

波形解析における最適波形と力学の応用

大久保 明 伸*

Optimum wave and application of mechanics in wave analysis.

Akinobu OHOKUBO

Abstract

This paper describes uncertainly principle in wave analysis. The uncertainly principle and the optimum wave are given by solution of next differential equation.

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} + \eta^2 (1 + \lambda H(\omega))F = 0$$

By using Lagrangian ($\mathcal{L} = \frac{1}{\eta^2} \dot{F}^2(\omega) - F^2(\omega)$), this equation is given, which is known as schrödinger equation in quantam mechanics.

The solution of the equation is orthogonal function.

The min mum value of uncertainly is $\frac{1}{2}$ and the wave form is gaussian pulse.

This idea is given by Newton equation ($F=mp$) and mechanical analysis.

1. ま え が き

ハイゼンベルグによりある原子的な系の振舞いを記述する特定な組 (直交座標 x とそれに対応する運動量の x 軸成分 P_x) をとるとこの二つの変数を同時に小さくすることはできないことが証明されている¹⁾.

この事実は量子力学において不確定性原理としてよく知られている。

また波形解析に用いられるフーリエ変換対におけるパルスの時間幅と帯域幅も同時に小さくできない²⁾.

この二つの系の類似性はそれらの系の波動性によるものである。

さらにこの不確定関係は標準化定理と密接な関係をもつことが指摘されている³⁾.

本論文では波形解析における不確定関係を定量的に論じ不確定性を満足する最適な信号波形をもとめる。

以下次のように信号波を定義しておく。

信号の時間表示を $f(t)$, 周波数表示を $F(\omega)$ とすると次のフーリエ変換の式が成立する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (2)$$

信号波の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 1 \quad (3)$$

が成立するものとする。

信号波の時間幅 (Δt), 帯域幅 ($\Delta\omega$) は原点のまわりの二次モーメントを用いて定義する。

$$(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \quad \text{但し有限の場合 } T \quad (4)$$

$$(\Delta\omega)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{但し有限の場合 } \Omega \quad (5)$$

2. 時間幅の有限な調和波の波動方程式

信号波を $f(t) = K \exp(j\omega t)$ とするとこれより下の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \quad (6)$$

(6)の一般解は

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (7)$$

境界条件を $f\left(\frac{T}{2}\right) = f\left(-\frac{T}{2}\right) = 0$ とすると

$$A \sin \frac{\omega T}{2} + B \cos \frac{\omega T}{2} = 0 \quad (8)$$

$$B \cos \frac{\omega T}{2} - A \sin \frac{\omega T}{2} = 0 \quad (9)$$

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

よって(6)の解は

$$f(t) = A \sin \frac{n\pi}{T} t \quad \text{但し } n = 2, 4, 6 \dots \quad (10)$$

$$f(t) = B \cos \frac{n\pi}{T} t \quad \text{但し } n = 1, 3, 5 \dots \quad (11)$$

(10), (11)が規格化条件(3)を満足するためには

$$A = B = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{である.}$$

従って規格化された解は

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{n\pi}{T} t \quad n: \text{偶数} \quad (12)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{n\pi}{T} t \quad n: \text{奇数} \quad (13)$$

(12), (13)は正規直交関数であるから時間有限なパルスは、この関数系の適当な一次結合であらわすことができる。次に微分方程式(6)はニュートンの分方程式より導びくことができることを示す。

ニュートンの微分方程式

$$F = m\ddot{x} \quad \text{但し} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (14)$$

はある意味では力の場を移動する粒子の最適な軌道を示す微分方程式である。

(14)でFは力、mは質量、xは位置である。

ニュートンの微分方程式(14)は(15)より積分原理を用いて導びくことができる。

ラグランジアンを次の式で定義する。

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (15)$$

ここでV(x)はポテンシャルで次の関係がある。

$$-F = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (16)$$

積分原理を要約すると系の時刻 $t_1 \sim t_2$ で実際にと得る状態は次の変分が零になるような運動である。

これはハミルトン原理として知られている。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt = 0 \quad (17)$$

(17)を満足する微分方程式は下のオイラー、ラグランジュの方程式である。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

(15)を(18)に代入すると(14)が得られる。ここで信号波の場合のラグランジアンを作るために下の対応を考える。

$$\left. \begin{array}{l} f^2(t) \text{ ————— } V(x) \\ f(t) \text{ ————— } \dot{x}(t) \\ \frac{1}{\omega^2} \text{ ————— } \frac{1}{2} m \end{array} \right\} \quad (19)$$

故に信号波に対応するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\omega^2} \dot{f}^2(t) - f^2(t) \quad (20)$$

