

$$G_c(S) = \frac{E_o(S)}{E_d(S)} = \frac{1}{G_d(S)} \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{E_o(S)}{E_i(S)} = G(S) = G_d(S) \cdot G_c(S) = 1 \quad \dots\dots(3)$$

$$\therefore E_i(S) = E_o(S) \quad \mathcal{L}^{-1}E_i(S) = \mathcal{L}^{-1}E_o(S) \\ E_i(t) = E_o(t) \quad \dots\dots(4)$$

以上から $E_i(t)$ としては、 $G(S)$ が線形系であれば如何なる関数形の被測定量 $E_i(t)$ に対しても(4)式を満足する測定量 $E_o(t)$ を得ることができる。

したがって、 $E_o(t)$ が(5)式のようなフーリエ級数で表されるような場合についても、もちろん成立する。

$$E_i(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\ = E_o(t) \quad \dots\dots(5)$$

$$\text{ただし、} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_i(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_i(t) \cos n\omega t dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_i(t) \sin n\omega t dt$$

3. 1次おくれ検出系の逆関数形補償

3-1. ステップ応答 (a) 基本式 被測定量が時間領域で、 $E_i(t) = E_i \cdot u(t)$ 、これをラプラス変換した S 領域で、 $E_i(S) = E_i/S$ なるステップ入力である場合の測定量の応答について、逆関数補償を行なったときと、行わないときについて計算し比較してみる。

ただし、 $u(t) = 1 \quad t > 0, \quad u(t) = 0 \quad t < 0$ である。

まず、 $G_d(S)$ が(6)式で表される場合について、補償を行わないときの応答 $E_d(t)$ は、

$$\frac{E_d(S)}{E_i(S)} = G_d(S) = \frac{K_d}{1 + T_d S} \quad \dots\dots(6)$$

ただし、 T_d : 検出要素時定数、 K_d : 換算係数

$$\mathcal{L}^{-1}E_d(S) = E_d(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{K_d}{1 + T_d S} \cdot \frac{E_i}{S} \\ = K_d E_i \left\{ u(t) - \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) \right\} \quad \dots\dots(7)$$

(7)式は、Fig 2 のようになる (ただし、 $K_d = 1$ の場合)。

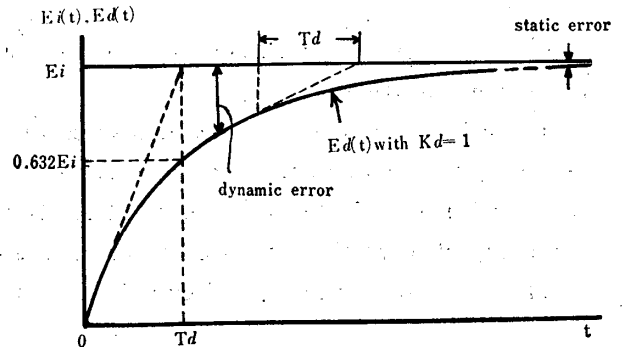


Fig. 2 Step response of first order detecting System.

つぎに、逆関数形補償を行なった場合、補償要素の伝達関数 $G_c(S)$ が(8)式で表されるとすると、

$$\frac{E_o(S)}{E_d(S)} = G_c(S) = \frac{1 + T_c S}{K_c} \quad \dots\dots(8)$$

ただし、 T_c : 逆関数形補償要素の時定数

K_c : 逆関数形補償要素の逆比例ゲイン

(6)式と(8)式より、 $E_o(t)$ は

$$\mathcal{L}^{-1}E_o(S) = E_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{K_d}{K_c} \frac{1 + T_c S}{1 + T_d S} \frac{E_i}{S} \\ = \frac{K_d E_i}{K_c} \left\{ u(t) - \left(1 - \frac{T_c}{T_d}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) \right\} \quad \dots\dots(9)$$

(9)式で、 $K_c = K_d$ 、 $T_c = T_d$ に調整すれば、

$$E_o(t) = E_i \cdot u(t) \quad \dots\dots(10)$$

したがって、絶対誤差面積 F_c は

$$F_c = \int_0^{\infty} |E_i(t) - E_o(t)| dt = 0 \quad \dots\dots(11)$$

整定時間 t_{sc} もまた、 $t_{sc} = 0$ であり、理想検出系を形成していることがわかる。なお(9)式よりこの系が直列補償形であるにもかかわらず、動作的には右辺第1項は従来の1次おくれ、第2項は不完全微分形になり、並列加算形補償系を実現していることがわかる。

つぎに、(9)式から明らかなように、初期値は、 $K_d T_c E_i / K_c T_d$ となる。したがって、 $K_d T_c / K_c T_d > 1$ なら

るときは、ステップ応答 $E_o(t)$ の初期値は E_i に対してオーバーシュートし、 $K_d T_c / K_c T_d < 1$ なるときはアンダーシュートである。よって、(9)式の $E_o(t)$ は、 K_d 、 K_c 、 T_d 、 T_c の値の関係から、Fig. 3 (a), (b), および Fig 4 (a), (b) の4つの場合にわかれる。

Fig. 3 にアンダーシュートの場合を示す。Fig. 3 (a) は、 $K_d E_i / K_c < E_i$ なるときで、Fig. 3 (b) は、 $K_d E_i / K_c > E_i$ なる場合である。Fig. 4 オーバーシュートの場

合を示す。Fig. 4 (a) は、 $K_d E_c / K_c > E_i$ なるときで、Fig. 4 (b) は、 $K_d E_i / K_c < E_i$ なる場合である。

これらを計算から求めれば、(9)式から初期値は、

$$E_o(t)_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K_d (1 + T_c S) E_i}{K_c (1 + T_d S) S} = \frac{K_d T_c E_i}{K_c T_d} \dots (12)$$

同様に最終値は、

$$E_o(t)_{t=\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d (1 + T_c S) E_i}{K_c (1 + T_d S) S} = \frac{K_d E_i}{K_c} \dots (13)$$

