絶対値和を用いたポートフォリオ組み換え量最小化分析*

吉川周二†, 田中翔子†, 牧智弘†, 吉川大介‡

A remark on the rebalanced amount of portfolio based on absolute differences

Shuji Yoshikawa, Shoko Tanaka, Tomohiro Maki, Daisuke Yoshikawa

Abstract: In this article, we study the optimal portfolio. There are two purposes we focus on. One is to reduce risks using principal component analysis. The other is to minimize the amount of rebalancing portfolio. Here, the amount of rebalancing portfolio is measured on the absolute difference basis. We especially devise the calculation method using portfolio discretization.

1 序

複数の株式からなるポートフォリオを所有している投資家は，株価の変動にあわせて随時ポートフォリオの組み換えを行う．いま, 対象資産が n 種類あり, 各銘柄の持ち株数が $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ であるとする．組み換え後のポートフォリオを $\boldsymbol{\theta}$ とすれば, ある条件の下でのポートフォリオの組み換え量 Z は,

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left| \theta_i - \tilde{\theta}_i \right| \tag{1}$$

と表される．主成分から定まるリスクを最小にする条件のもとでこの Z を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ を求める問題を考える．

時点 t での i 番目の銘柄の証券価格を f_i としたときの $\boldsymbol{f}$ を原資産ベクトルという $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が, この原資産ベクトル $\boldsymbol{f}$ の時系列に対する分散共分散行列の固有値と固有ベクトルを求める．ただし固有ベクトルは絶対値が 1 になるように規格化する．固有値を大きい順に並べて, 大きいものから第 1 固有値, 第 2 固有値, ..., 第 n 固有値と一般に呼ばれるが, これらの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ をそれぞれ第 1 主成分ベクトル, 第 2 主成分ベクトル, ..., 第 n 主成分ベクトルと呼ぶ．主成分 x_i とは第 i 主成分ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ と原資産ベクトル $\boldsymbol{f}$ との内積のことをいう．固有値に重複がなければ固有ベクトルは一次独立になる．固有ベクトルが一次独立であれば, 規格化された固有ベクトルは正規直交基底となるので, 正規直交基底の直交射影分解が可能であり,

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{p}_i) \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{p}_i$$

と書ける．この変数変換に対して $\tilde{\boldsymbol{f}}$ が $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に写されるとすると, その差は

$$\boldsymbol{f} - \tilde{\boldsymbol{f}} = (x_1 - \tilde{x}_1)\boldsymbol{p}_1 + (x_2 - \tilde{x}_2)\boldsymbol{p}_2 + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\boldsymbol{p}_n$$

と書ける．これを差分の記号 Δ を用いて書き直すと, $\Delta \boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i \boldsymbol{p}_i$．よって, ポートフォリオ価値 V は

$$V = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{f}$$

とかける．従って, 原資産価格の変動からポートフォリオ価値は

$$\Delta V = \boldsymbol{\theta} \cdot \Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{p}_1 \Delta x_1 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{p}_2 \Delta x_2 + \cdots + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{p}_n \Delta x_n$$

---

*(2008 年 11 月 28 日受理)

†宇部工業高等専門学校 経営情報学科

‡みずほ第一フィナンシャルテクノロジー

と変動する. もし, 第 1 主成分からなる変動を打ち消したければ, 上の等式より $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0$ とすればよい. 一般に第 i 成分の変動を打ち消したければ,

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{p}_i = 0 \tag{2}$$

となる. 主成分分析については, [1] などを参照にされたい.

本論文では, この条件 (2) をより一般化して非斉次項を含めた条件:

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + \cdots + a_n\theta_n = b \tag{3}$$

について問題を考えることにする. 第 m 主成分までのリスクを制御する条件は次の式:

$$\begin{cases} a_1^1\theta_1 + a_2^1\theta_2 + a_3^1\theta_3 + \cdots + a_n^1\theta_n = b_1 \\ a_1^2\theta_1 + a_2^2\theta_2 + a_3^2\theta_3 + \cdots + a_n^2\theta_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_1^m\theta_1 + a_2^m\theta_2 + a_3^m\theta_3 + \cdots + a_n^m\theta_n = b_m \end{cases} \tag{4}$$