(20)を(18)に代入すると次の式が得られる。

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \quad (21)$$

これは式(6)と同一であるので解(12), (13)はニュートンの方程式を解て得られる粒子の軌道に対応している。

この意味において解(12), (13)は最適である。

(19)で一階の微分に対応する項は次の式よりパルスの帯域幅に関係していることが分る。

パサパールの関係より

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{2\pi} \int \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = \int \dot{f}^2(t) dt \quad (22)$$

一般力学によると系のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [\text{運動エネルギー}] - [\text{ポテンシャルエネルギー}] \\ &= T - V \end{aligned} \quad (23)$$

なる関係がある。

信号波においてもポテンシャルを $f^2(t)$ 、運動エネルギーをパルスの帯域幅に対応させると波形解析で知られている概念が得られる。

この様子をFig. 1に示す。

このような対応は力学系を電気系におきかえる場合などによく用いられている。

以上の考察は時間制限をされたパルスに関するものであるが、同様に帯域制限されたパルスではフーリエ変換の対称性により次の式が導びかれる。

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{\eta^2} \dot{F}^2(\omega) - F^2(\omega) \quad (24)$$

$$\frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} + \eta^2 F(\omega) = 0 \quad (25)$$

帯域の制限条件を $|\omega| \leq \frac{\Omega}{2}$ とすると次の解を得る。

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \sin \frac{n\pi}{\Omega} \omega \quad n: \text{偶数} \quad (26)$$

$$F(\omega) = j\sqrt{\frac{2}{\Omega}} \cos \frac{n\pi}{\Omega} \omega \quad n: \text{奇数} \quad (27)$$

3. フィルターをもった系の微分方程式

今までの考察はいわば物理系の自由振動に対応したものである。

前のラグランジアン形式をハミルトニアンを用いて記述する。

正準変換より

$$g = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \quad (28)$$

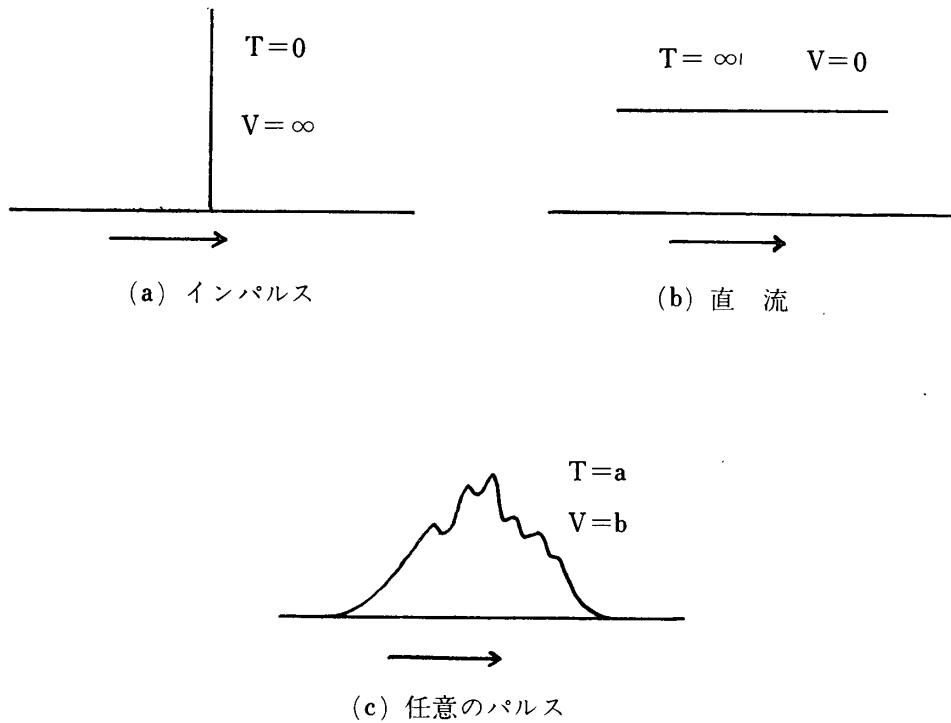


Fig-1 波形とエネルギーの関係

とするとこれは力学では共役運動量とよばれている。
これを用いて次の式より定義されるハミルトニアンを導
びく。

$$\begin{aligned} H &= \dot{f}q - \mathcal{L}(f, \dot{f}) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \dot{f}^2 + f^2 \end{aligned} \quad (29)$$