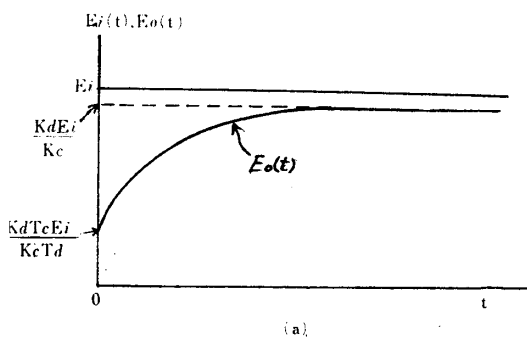


Fig. 3

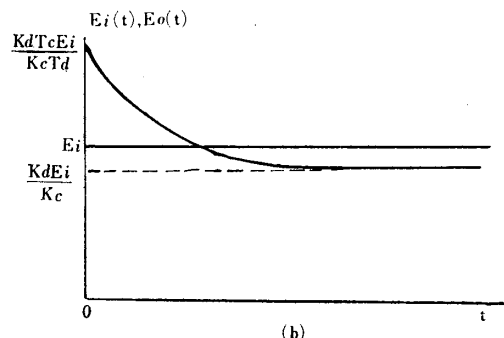
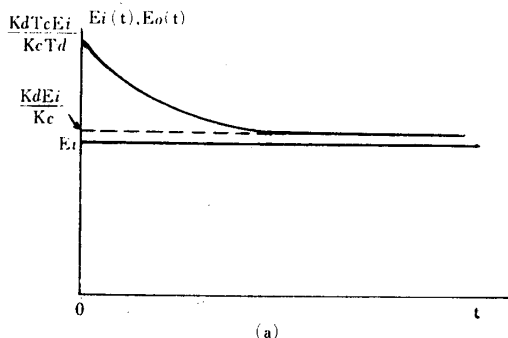
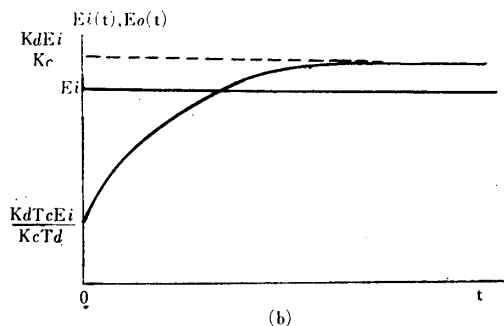


Fig. 4

Step response of detecting element with first order by inverse function type compensation.

(b) 整定時間と最大偏差 実際の測定系では、許容偏差 (許容誤差) ϵ_a が存在し、この許容誤差範囲に測定量が到達する時間、すなわち整定時間 t_s 、および最大偏差 (最大動誤差) ϵ_m が問題となる。

そこで、 t_s 、および ϵ_m を逆関数形補償を行なった場合と行なわないときについて計算し比較することにする。

まず、(7)式から補償しないときのステップ応答は、 $t=0$ のとき、 $E_o(t)=0$ となるから最大偏差 ϵ_{md} は、 $\epsilon_{md} = [E_i \cdot u(t) - E_o(t)]_{t=0} = E_i \dots (14)$

(14)式は、Fig. 5 の ϵ_{md} 点のように表わすことができる。

つぎに、整定時間 t_{sd} は、許容偏差を ϵ_a とすれば、Fig. 2 (ただし、 $K_d = 1$) より、

$$(E_i - \epsilon_a) - E_i \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t_{sd}}{T_d}\right) \right\} = 0$$

$$\exp\left(-\frac{t_{sd}}{T_d}\right) = \frac{\epsilon_a}{E_i}$$

$$\therefore \frac{t_{sd}}{T_d} = -\frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} \frac{\epsilon_a}{E_i} \dots (15)$$

つぎに、逆関数形補償を行なった場合の最大偏差 ϵ_{mc} は、 $K_c = K_d$ 、 $T_c = T_d$ に完全に調整された状態では、(10)式から明らかのように、 $\epsilon_{mc} = 0$ である。

しかし、 $K_c \neq K_d$ 、 $T_c \neq T_d$ なる場合の ϵ_{mc} は、(9)式において、 $t=0$ のときが最大偏差となるので、

$$\epsilon_{mc} = [E_i \cdot u(t) - E_o(t)]_{t=0}$$

$$= E_i - \frac{K_d E_i}{K_c} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{T_c}{T_d} \right) \right\} = E_i \left(1 - \frac{K_d T_c}{K_c T_d} \right) \dots (16)$$

(16)式において、補償を行なわないときは、 $T_c = 0$ 、 $K_c = 1$ なる場合に相当しこの場合は、(14)式と等しくなる。(16)式は、 K_d / K_c をパラメータにとれば、Fig. 5 のようになる。

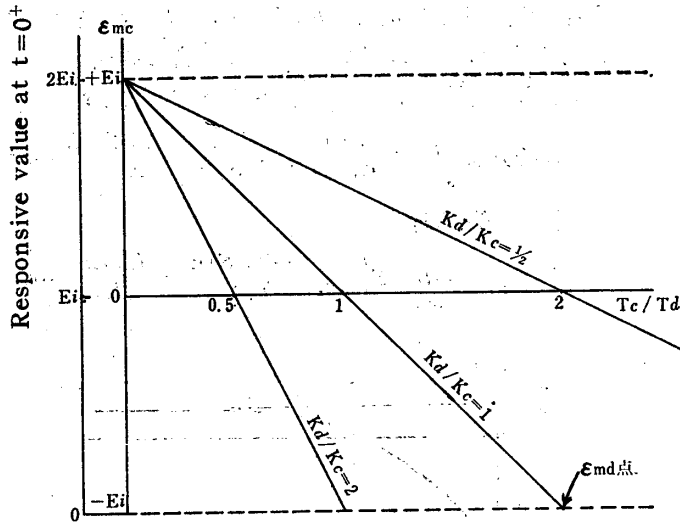


Fig. 5 ϵ_{mc} VS. T_c/T_d characteristics curve of K_d/K_c Parameter.

