非対称非線形要素 (第2報)

嶺　勝敏*・許斐亮爾**

Unsymmetrical Nonlinear Element (2)

Katutoshi Mine* and Riyogi Konomi**

1. まえがき

種々の非対称非線形要素について，記述関数の計算法を述べ結果を表にして報告した[1]．今回は，前報と形状が反対になった非対称バックラッシュの記述関数の計算法を述べ，結果が前報と同様になること，ならびに前報で求めた種々の非対称非線形要素の記述関数のゲインおよび位相の入力依存特性を数値計算し特性曲線を求めたので報告する．

この特性曲線は，非対称非線形要素を含む系について，線形系のみのベクトル線図あるいはボード線図などをまず描き，つぎに非対称非線形要素によるゲインおよび位相の補正を行うときに便利である[2)3)]．

しかし記述関数法は，非線形振動論における等価線形手法の一つである調和線形手法にすぎない．すなわち基本正弦波応答であり直流分や高調波成分を省略している．したがって記述関数法は，非線形要素が自動制御系の閉ループ内に含まれ線形部の等価伝達関数が積分性の強い系などでは，定量的な近似度がよいことになる．

つぎに非対称非線形要素の正弦波応答波形は，アナログ計算機または作図によって，比較的簡単に応答の非対称波形をうることができるが，実系では，一般に線形要素部の沪波効果によって高調波成分ほど減衰するので，定性的には角のとれた非対称応答波形が観測されることが多い．

記述関数法の欠点としては，亜調和共振の説明ができない，リミットサイクルの存在と非存在を取り違えたりする危険性がある[4)]．また，非線形系における周波数領域での基本波のみに着目した定常応答であるので，線形系におけるように周波数応答と過渡応答の相互変換が厳密には行われないが，種々の近似的に過渡応答を求める記述関数の拡張法が報告されている[5)]．

なお，数個の断片線により非線形要素を表現し正弦波入力に対する応答を完全フーリェ級数で厳密に解析する一連の研究が報告されているが[6)~10)]，前にも述べたように実系プロセスなどでは積分系線形要素が多いので，理論も結果も簡便である点に本報告の実用性があると考えられる．

また，殆んどの非線形要素の位相特性がそうであるように[11)]，本報告の非対称非線形要素のそれも周波数依存性はない．

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

** 宮崎大学工学部電気工学教室

2. 非対称バックラッシュの記述関数

制御弁などにみられる図1のような非対称非線形要素すなわち非対称バックラッシュの記述関数を求める．記号は，すべて前報と同様なものを用いるので説明は省略する．なお図1の形状は前報と丁度逆である．

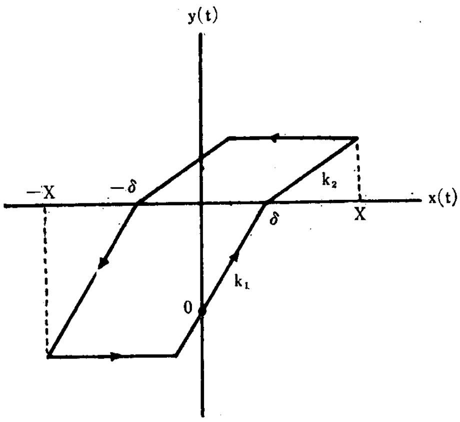

図1. 非対称バックッシュの形状図

$\delta/X \geqq 1$ なる場合と $\delta/X < 1$ にわけて考える．

i) $\delta/X \geqq 1$ の場合 図1の非対称バックラッシュの性質から明らかに $y(\omega t)=0$ であるから記述関数 $N(X, j\omega)$ は，