このハミルトニアン H は系の運動エネルギーとポテン
シャルエネルギーの和になって系の全エネルギーをあらわ
している。

従ってこの系は保存的な系であると考えられる。

保存系の条件 $\frac{dH}{dt} = 0$ より式 (18) が得られる。

次にフィルターをもった系を考える。

フィルターの出力はシステム関数を $H(\omega)$ とすると次の
式が成立する。

$$\frac{1}{2\pi} \int |H(\omega)F(\omega)|^2 d\omega = K \quad (32)$$

従ってフィルターをもった系のラグランジアンは式 (32) の
条件のもとに式 (24) のラグランジアンが積分原理を満足す
るようにするとよい。

従って新しいラグランジアンは β をラグランジュ定数と
して次のようになる。

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{\eta^2} \dot{F}^2(\omega) - F^2(\omega) + \beta |H(\omega)F(\omega)|^2 \quad (33)$$

このラグランジアンに対して積分原理を適用すると次の
微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 F}{d\omega^2} + \eta^2(1 + \beta H^2)F = 0 \quad (34)$$

(34) はフィルターをもった系の最適波形の満足する微分方
程式である。

これはシュルムリッヰル型の方程式で量子力学では
シュレディンガーの波動方程式として知られている。

(34) において $H(\omega) = 0$ とするとフィルターをもたない系
の方程式 (25) になる。

$$\Omega = -\frac{d^2}{d\omega^2} - \beta H_1$$

とすると (34) は次のようになる。

$$\Omega F(\omega) = \eta^2 F(\omega) \quad (35)$$

(35) より次の二つの式を作る。

$$F_2^* \Omega F_1 = \eta^2 F_1 F_2^* \quad (36)$$

$$F_1 \Omega F_2^* = \eta F_1 F_2^* \quad (37)$$

但し F_1, F_2 は (35) の異なった固有関数であり F^* は
その共役関数である。

(36) - (37) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F_2^* \Omega F_1 - F_1 \Omega F_2^*) d\omega = (\eta_1^2 - \eta_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} F_1 F_2^* d\omega$$

部分積分法を左辺に適用すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} (F_1 \frac{d^2 F_2^*}{d\omega^2} - F_2^* \frac{d^2 F_1}{d\omega^2}) d\omega \\ &= F_1 \frac{dF_2^*}{d\omega} - F_2^* \frac{dF_1}{d\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

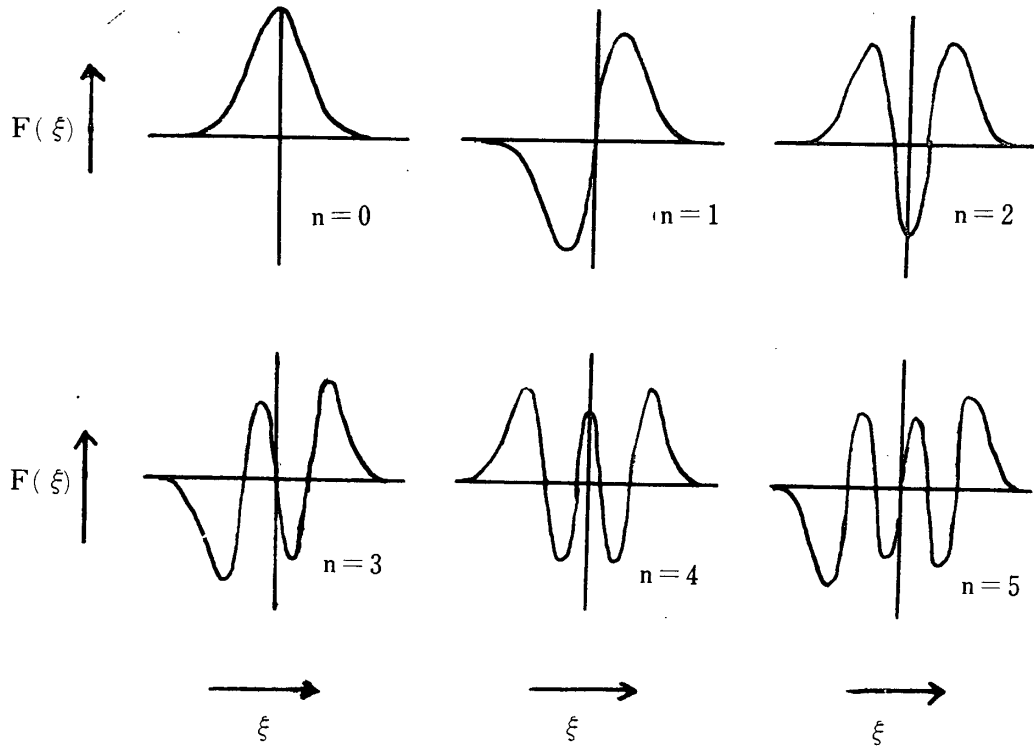


Fig-2 F(ξ) の波形

$= 0$
 $\gamma_1^2 \neq \gamma_2^2$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1 F_2^* d\omega = 0 \quad (38)$$