Fig. 5 の ϵ_{mc} は、 $t=0+$ 、において、 $\epsilon_{mc} = -E_i$ のとき、応答は 0 であり、 $\epsilon_{mc} = 0$ のとき、応答は E_i 、 $\epsilon_{mc} = +E_i$ のとき、応答は $2E_i$ である。

逆関数形補償を行なった場合の許容偏差を ϵ_a とすれば、Fig. 3、Fig. 4、のそれぞれの(a)、(b)より有限整定条件は、 $|\epsilon_a| > E_i (1 - K_d/K_c)$ となる。

Fig. 3 (b) および Fig. 4 (a) のときには、 $\epsilon_a > E_i (K_d/K_c - 1)$ となり、Fig. 3 (a) および Fig. 4 (b) のときには、 $\epsilon_a > E_i (1 - K_d/K_c)$ となる。

これらの有限整定条件を満足している場合について、 T_d に対する整定時間 t_{sc} の比 t_{sc}/T_d を計算すれば、(9)式から、

$$(E_i \pm \epsilon_a) - \frac{K_d E_i}{K_c} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{T_c}{T_d} \right) \exp \left(-\frac{t_{sc}}{T_d} \right) \right\} = 0 \quad \dots\dots(17)$$

ただし、(17)式の $(E_i \pm \epsilon_a)$ の項において、 $(E_i + \epsilon_a)$ は Fig. 4 (a)、(b) の応答の場合である。

$(E_i - \epsilon_a)$ は、Fig. 3 (a)、(b) の応答の場合である。

したがって、 $T_c = T_d$ のとき、(17)式は、 $\pm \epsilon_a/E_i = K_d/K_c - 1$ 、ゆえに、 $\epsilon_a/E_i = K_d/K_c - 1$ 、が Fig. 4 (a)、(b) の場合であり、 $\epsilon_a/E_i = 1 - K_d/K_c$ 、が Fig. 3 (a)、(b) の場合である。

$T_c \neq T_d$ のとき、(17)式は、

$$\frac{t_{sc}}{T_d} = -\frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} \frac{1 - K_c/K_d \cdot (1 \pm \epsilon_a/E_i)}{1 - T_c/T_d}$$

$$\therefore \frac{t_{sc}}{T_d} = -\frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} \frac{1 - K_c/K_d \cdot (1 - \epsilon_a/E_i)}{1 - T_c/T_d} \quad \dots\dots (17-1)$$

(17-1) が、Fig. 3 (a)、(b) の場合であり、

$$\frac{t_{sc}}{T_d} = -\frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} \frac{1 - K_c/K_d \cdot (1 + \epsilon_a/E_i)}{1 - T_c/T_d} \quad \dots\dots (17-2)$$

(17-2) が、Fig. 4 (a)、(b) の場合である。

以上の結果より、(17)式の、 t_{sc}/T_d と ϵ_a/E_i の関係は、 K_c/K_d 、 T_c/T_d をパラメータにとって描けば、Fig. 6 のようになる。

(17)式において、補償を行なわないときは、 $T_c = 0$ 、 $K_c = 1$ 、なる場合に相当し、このとき、 $K_d = 1$ とすれば、(15)式と等しくなる。

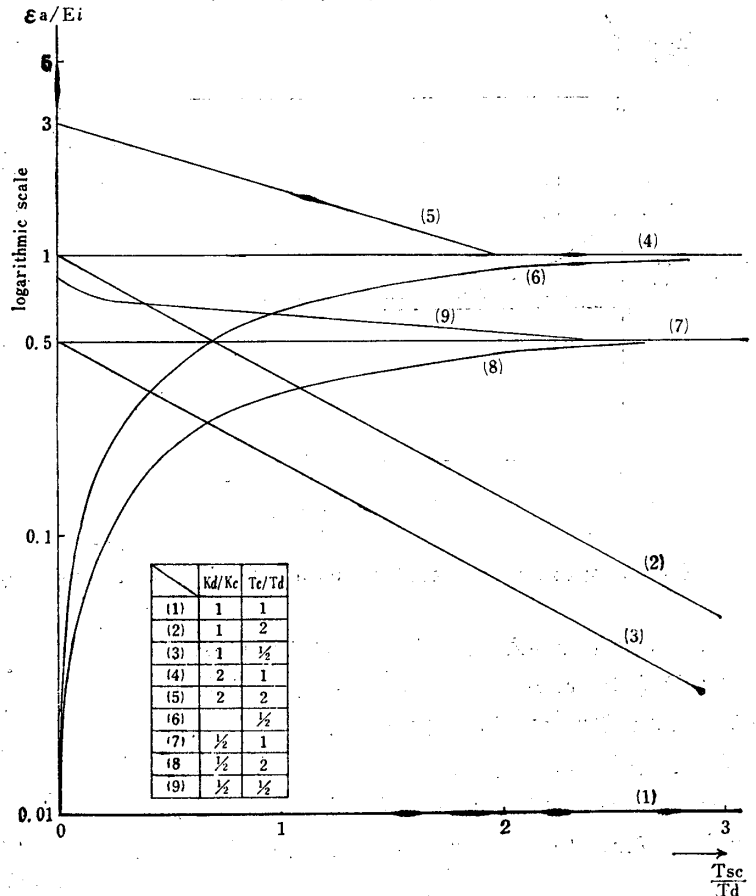


Fig. 6 ϵ_a/E_i VS. T_{sc}/T_d , characteristics curve of K_d/K_c , T_c/T_d Parameter.

(c) 偏差面積 逆関数形補償を行なった場合と、行なわない場合との偏差面積（動誤差面積）の比較を行なう。

まず、補償を行なわないときの絶対偏差面積 F_a は、 $K_d = 1$ のときでは、 $\epsilon_a = 0$ 、 $t_{sd} = \infty$ の場合に相当するので(18)式から明らかのように $E_i T_d$ となる。

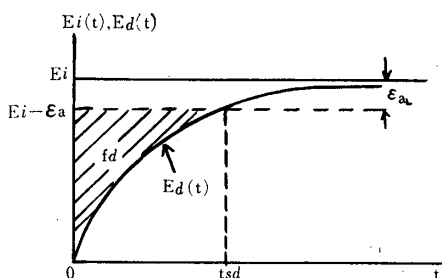


Fig. 7 Allowable error area of first order detecting systems. (Where $K_d = 1$)