$$N(X, j\omega)=0 \tag{1}$$

ii) $\delta/X < 1$ の場合 図1に対応して，図2の電気角決定図をうる．前報と同様にして電気角を決定し表1に示す．

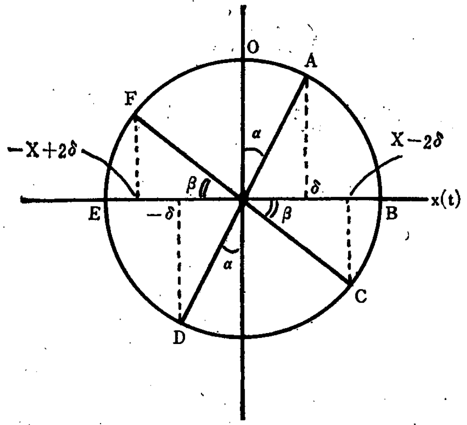

図2. 非対称バックラッシュの電気角決定図

ただし，

$$\alpha=\sin^{-1}\delta/X \quad \beta=\cos^{-1}(X-2\delta)/X \tag{2}$$

つぎに，a_0，a_1，b_1を求めるわけであるが，本例の場合出力 $y(\omega t)$ は，表1から零になることがないので各々について7回積分を行なって和を求めることによってえられる．

表　1

	移動	電　気　角	出力 $y(\omega t)$
1	$\overrightarrow{OA}$	$o\leq\omega t\leq\alpha$	$K_1\ (x-\delta)$
2	$\overrightarrow{AB}$	$\alpha\leq\omega t\leq\pi/2$	$K_2\ (x-\delta)$
3	$\overrightarrow{BC}$	$\pi/2\leq\omega t\leq\pi/2+\beta$	$K_2\ (X-\delta)$
4	$\overrightarrow{CD}$	$\pi/2+\beta\leq\omega t\leq\pi+\alpha$	$K_2\ (x+\delta)$
5	$\overrightarrow{DE}$	$\pi+\alpha\leq\omega t\leq 3\pi/2$	$K_1\ (x+\delta)$
6	$\overrightarrow{EF}$	$3\pi/2\leq\omega t\leq 3\pi/2+\beta$	$-K_2\ (X-\delta)$
7	$\overrightarrow{FO}$	$3\pi/2+\beta\leq\omega t\leq 2\pi$	$K_2\ (x-\delta)$

したがって，直流分 a_0 は，前報と符号が逆になり，

$$a_0=\frac{K_2-K_1}{\pi}\Big\{2\sqrt{X^2-\delta^2}-2\sqrt{X\delta-\delta^2}+2\,\delta\sin^{-1}\frac{\delta}{X}+(X-2\delta)\cos^{-1}\Big(\frac{X-2\,\delta}{X}\Big)\Big\} \tag{3}$$

同様にして．a_1とb_1を求めさらに記述関数を求めれば

$$N\ (X,\ j\omega)\ =a_1/X\ -jb_1/X=a-jb$$
$$=\frac{K_1+K_2}{2\,\pi}\Big[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\Big(\frac{X-2\,\delta}{X}\Big)+\frac{X-2\,\delta}{X}\cos\Big\{\sin^{-1}\Big(\frac{X-2\,\delta}{X}\Big)\Big\}-j\frac{4\,\delta}{X}\Big(1-\frac{\delta}{X}\Big)\Big] \tag{4}$$