となり (34) の解は直交であることがわかる。
 ここで (34) の具体的な問題を解てみよう。
 フィルターとして微分回路を持った系を考える。
 $H(\omega) = j\omega$ であるから (34) は次のようになる。

$$\frac{d^2 F}{d\omega^2} + \gamma^2(1 - \beta\omega^2)F = 0 \quad (39)$$

ここで次のような変数変換を行う。

$$\xi = K\omega, \quad K^4 = -\gamma^2\beta, \quad \lambda = \frac{\gamma^2}{K^4}$$

$$\therefore \frac{d^2 F}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)F = 0 \quad (40)$$

となる。

(40)の解は ξ が十分大きいところでは $\xi^2 F$ の項のみを考えるとよい。

従って(40)の解の形を次のように仮定する。

$$F(\xi) = I(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad (41)$$

(41)を(40)に代入すると次の $I(\xi)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dI}{d\xi} + (\lambda - 1)I = 0 \quad (42)$$

(42)はエルミートの方程式である。

また(42)は $\lambda = 2n + 1$ の場合しか解をもたないので(42)は次のように書きかえられる。

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dI}{d\xi} + 2nI = 0 \quad (43)$$

$$\therefore I_n = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \exp(-\xi^2) \quad (44)$$

たとえば

$$I_0 = 1, \quad I_1 = 2\xi, \quad I_2 = 4\xi^2 - 2$$

故に(41)は規格化定数を N_n として次のようかかれる。

$$F_n(\xi) = N_n I_n(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad (45)$$

規格条件より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{|N_n|^2}{2\pi K} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

より

$$N_n = \left(\frac{K}{\sqrt{\pi} 2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

この規格化された解を Fig. (2) に示す。

$n=0$ の場合には $F(\omega)$ はガウス形の分布になる。

これよりフーリエの逆変換により $f(t)$ を求めてもや

はりガウス形のパルスになる。
この波形があらゆる波形の中で不確定性が最小になることをあとで示す。

4. 波形の不確定関係

まず時間制限されたパルス波の不確定関係を求める。解はすでに(12), (13)であたえられているので、ただちにフーリエ積分を実行して次の値を得る。

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

従ってパルスの時間幅は T であるので次の式が成立する。

$$T \cdot \Delta\omega = n\pi \quad (48)$$

これは T を無限に小さくしてゆくとパルス幅 $\Delta\omega$ は大きくなる。

この様子は Fig. 2 で示した。

その事実を定量的に示したものである。

同様に帯域制限をうけた波形では

$$\Omega(\Delta t) = \frac{n\pi}{2} \quad (49)$$

すなわち帯域を一点に集中させると時間幅は無限に広くなる。

今までの解析はある種の条件を受けたパルス波の不確定関係であるがシュワルツの不等式を用いると不確定値の最小値を求めることができる。

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2(\Delta t)^2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega F(\omega) |^2 d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t)^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt \right) \\ &\geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} t f \dot{f} dt \right)^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} t f \dot{f} dt &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= -\frac{1}{2} \\ \therefore (\Delta\omega)^2(\Delta t)^2 &\geq \frac{1}{4} \\ \therefore (\Delta\omega)(\Delta t) &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

(50)の等式が成立することがある場合には次の関係が成立することが必要である。

$$\dot{f}(t) = atf(t) \quad (51)$$

この解は

$$f(t) = A \exp\left(\frac{at^2}{2}\right) \quad (52)$$

である。

これはガウシヤンパルスである。

すなわち波束の不確定関係の最小値は $\frac{1}{2}$ であることを示している。

この関係は高次の不確定性に拡張され次の式が成立⁴⁾する。

$$(\Delta\omega)(\Delta t) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (53)$$

また文献(5)によってサンプリング定理と密接な関連があることが指摘されている。

5. 結 言

以下の解析は最近かなり多くの人々によって解析されている。

最適波形の微分方程式がニュートンの微分方程式に関連していることは興味深い。

またフィルターをもった系の微分方程式はシュレディンガーの波動方程式になっていてさらにフィルターのシステム関数の2乗は量子力学のポテンシャルに対応している。

さらに量子力学におけるボアの相補性の原理を適用すれば実験的にも意味のあるものである。

本論文では集中定数系をみつかったが分布定数系に拡張するのは今後の研究課題である。さらにハミルトニアン形式での問題の解析も興味ある問題である。

最後に横助教授、土井助教授にお世話になったことに深謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1), 4) L. Pauling: Introduction to Quantum Mechanics, Mcgraw-Hill, PP. 428~436
- 2) 細野, 大和久: 波形解析における不確定性原理の拡張, 電通誌, 48巻8号, P. 1394~1398
- 3), 5) 甘利: 情報理論II, 共立出版 P. 5~6

(昭和45年9月20日受理)