つぎに Fig. 7 の斜線で示すように許容偏差 ϵ_a と、整定時間 t_{sd} を利用して許容偏差面積 f_d を計算する。

Fig. 7 において、 $K_d = 1$ 、のときの f_d を計算してみると、

$$\begin{aligned} f_d &= \int_0^{t_{sd}} \{E_i \cdot u(t) - \epsilon_a - E_d(t)\} dt \\ &= \int_0^{t_{sd}} \left\{ E_i \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) - \epsilon_a \right\} dt \\ &= E_i T_d - \epsilon_a t_{sd} - E_i T_d \exp\left(-\frac{t_{sd}}{T_d}\right) \quad \dots\dots(18) \end{aligned}$$

(18)式は、Fig. 8 のようになる。

つぎに、補償を行なったときの許容偏差面積 f_c は、Fig. 3(a), (b), および Fig. 4(a), (b) のそれぞれの

応答において、有限整定条件を満足しておるとすれば、(9)式より、

$$\begin{aligned} f_c &= \int_0^{t_{sc}} \left\{ E_i \cdot u(t) \pm \epsilon_a \right\} - E_o(t) dt \\ &= \int_0^{t_{sc}} \left\{ E_i \cdot u(t) \pm \epsilon_a \right\} - \frac{K_d E_i}{K_c} \left\{ u(t) - \left(1 - \frac{T_c}{T_d}\right) \cdot \exp\left(-\frac{T_c}{T_d}\right) \right\} dt \\ &= E_i t_{sc} \left(1 - \frac{K_d}{K_c} \pm \frac{\epsilon_a}{E_i} \right) - \frac{E_i K_d (T_d - T_c)}{K_c} \left\{ \exp\left(-\frac{t_{sc}}{T_d}\right) - 1 \right\} \quad \dots\dots(19) \end{aligned}$$

(19)式において、

$$\begin{aligned} f_c &= E_i t_{sc} \left(1 - \frac{K_d}{K_c} + \frac{\epsilon_a}{E_i} \right) - \frac{E_i K_d (T_d - T_c)}{K_c} \left\{ \exp\left(-\frac{t_{sc}}{T_d}\right) - 1 \right\} \quad \dots\dots (19-1) \end{aligned}$$

のときは、図 4 (a), (b) の応答の場合である。

$$\begin{aligned} f_c &= E_i t_{sc} \left(1 - \frac{K_d}{K_c} - \frac{\epsilon_a}{E_i} \right) - \frac{E_i K_d (T_d - T_c)}{K_c} \left\{ \exp\left(-\frac{t_{sc}}{T_d}\right) - 1 \right\} \quad \dots\dots (19-2) \end{aligned}$$

のときは、Fig. 3 (a), (b) の応答の場合である。

(19)式で、 $K_d = K_c = 1$ 、 $T_c = 0$ 、とおけば、補償を行なわない場合に相当する。

したがって、(18)式と等しくなる。

3-2. 梯形波応答 (a) 基本式 実際には、入力

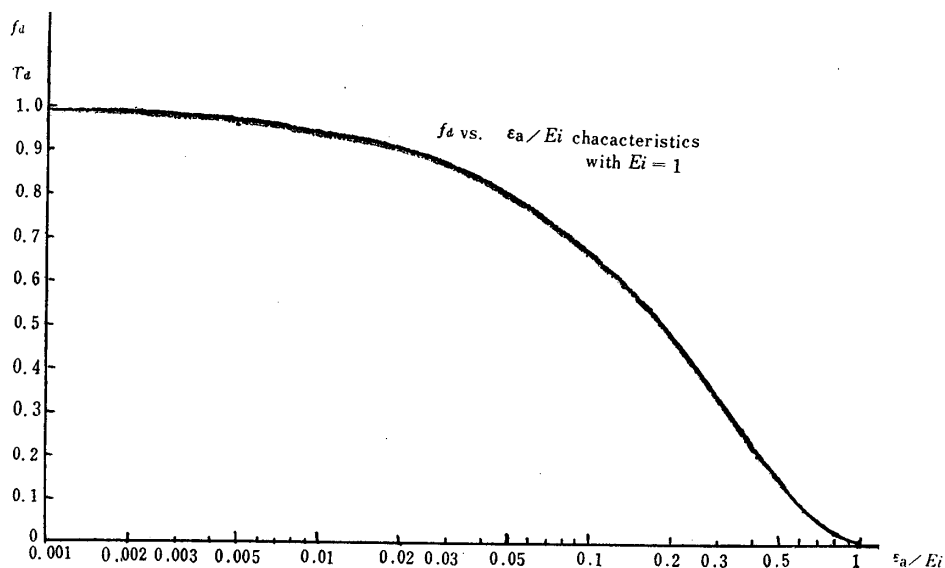


Fig. 8 Allowable deviation area of first order detecting system

$E_i(t)$ の定速度変化はいつまでも続かず Fig. 9 に示すように、ある飽和値をもつことが多い。Fig. 9 の波形は、

$$E_i(t) = E_i \cdot K \cdot t \cdot u(t) - E_i \cdot K \cdot (t - \tau) \cdot u(t - \tau) \dots (20)$$

$$E_i(S) = \mathcal{L} E_i(t) = \frac{E_i K}{S^2} \{1 - \exp(-\tau s)\} \dots (21)$$

よって1次おくれ検出系の梯形波応答を求め、重極を含む場合の展開定理^{付録}を用いて解くと、

$$\begin{aligned} E_d(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{K_d E_i K}{S^2(1 + T_d S)} \{1 - \exp(-\tau s)\} \\ &= K_d K T_d E_i \left\{ \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) + \frac{t}{T_d} - 1 \right\} \\ &\quad - \left\{ \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_d}\right) + \frac{t-\tau}{T_d} - 1 \right\} \cdot u(t-\tau) \dots (22) \end{aligned}$$

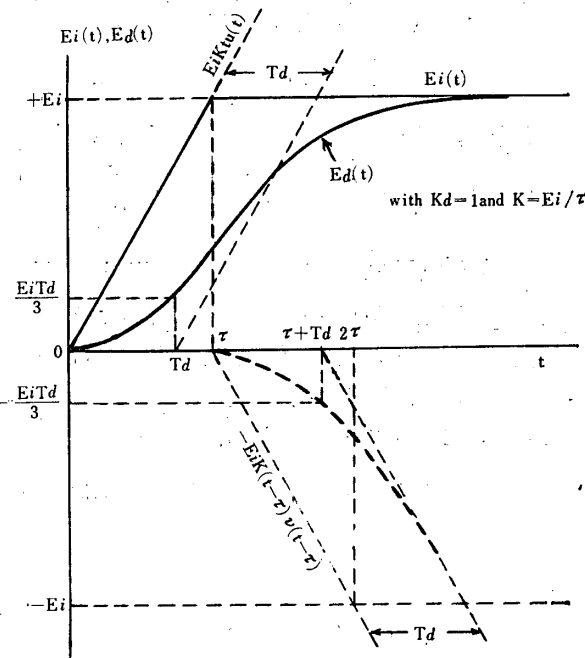


Fig. 9 Trapezoid response of a typical first order detecting system.