〔以下 $N(j\omega,\ X)$をNで表わす〕

非対称バックラッシュの上下を逆にした形状のものについては，前報と比較して(3)式より直流分の極性が逆になり，(4)式より記述関数は変らないことがわかる．基本

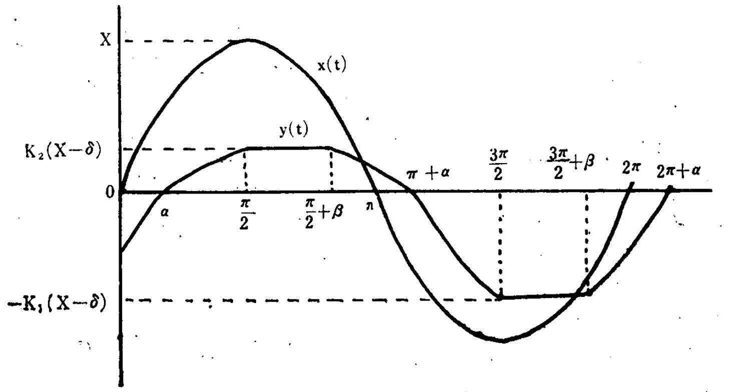

図3. バックラッシュの基本正弦波応答波形

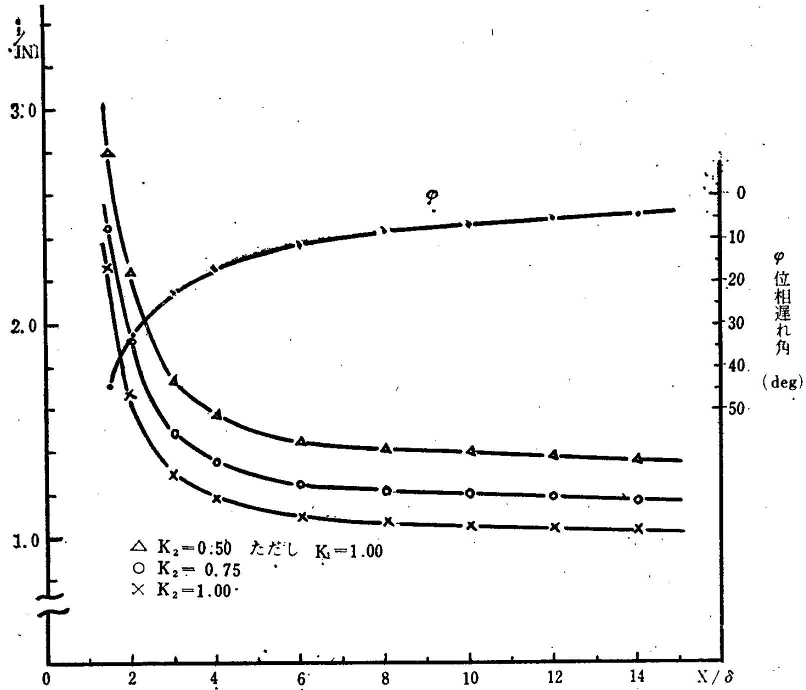

図4. （本報(4)式の非対称バクラッシュ）

正弦波応答波形も図3に示すように前報とは波形歪の形状が上下逆になる．このことから種々の非対称非線形要

素についても上下逆形状の場合は同様のことがいえる.

つぎに,(4)式から虚数部の影響によって入力最大振幅Xによってゲインのみならず位相も変化する.X=1なるときのこれらの関係を図4に示す.

なお,実系の例として空気圧式制御弁の非対称バックラッシュのゲインおよび位相の入力最大振幅依存特性を本誌別報に示す[12].

3. 種々の非対称非線形要素の特性曲線

種々の非対称非線形要素の入力振幅Xに対するゲインの逆数および位相(虚数部を含まないものは入力振幅に無関係)の依存特性曲線を,前報の付表について数値計算によって求め以下に示す.

なお,基本正弦波応答波形は,前報で示したので省略する.また前報の付表1〜3の非対称非線形要素の記述関数は,簡単で図を作成する程でないので省略した.

前報(4—ii)の非対称非線形要素の記述関数Nは,

$$N=\frac{K_1}{2}\left[1-\frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}+\frac{\delta_1}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)\right\}\right] \tag{5}$$

(5)式において,$K_1=1$,$X=1$,とおけば,

$$N=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\delta_1+\delta_1\cos(\sin^{-1}\delta_1)\right\}\right] \tag{5$'$}$$

上式でδ_1の値を変化させれば,X/δ_1を変えたことになるので,数値計算によって$1/|N|$の入力振幅依存特性を図5のように示すことができる.なおK_1の変化による曲線の傾向を知るためK_1の他の値についても示した.

以下同様にして,前報(4—iii)

$$N=\frac{1}{\pi}\left[K_1\left\{\frac{1}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi-2\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)-\frac{2\delta_1}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)\right\}+K_2\left\{\frac{1}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi-2\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)-\frac{2\delta_2}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)\right\}\right] \tag{6}$$

(6)式において,$K_1=K_2=1$,$X=1$,$\delta_2=0.5$とおけば,

$$N=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\delta_1\right)+\frac{1}{2}\left(\pi-2\sin^{-1}\delta_1\right)-2\delta_1\cos(\sin^{-1}\delta_1)\right\}+A \tag{6$'$}$$

ただし,

$$A=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2\sin^{-1}0.5)+\frac{1}{2}(\pi-2\sin^{-1}0.5)-\cos(\sin^{-1}0.5)\right]=0.196$$

前項と同様にして図6をうる.