で表される. この条件の下で Z を最小化する $\boldsymbol{\theta}$ を求める問題を考察する. 既存の結果では, Z として絶対値和 (1) でなく自乗和:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i - \tilde{\theta}_i)^2$$

を考えることが多かった. 自乗和の場合, Z は θ_i について偏微分可能であるため, Lagrange の未定乗数法を用いると, 問題は $n+m$ 次の連立方程式に帰着され, 理論値が簡単に求まるためである. 一方で, 絶対値和 (1) の場合, θ_i についての偏導関数は $\theta_i = \tilde{\theta}_i$ で微分不可能であり, 問題を形式的に Lagrange の未定乗数法の枠組みに乗せても理論値は自乗和の時ほど簡単には求まらない.

しかし, $\boldsymbol{\theta}$ は実際には整数値ベクトルであることが自然であるため, 実務上は必ずしも実数値解を求める必要はない. 次節では, 整数値ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対して絶対値和 Z を最小化する $\boldsymbol{\theta}$ を求めるアルゴリズムを紹介する.

注意 1.1. 条件を (3) と一般化したことで, 以下の条件も考えられるようになる.

(i) 任意の銘柄の持ち株数を固定する,

(ii) 組み換え時の追加費用 (組み換えに要する手数料は除く) をゼロにする.

実際, 条件 (i) は式で表すと $\theta_k = c$(定数) であり, (ii) の条件は $(\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \boldsymbol{f} = 0$ と書ける. これらはいずれも一次式であるから (3) の形で表すことができる.

2　絶対値和の最小化問題について

絶対値和 (1) で与えられる組み換え量 Z を最小化する整数値ベクトルのポートフォリオ$\boldsymbol{\theta}$を求める数値計算プログラムを作成したい. 一番単純な方法は総当たりの比較プログラムであろう. しかし, 総当たりを行うにも, $\theta_i (i = 1, 2, \ldots)$ はそれぞれ $-\infty$ から ∞ まで検証するわけにはいかない. そこで, $\boldsymbol{\theta}$ の各要素の有界性を保証する以下の定理を証明する.

定理 2.1. ポートフォリオ組み換え量

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left| \theta_i - \tilde{\theta}_i \right|$$

を条件 (4) のもとで最小にする $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ は,

$$\boldsymbol{\theta} \in \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| < R \}$$

を満たす. ただし正定数 R は a_i^j, b_j, $\tilde{\theta}_i$ のみに依存する $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Proof. 条件 (4) の各式の第 1 項から第 $n-m$ 項までを右辺に移項すると,

$$\begin{cases} a_{n-m+1}^1\theta_{n-m+1} + a_{n-m+2}^1\theta_{n-m+2} + \cdots + a_n^1\theta_n = b_1 - (a_1^1\theta_1 + a_2^1\theta_2 + \cdots + a_{n-m}^1\theta_{n-m}) \\ a_{n-m+1}^2\theta_{n-m+1} + a_{n-m+2}^2\theta_{n-m+2} + \cdots + a_n^2\theta_n = b_2 - (a_1^2\theta_1 + a_2^2\theta_2 + \cdots + a_{n-m}^2\theta_{n-m}) \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n-m+1}^m\theta_{n-m+1} + a_{n-m+2}^m\theta_{n-m+2} + \cdots + a_n^m\theta_n = b_m - (a_1^m\theta_1 + a_2^m\theta_2 + \cdots + a_{n-m}^m\theta_{n-m}) \end{cases} \tag{5}$$

これを行列を用いて書き表すと，

$$\begin{pmatrix} a^1_{n-m+1} & a^1_{n-m+2} & \dots & a^1_n \\ a^2_{n-m+1} & a^2_{n-m+2} & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_{n-m+1} & a^m_{n-m+2} & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{n-m+1} \\ \theta_{n-m+2} \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_{n-m} \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_{n-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-m} \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる．ここで，左辺の係数行列と右辺第二項の係数行列をそれぞれ A, B とかくことにする．固有値に重複がないとすると，固有ベクトルは一次独立なので，A は逆行列をもつ．条件によって一次従属になるような $\boldsymbol{a}^i = (a^i_j)^n_{j=1}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ を選ぶことも出来るが，その時は固有値の重複分だけ少ないの条件の問題を考えればよい．よって一般性を失うことなく，A は逆行列をもつとしてよい．ゆえに方程式 (6) は

$$\begin{pmatrix} \theta_{n-m+1} \\ \theta_{n-m+2} \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - A^{-1}B \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-m} \end{pmatrix}$$