つぎに、逆関数形補償を行なったとき、その応答は、

$$\begin{aligned} E_o(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{K_d K E_i}{K_c} \frac{1 + T_d S}{S^2(1 + T_d S)} \\ &\quad \{1 - \exp(-\tau s)\} = \frac{K_d K E_i}{K_c} \\ &\quad \left\{ (T_c - T_d) \{u(t) - u(t-\tau)\} \right. \\ &\quad + \left. \left\{ t \cdot u(t) - (t-\tau) \cdot u(t-\tau) \right\} \right. \\ &\quad - T_d (T_c - T_d) \left\{ \exp\left(-\frac{t}{T_d}\right) \cdot u(t) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_d}\right) \cdot u(t-\tau) \right\} \dots (23) \end{aligned}$$

(23)式において、 $K_c = K_d$ 、 $T_c = T_d$ 、に調整すれば、(20)式に等しくなる。

4. アナログ計算機による実験

アナログ計算機による実験結果として、1次おくれ検出系と、逆関数形補償系を Fig. 10 のように、シミュレートし、ステップ応答、ならびに梯形波応答における、実験結果を述べる。

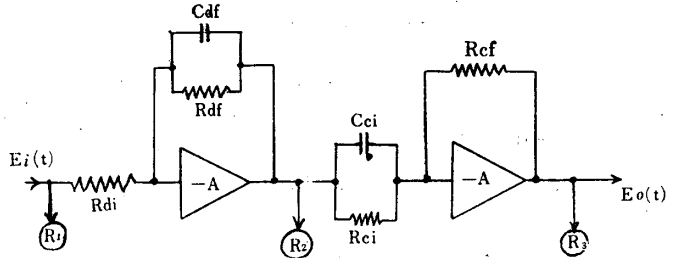


Fig. 10 Analog computer circuit for simultaneous equations of first order detecting unit and cascade connected inverse function type compensator.

Fig. 10 のようにシミュレートすれば、一次検出系、および逆関数形補償系の伝達関数は、

$$G_d(S) = \frac{K_d}{1 + T_d S}, \quad G_c(S) = \frac{1}{K_c} (1 + T_c S) \text{ となる}$$

ここで、 $K_d = \frac{R_{df}}{R_{di}}$ 、 $K_c = \frac{R_{ci}}{R_{cf}}$ 、および $T_d = R_{df} \cdot C_{df}$ 、 $T_c = R_{ci} \cdot C_{ci}$ である。

また、 (R_1) は、ステップおよび梯形波の入力波形、 (R_2) は、1次おくれ検出系の応答波形、 (R_3) は、逆関数補償後の出力波形のレコーダ接続を意味する。

4-1 ステップ応答 温度検出系が1次おくれ系に近以できる場合を例にすると、 T_d は $T_d = C_m \cdot m / A \cdot h$ (sec) で表わされる。

ここで、 C_m : 平均比熱 (Kcal/kg °C)、 m : 重量 (kg)、 A : 実効受熱面積 (m²)、 h : 熱伝達係数 (Kcal/m² · sec · °C)、である。

$K_d/K_c = 1$ 、 $T_c = T_d = 1$ (s) での実験結果を Fig. 11 に、 $K_d/K_c = 1$ 、 $T_d \neq T_c$ 、での実験結果を Fig. 12 に示す。

4-2 梯形波応答 ステップ応答と同様の条件での梯形波応答の実験結果を Fig. 13, Fig. 14 に示す。

以上のアナログ計算機による実験結果より、 $T_c = T_d$ および、 $K_c = K_d$ 、が成り立っていれば、Fig. 11, Fig. 13 より明らかなように無時定数応答を行なう。

また、 $K_c = K_d$ なるとき、 $T_c > T_d$ ならば応答波形はオーバーシュートし、 $T_c < T_d$ ならばアンダーシュートとなる。Fig. 11, Fig. 12 では $t = 0+$ における動誤差は、

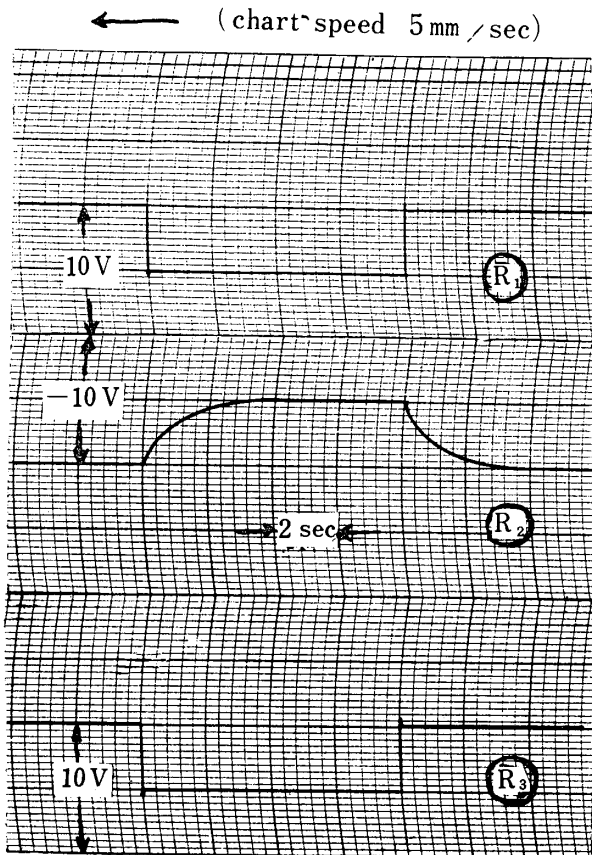
($1 - T_d/T_c$) で表わすことができる。また, Fig.14より, T_d/T_c が40%位違っていても補償要素 $G_c(S)$ を付加した方がよいことがわかる。