前報(5—ii)

$$N=\frac{K_1}{\pi}\left\{\frac{\delta_1}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)+\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right\}+\frac{K_2}{2} \tag{7}$$

ここで,$K_1=K_2=1$,$X=1$,とおけば

$$N=\frac{1}{\pi}\left\{\delta_1\cos(\sin^{-1}\delta_1)+\sin^{-1}\delta_1\right\}+\frac{1}{2} \tag{7$'$}$$

前項と同様にして図7をうる.

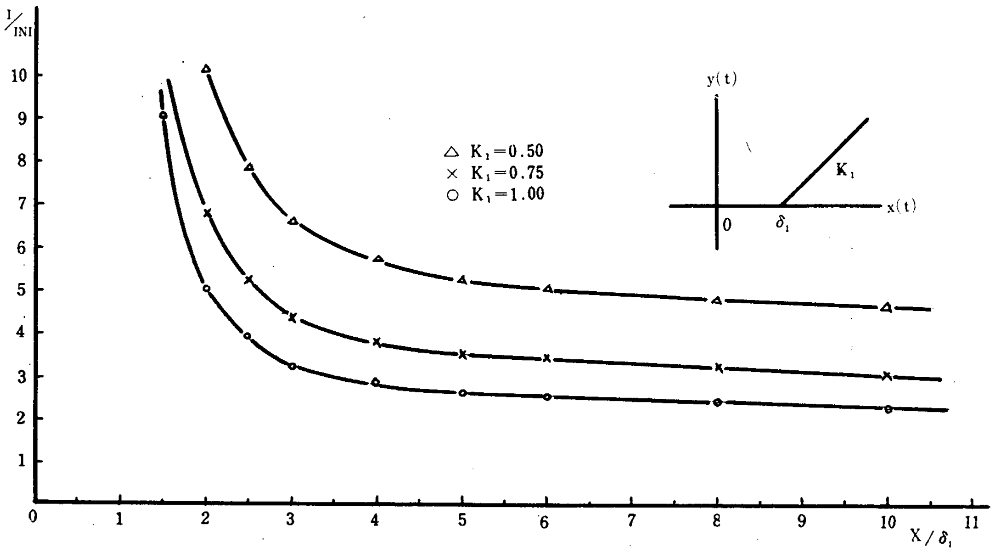

図5. (前報4—ii)

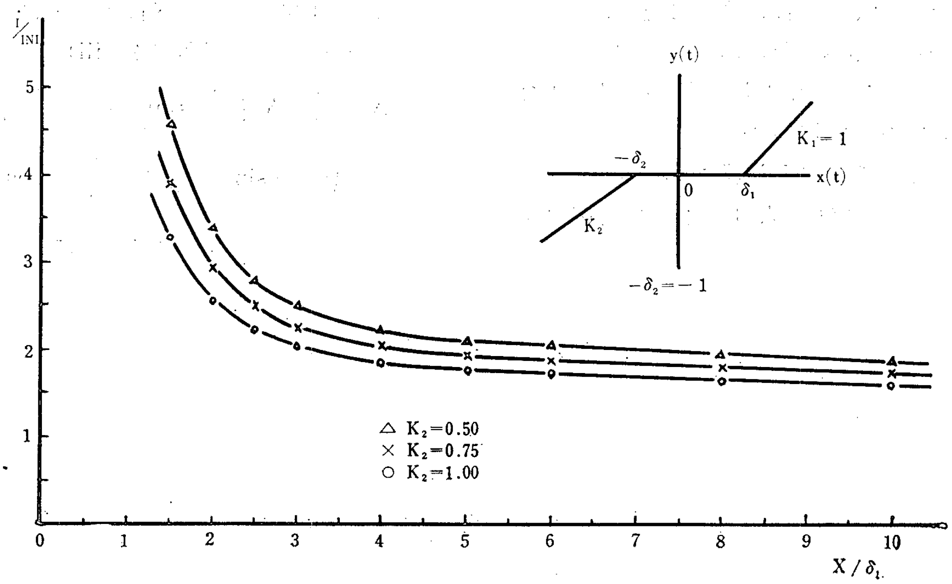

図6.　(前報4—iii)