と書ける．更に

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1m} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mm} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{m,n-m} \end{pmatrix}$$

と表すことにすると，結果として

$$\theta_{n-m+j} = \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji} b_i - \sum_{i=1}^{n-m} c_{ji}\theta_i \quad (j = 1, 2, \dots, m) \tag{7}$$

と書ける．組み替え量の式 (1) に (7) を代入すると，

$$Z = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i - \tilde{\theta}_i| = \sum_{i=1}^{n-m} |\theta_i - \tilde{\theta}_i| + \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji} b_i - \sum_{i=1}^{n-m} c_{ji}\theta_i - \tilde{\theta}_{n-m+j} \right| \tag{8}$$

と $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-m})$ についての式に書き表すことができる．さらに，

$$x_i = \theta_i - \tilde{\theta}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n-m)$$

とおくと，(8) は，

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{Z}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} |x_i| + \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n-m} c_{ji}x_i + \sum_{i=1}^{n-m} c_{ji}\tilde{\theta}_i - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji} b_i + \tilde{\theta}_{n-m+j} \right| \end{aligned} \tag{9}$$

となる．従って考える問題は，$\tilde{Z}(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ を最小化する $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ を見つける問題に帰着される．ここで，

$$M = \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n-m} c_{ji}\tilde{\theta}_i - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji} b_i + \tilde{\theta}_{n-m+j} \right|$$

とおくと (9) より，

$$\tilde{Z}(\mathbf{0}) = M.$$

さらに，$\boldsymbol{x} \in \{\max_{i=1,\dots,n-m} |x_i| > M\}$ ならば

$$Z(\boldsymbol{x}) \geq \sum_{i=1}^{n-m} |x_i| > M$$

である. 従って, $\tilde{Z}(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ は $\{\max_i |x_i| \leq M\}$ の中にある. よって,

$$|\theta_i| \leq M + |\tilde{\theta}_i| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m).$$

方程式 (7) より,

$$\begin{aligned} |\theta_{n-m+j}| &\leq \sum_{i=1}^{m} |\hat{a}_{ji} b_i| + \sum_{i=1}^{n-m} |c_{ji}||\theta_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\hat{a}_{ji} b_i| + \sum_{i=1}^{n-m} |c_{ji}|(M + |\tilde{\theta}_i|) \end{aligned}$$

が成り立つ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. 従って,

$$R := \max\left\{ M + \max_{i=1,\ldots,n-m} |\tilde{\theta}_i|, \quad \max_{j=1,\ldots,m} \left(\sum_{i=1}^{m} |\hat{a}_{ji} b_i| + \sum_{i=1}^{n-m} |c_{ji}|(M + |\tilde{\theta}_i|) \right) \right\}$$

ととると, 定理は示される.

□

この定理を用いると, 各 θ_i が $-R$ から R までの整数値になるような $\boldsymbol{\theta}$ に対して組み換え量 (1) を計算し, その中から最小値を選ぶというアルゴリズムで, 絶対値和に対する組み換え量 (1) の最小化問題の数値計算プログラムが作成できる.

3　今後の展望と課題

結びに, 今後の研究の展望と課題について述べる. まず第 2 節で述べた方法が, 自乗和で連立方程式を解くプログラムに比べて計算量が多いか少ないかを検証する必要がある. また, 計算速度を向上させる為によりタイトな有界性条件を求めたい. 本論文で述べた結果は粗いもので, すでに広く知られている結果である可能性がある. そのため今後これらの問題に対する既存の結果にどのようなものがあるのかを調査する必要がある.

参考文献

[1] 永田靖, 棟近雅彦：多変量解析法入門, pp1–pp235, 東京, サイエンス社, 2001.