5. む す び

一般的な検出系に対して, その伝達関数の逆関数形補償を行なうことによって等価的な無時定数検出系を実現できる理論を述べ, ステップ応答に対する有限整定条件を示した。つぎにアナログ計算機を用いて1次おくれ検出系に本方式を適用したときの実験結果を掲げた。

勿論, 検出端挿入により発生する誤差は, 従来のものと同様に補正できないが, 本方式は動誤差を零にできると共に, 定常誤差を有する計測系に対しても, K_c の調整によりこれも零にできる利点を有する。

検出部のパラメータが変動する系, 間接測定系に対する本方式の適用¹⁶⁾ならびに実系についても研究中である。



$K_d / K_c = 1 \quad T_c = T_d = 1$

Fig.11 Step response

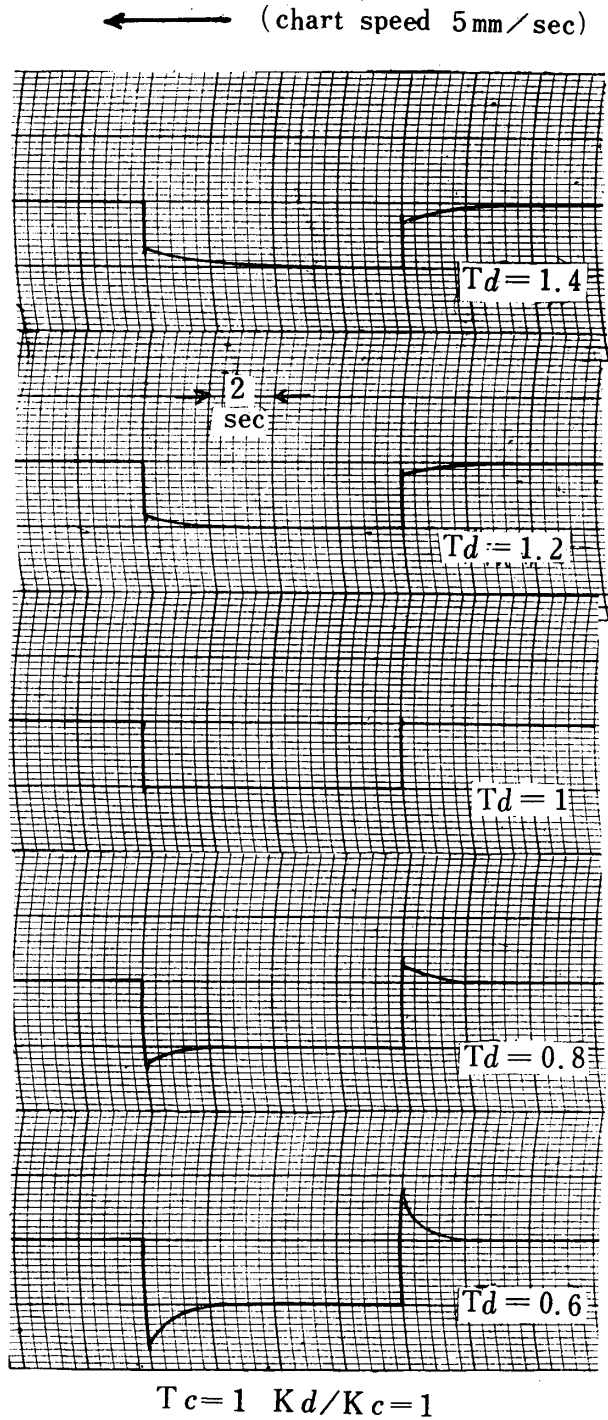
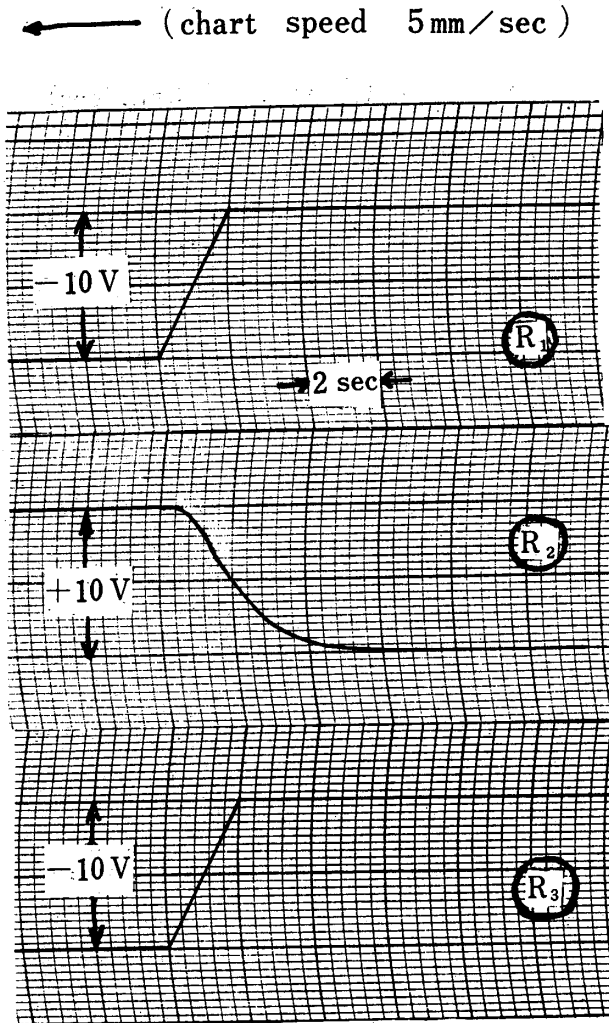