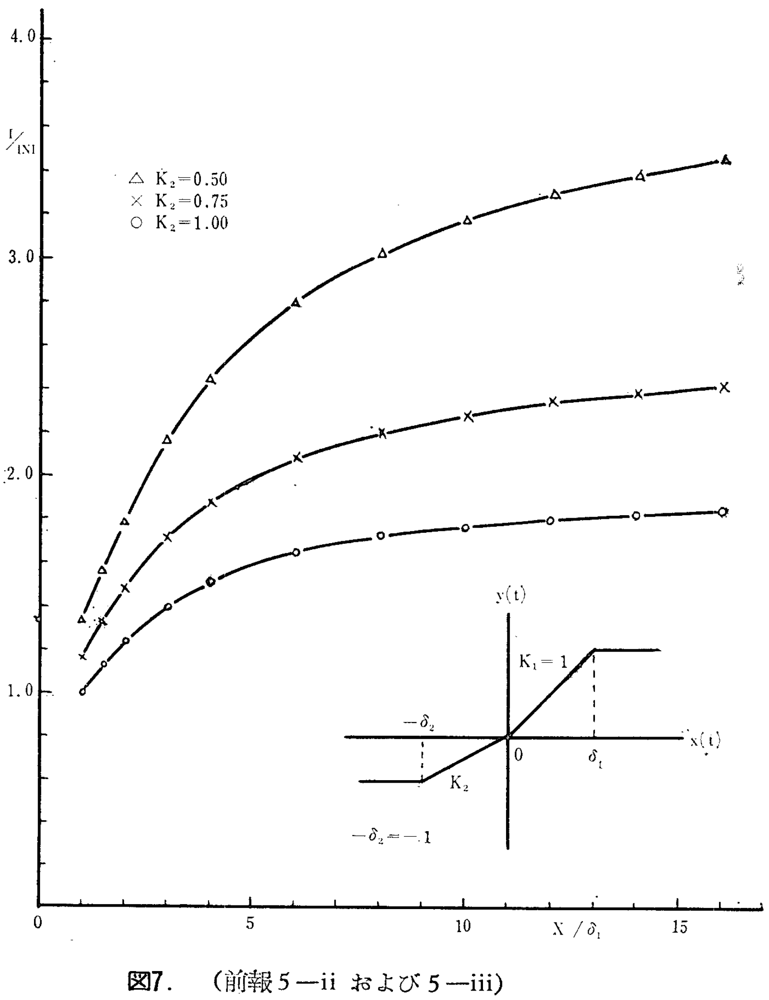

図7.　(前報5—ii および5—iii)

前報（5—iii）

$$N=\frac{1}{\pi}\left[K_1\left\{\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}+\frac{\delta_1}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)\right\}+K_2\left\{\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}+\frac{\delta_2}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)\right\}\right] \quad (8)$$

ここで，$K_1=K_2=1$，$X=1$，$\delta_2=1$ とおけば

$$N=\frac{1}{\pi}\left\{\sin\delta_1+\delta_1\cos(\sin^{-1}\delta_1)\right\}+B \quad (8)'$$

ただし，

$$B=\frac{1}{\pi}\left\{\sin^{-1}1+\cos(\sin^{-1}1)\right\}=\frac{1}{2}$$

(8)′ 式の特性曲線は，(7)′ 式と比較すれば明らかなように図7の特性曲線と全く重なる．

前報（6—V）

$$N=\frac{K_1}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\delta_1+h}{X}-\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}+\frac{\delta_1}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)-\frac{\delta_1-h}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1+h}{X}\right)\right\}+\frac{K_2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\delta_2+h}{X}-\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}+\frac{\delta_2}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)-\frac{\delta_2-h}{X}\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2+h}{X}\right)\right\} \quad (9)$$

ここで，$K_1=K_2=1$，$X=1$，$\delta_2=0.5$，$h=0.2$ とおけば，

$$N=\frac{1}{\pi}\left[\sin^{-1}(\delta_1+0.2)-\sin^{-1}\delta_1+\delta_1\cos(\sin^{-1}\delta_1)-(\delta_1-0.2)\cos\{\sin^{-1}(\delta_1+0.2)\}\right]+D \quad (9)'$$

ただし，

$$D=\frac{1}{\pi}\left[\sin^{-1}0.7-\sin^{-1}0.5+0.5\cos(\sin^{-1}0.5)-0.3\cos(\sin^{-1}0.7)\right]=0.150$$

(9)′ の特性曲線ならびに K_2 を変えたときの特性を図8に示す．

前報（8—iii）

$$N=\frac{2r}{\pi X}\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)\right\}-j\frac{2r}{\pi X^2}(\delta_1+\delta_2) \quad (10)$$

ここで，$r=1$，$X=1$，$\delta_2=0.5$ とおけば，

$$N=\frac{2}{\pi}\left\{\cos(\sin^{-1}\delta_1)+\cos(\sin^{-1}0.5)\right\}-j\frac{2}{\pi}(\delta_1+0.5)=a-jb$$

$$|N|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\quad \varphi=\tan^{-1}b/a \quad (10)'$$

(10)′ 式の特性曲線を図9に示す．

前報（9—ii）

$$N=\frac{r}{\pi X}\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1+h}{X}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)\right\}-j\frac{rh}{\pi X^2} \quad (11)$$

ここで，$r=1$，$X=1$，$h=0.2$ とおけば，

$$N=\frac{1}{\pi}\left[\cos\{\sin^{-1}(\delta_1+0.2)\}+\cos(\sin^{-1}\delta_1)\right]-j\frac{0.2}{\pi} \quad (11)'$$

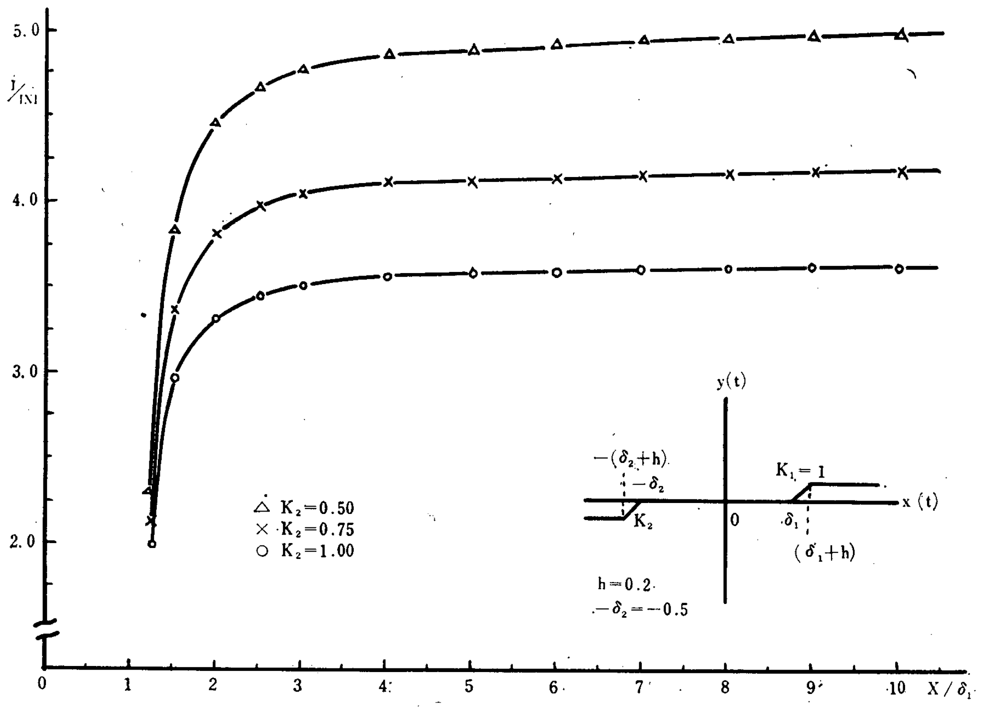

図8. （V—6）

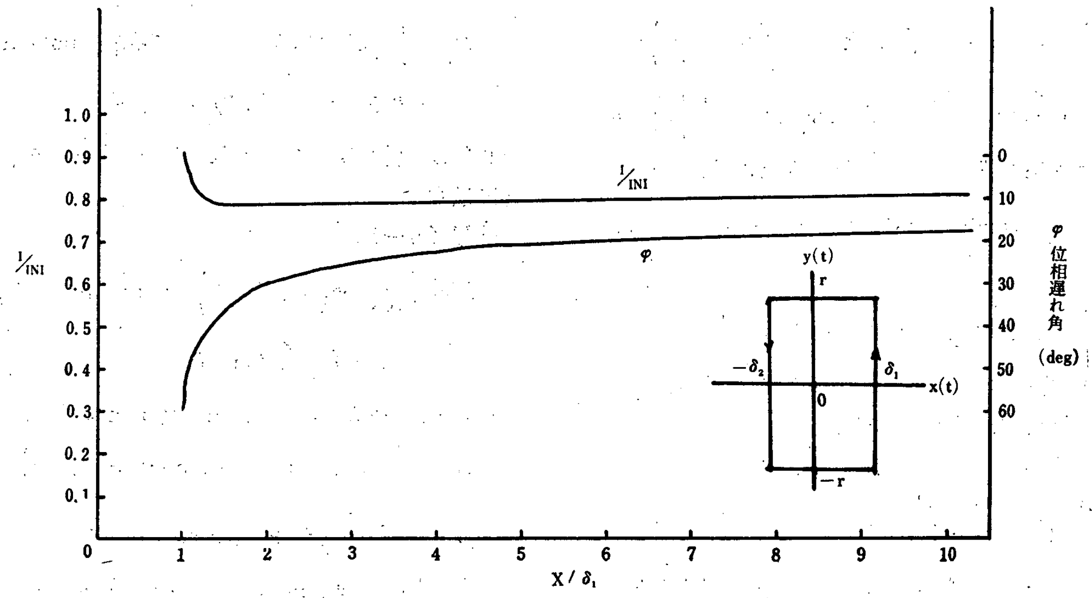

図9.　(前報8—iii)

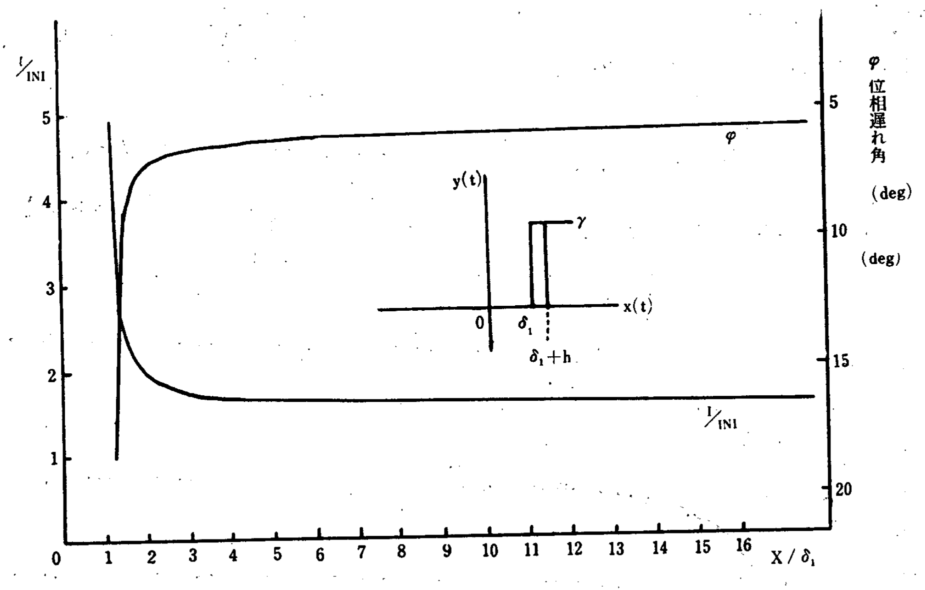

図10.　(9—ii)

(11)′ 式より，1 / | N | およびφを求め，図10に示す．

前報（9—iii)

$$N=\frac{r}{\pi X}\left\{\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1+h}{X}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_1}{X}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2+h}{X}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{\delta_2}{X}\right)\right\}-j\frac{2rh}{\pi X^2} \quad (12)$$

ここで，$r=1$，$X=1$，$\delta_2=0.5$，$h=0.2$とおけば，

$$N=\frac{1}{\pi}\left[\cos\left\{\sin^{-1}(\delta_1+0.2)\right\}+\cos(\sin^{-1}\delta_1)+\cos(\sin^{-1}0.7)+\cos(\sin^{-1}0.5)\right]-j\frac{0.4}{\pi} \quad (12)'$$