Fig.12 Step response



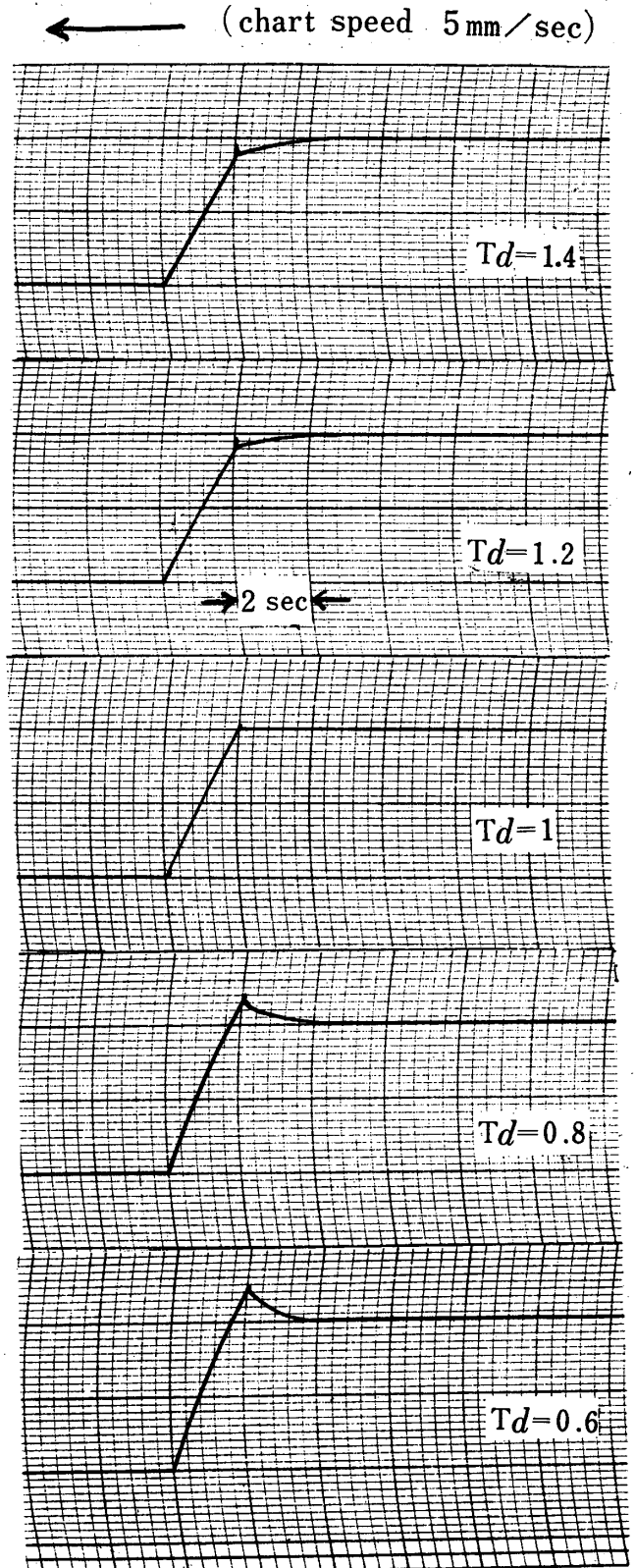
$$Kd/Kc = 1 \quad Tc = Td = 1$$

Fig. 13 Trapezoid response

最後に御討論戴いた高橋安人教授, J.G. Ziegler氏ならびに九工大河村助教授, 常々御指導を賜わっている山県清校長, アナログ計算機について御討議戴いた臼井助教授, 図面作成にご協力下さった学生, 鍛田, 葉玉, 品川, 松島の諸君に衷心より謝意を表わす.

参 考 文 献

- 1) J. G. Ziegler & N. B. Nichols; Dynamic Accuracy in Temperature Measurement, Instruments, 23, PP. 60~69 (1950)
- 2) C. E. Shepard & I. Warshawsky; Electrical Techniques for Compensation of Thermal Time Lag of Thermocouples and Resistance Thermometer Elements, NACA Technical



$$Kd/Kc = 1 \quad Tc = 1$$

Fig. 14 Trapezoid response

Note 2703

3) 寺尾; 工業測定系の動特性, (1)~(8)
計測, Vol. 4, No. 12, PP. 596~603 (1954), ~
計測, Vol. 5, No. 7, PP. 409~414 (1955)
4) 武田; u字管圧力計に関する研究. 計測, Vol. 5,
No. 3, PP. 137~143 (1955)
5) 武田; 導管による振動圧の伝達.
計測, Vol. 5, No. 11, PP. 538~547 (1955)
6) 山下, 稲垣; 流量制御における電子式と空気式の比
較. 自動制御, Vol. 2, No. 5, PP. 157~166
(1963)
7) 嶺, 足立, 川崎, 兵頭; 工業計器記録部周波数特性
における入力依存性. 電気四学会中国支部連大予稿,
PP. 35~36 (1964)
8) Y. Takahashi; Transfer Function Analysis
of Heat Exchange Processes, Automatic and
Manual Control, Butterworths, London,
235, (1952)
9) 嶺; プラントの特性について, 電子計算機を利用し
てプロセス制御ゼミナール資料, 山口県電力協議会主
催, (1964)

10) E. Mishkin & L. Braun; Adaptive Control
Systems, The Maple Press, (1961)
11) 福永, 吉田; 動特性を考慮した試行法最適化制御
系, 電学誌, Vol. 85-5, No. 920, PP. 908~
916 (1965)
12) 嶺, 川崎; 等価無時定数検出法, 機学会43期東京秋
期学術講演大会予稿, No. 139, PP. 63~66, (1965)
嶺; 昭和40年特許出願, 第025709号, おくれなし検出
回路, 昭和40年5月1日出願
13) 茅; 逆関数補償形適応制御系の特性, 自動制御系の
特性, 自動制御部会資料, No. 3, 1962/4/17,
PP. 18~26
14) 茅; 逆関数補償形適応制御系の特性, 計測と制御,
Vol. 1, No. 10, PP. 779~782 (1962)
15) 西田, 水野; モデルと逆関数法を用いた適応制御,
自動制御, Vol. 4, No. 5, PP. 144~155 (1965)
16) 嶺, 川崎; 逆関数補償形等価無時定数検出法, 機学
会43期全国大会予稿, No. 145, PP. 5~8, (1965)
17) 例えば, 小郷, 佐藤; ラプラス変換演習, P 21,
共立出版, (1953)

付 録

$F(S) = \frac{A(S)}{B(S)}$ において, $B(S)$ が S についての n 重極の因数と, $(m-n)$ 個の単極の因数の積からなる場合のヘビサイドの展開定理について考える. ただし, $B(S)$ の方が $A(S)$ より次数が高いとする.

従来の公式は¹⁷⁾, (5)式の右辺第2項を $h(S)$ とおいているので $h(S)$ の内容が不明確なため, 初心者には利用し難いようらみがあった. 本公式は, $h(S)$ の内容が明確であるので利用しやすいと思う. 本公式が, 初心者のお役に立てば幸である.

$$F(S) = \frac{A(S)}{B(S)} = \frac{A(S)}{(S-S_k)^n \cdot \prod_{i=n+1}^m (S-S_i)} = \frac{A(S)}{(S-S_k)^n \cdot D(S)} = \frac{\phi(S)}{(S-S_k)^n} \quad \dots\dots(1)$$

ここで, $\phi(S) = \frac{A(S)}{D(S)} = \frac{A(S)}{\prod_{i=n+1}^m (S-S_i)}$

(1)式を部分々数展開にすれば,

$$F(S) = \frac{C_1}{(S-S_k)} + \frac{C_2}{(S-S_k)^2} + \frac{C_3}{(S-S_k)^3} + \dots + \frac{C_r}{(S-S_k)^r} + \dots + \frac{C_n}{(S-S_k)^n} + \frac{C_{n+1}}{S-S_{n+1}} + \frac{C_{n+2}}{S-S_{n+2}} + \frac{C_{n+3}}{S-S_{n+3}} + \dots + \frac{C_i}{S-S_i} + \dots + \frac{C_m}{S-S_m}$$

$$F(S) = \frac{\phi(S)}{(S-S_k)^n} = \sum_{r=1}^n \frac{C_r}{(S-S_k)^r} + \sum_{i=n+1}^m \frac{C_i}{S-S_i}$$

ここで, $n \geq 2$, 留数 $C_1, \dots, C_r, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_i, \dots, C_m$, いま両辺に $(S-S_k)^n$ を乗ずれば,

$$\phi(S) = C_1(S-S_k)^{n-1} + C_2(S-S_k)^{n-2} + \dots + C_r(S-S_k)^{n-r} + \dots + C_n + \sum_{i=n+1}^m \frac{C_i}{S-S_i} (S-S_k)^n \quad \dots\dots(2)$$

ここで、 $S=S_k$ とおけば、 $\phi(S_k)=C_n$ 、このようにして、 $(S-S_k)^n$ の n を $(n-1)$ 、 \dots 、 1 、と変えて順次両辺に掛けて、 $S=S_k$ とおいて、 $C_{n-1} \dots C_1$ を求めることができるが、もっと便利に求めることを考えてみよう。

いま、(2)式を $(n-r)$ 回、 S について微分すれば、 $(n-r)$ より低次の項は 0 となり、ここで、 $S=S_k$ 、とおくと $(n-r)$ より高次の項も 0 となるので、 $C_r = \phi^{(n-r)}(S_k)/(n-r)!$ 、したがって、

$$F(S) = \frac{A(S)}{B(S)} = \sum_{r=1}^n \frac{C_r}{(S-S_k)^r} + \sum_{i=n+1}^m \frac{C_i}{S-S_i} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi^{(n-r)}(S_k)}{(n-r)!} \frac{1}{(S-S_k)^r} + \sum_{i=n+1}^m \frac{C_i}{S-S_i}$$

ここで、両辺に $(S-S_i)$ を乗じ、 $S=S_i$ とおくと、(ただし、 $S_i=S_k$ であれば、重極の項に含まれてしまうから、常に $S_i \neq S_k$ と考えてよい。)

$$C_i = \left[\frac{A(S)}{B(S)} (S-S_i) \right]_{S=S_i} = \left[\frac{A(S)}{Q(S)} \right]_{S=S_i} \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 $B(S) = Q(S) \cdot (S-S_i)$

$$\frac{dB(S)}{dS} = Q(S) + (S-S_i) \frac{dQ(S)}{dS}, \quad \text{ここで、} S=S_i \text{ とおくと}$$

$$Q(S_i) = \left[\frac{dB(S)}{dS} \right]_{S=S_i} = B'(S_i) \quad \therefore C_i = \left[\frac{A(S)}{Q(S)} \right]_{S=S_i} = \frac{A(S_i)}{B'(S_i)} \quad \dots\dots(4)$$

となり、重極を含まない項の留数 C_i は、重極が全くない関数の場合と同結果となる。ここで、分子が $A(S_i)$ である点が注目される。

$$\therefore F(S) = \frac{A(S)}{B(S)} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi^{(n-r)}(S_k)}{(n-r)!} \frac{1}{(S-S_k)^r} + \sum_{i=n+1}^m \frac{A(S_i)}{B'(S_i)} \frac{1}{S-S_i} \quad \dots\dots(5)$$

なお C_i は、(4)式よりも(3)式の方から便利に求められることが多い。

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(S-S_k)^r} = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{S_k t}, \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{S-S_i} = e^{S_i t}$$

であるから(5)式より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} F(S) = f(t) &= e^{S_k t} \left[\frac{\phi^{(n-1)}(S_k)}{(n-1)!} \frac{t^0}{0!} + \frac{\phi^{(n-2)}(S_k)}{(n-2)!} \frac{t}{1!} + \frac{\phi^{(n-3)}(S_k)}{(n-3)!} \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^{(n-r)}(S_k)}{(n-r)!} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\phi^{(n-n)}(S_k)}{0!} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] + C_{n+1} \cdot e^{S_{n+1} t} + C_{n+2} \cdot e^{S_{n+2} t} + \dots + C_i \cdot e^{S_i t} + \dots + C_m \cdot e^{S_m t} \\ \therefore f(t) &= e^{S_k t} \sum_{r=1}^n \frac{\phi^{(n-r)}(S_k)}{(n-r)!} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{i=n+1}^m C_i \cdot e^{S_i t} \quad \dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここで、(6)式の右辺の第1項の $r=n$ 番目の項で、 $\phi^{(n-n)}(S_k) = \phi^{(0)}(S_k)$ となる部分がでてくるが、これは 0 乗の意味ではなく微分をしないという意味であるから、 $\phi^{(n-n)}(S_k) = \phi(S_k)$ となる点に注目される。

(昭和40年7月1日受理)