(12)′式より，1 /|N| およびφを求め図11に示す．

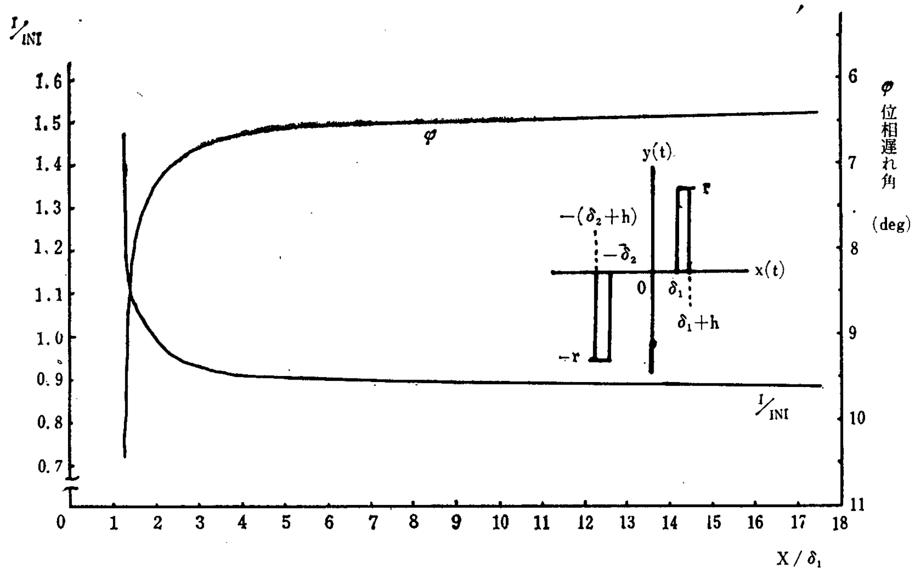

図11.　（前報9—iii）

4. む　す　び

種々の非対称非線形要素のゲインおよび位相の入力依存性を数値計算によって求め，特性曲線で示した.

非対称非線形要素を含む制御系のシンセシスやアナリシスを行う際に，従来のボード線図やナイキスト線図などの線形的手法に，本報告の特性曲線を利用して補正を行い精度の向上に多少でも役立てて戴ければ幸である.

終りに，常々御討論や御支援を賜わっている山口大学工学部足立講師，ならびに数値計算を御手伝戴いた学生嶋崎君および松島，深瀬，小川，古柴，久保田の諸君に深謝の意を表わす.

参　考　文　献

1）嶺，足立；本報告，Vol. 1—1，No. 1，pp. 73～80，（1964）

2）嶺，足立；非対称バックラッシュを含む自励系プロセスの記述関数法による解析，機学会42期全国大会講演前刷集，No. 122，pp. 131～134，（1964）

3）嶺，足立；非対称バックラッシュと位相進み現象を有する熱系プロセス自励振動の解析，電気4学会連合大会講演論文集，No. 454，（1965）

4）前沢；非線形制御系の解析，第7回自動制御連合講演会特別講演論文集，pp. 19～39，（1964）

5）丸橋，近藤；記述関数による非線形制御系の過渡応答の算定について，制御工学，Vol. 8，No. 10，pp. 524～527，（1964）

6）前沢；非対称断片線形特性を有する系の強制振動について，（第1報解析的手法の説明），機械学会論文集，Vol. 26，No. 167，pp. 884～900，（1960）

7）前沢；同上，（第2報アナコム実験との比較），同上，pp. 901～908，

8）前沢；同上，（第3報連続物体系の場合，超音波加工機への応用），同上，pp. 909～917，

9）前沢；断片線形特性要素を含む閉ループ自動制御系の周期動作（不感帯要素の場合），機械学会論文集，Vol. 26，No. 170，pp. 1461～1474，（1960）

10）前沢；同上，（続報，要素特性の一般化と数学的基礎付け），機械学会論文集，Vol. 29，No. 200，pp. 794～804，（1963）

11）J. E. Gibson；Nonlinear Automatic Control，P. 344，Mc Graw-Hill（1963）

12）嶺，足立；非対称バックラッシュを含む熱制御系の自励現象の解析，本誌，pp. 39～45，

（昭和40年7月1日受理）