必要条件・十分条件の説明に関する一考察
――「であるための」「必要」という表現を巡って――

松浦利治＊

A Consideration on Necessary Condition and Sufficient Condition
――― About the words of “For” and “Necessary” ―――

Toshiharu MATSUURA

Abstract：If the statement $p \Rightarrow q$ is true, then we call p sufficient condition for q ,and we call q necessary condition for p. We know only $p \Rightarrow q$ and do not know $\Rightarrow p$,but why is q “necessary” “for” p ? We consider the meaning of the words of “necessary” and “for” from the viewpoint of contraposition and set.

Keywords：necessary condition, necessary, for, contraposition, set

１．はじめに

私は宇部高専一般科の数学の教員として、１年生に必要条件・十分条件を教えなければならないことがある。十分条件はともかく、必要条件に関しては自分でも納得がいかないところがあり、そこを避けて「$p \Rightarrow q$ の p（矢印の前にある条件）を十分条件、q（矢印の後にある条件）を必要条件という」と教えてきた。

私自身、高校で習って以来ずっと、必要条件の「であるための」「必要」という表現に納得がいかなかった。$p \Rightarrow q$ しかいっていないのに（$\Rightarrow p$ については何もいっていないのに）、なぜ「p であるために必要」がいえるのか納得がいかなかった（４０年以上も！）。

そこで、このような「であるための」「必要」の納得のいく説明を求めて、考察するものである。数学教育をよりよくするためであるとも、考えられる。（あえて、私自身の不勉強は棚にあげて）。

(2007 年 12 月 4 日受理)
＊宇部工業高等専門学校一般科

２．問題の設定

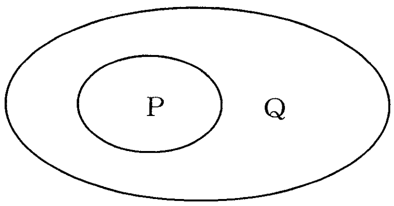
２つのことがら p、q について、命題「p ならば q である」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるというが、なぜ、q は $\underline{p}$ であるために 必要なのかを説明せよ。

３．解答１

集合を用いて説明する。

条件（ことがら）p を満たす要素の集合を P とする。条件 q を満たす要素の集合を Q とする。$p \Rightarrow q$ であるから、集合では、$P \subset Q$ が成り立つ（P は Q に含まれる。即ち集合 P の要素 p は集合 Q の要素でもある）。p が成り立つとはどういうことか。p は集合 P の要素であるということである。P は Q に含まれるのだから、p は集合 Q の要素でなければならない。p が成り立つために、p

は少なくとも集合 Q の要素であることが必要である。したがって、p が成り立つために、p は集合 Q の要素であることが必要である。q は p であるために必要である。



4．解答２

対偶を用いて説明する。

$p \Rightarrow q$ であるから、対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ である。即ち q でなければ p でない。p であるためには、少なくとも「『q でない』ではない」ことになっていなければならない。少なくとも $\overline{\overline{q}}$ 即ち q でなければならない。よって p であるために q であることが必要である。q は p であるために必要である。

5．考察というよりむしろ感想

必要条件・十分条件での必要条件を習ったとき、$p \Rightarrow q$ しかいっていないのに（$\Rightarrow p$ については何もいっていないのに）、「p であるために」「必要」なのがわかりにくいのは、この段階で対偶も集合も習っていないか説明もされないかであるのに、「p であるために必要」の表現以外の説明がなされないからである。（十分条件の方は、$\Rightarrow q$ だから「q であるために」p であるだけで「十分」なのはよくわかるのに。）

6．おわりに

必要条件・十分条件での必要条件の「であるために必要」に関する納得のいく説明について考察した。自分ではある程度分かった積もりであるが、これで必要か十分かはよくわからない。もっと洗練させる必要はあると思われる。

<補足>なぜこのようなことを考えたか

Ⅰ　現在、宇部高専で用いている教科書[1]によると、p.57 からの「命題」の項で、

> あることがらを文章や式で表したもので、それが正しいか正しくないかが明確に決まるものを**命題**という。命題が正しいとき命題は**真**であるといい、正しくないとき命題は**偽**であるという。
>
> ――― 例題をはさんで ―――
>
> 命題が偽であることを示すには、それが成り立たない例を挙げればよい。このような例を**反例**という。
>
> ――― 問をはさんで ―――
>
> 命題は、2つのことがら p、q について「p ならば q である」という形で述べられることが多い。このとき、p を**仮定**、q を**結論**という。
>
> 命題「p ならば q」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、p は q であるための**十分条件**であるといい、q は p であるための**必要条件**であるという。…

４０年以上前に私が高校で学んだ教科書[2]によると、（二次方程式の文脈の中で）p.47 からの「必要条件と十分条件」の項で、

> 二つのことがら(イ)、(ロ)があって、(イ)が成り立てば、(ロ)が成り立つとき、すなわち
>
> (イ)　ならば　(ロ)　　：　　(イ) → (ロ)
>
> であるとき、(ロ)は(イ)が成り立つための**必要条件**であるという。また、逆に、(ロ)が成り立てば(イ)が成り立つとき、すなわち
>
> (ロ)　ならば　(イ)　　：　　(ロ) → (イ)
>
> であるとき、(ロ)は(イ)が成り立つための**十分条件**であるという。
>
> したがって、(イ) → (ロ)、すなわち、(ロ) が(イ)の必要条件であるときには、逆に、(イ) は(ロ)の十分条件である。…

教科書[2]のこの記述は、混乱を招きかねない。単に「矢印の前のことがらを十分条件、矢印の後のことがらを必要条件」と言い切ってしまえばよいものを、(イ) → (ロ)を言っておきながら、((ロ) → (イ) であるとは言っていないにもかかわらず) (ロ)は(イ)が成り立つための必要条件と言って、必要条件を先に述べ、その後で逆の話として十分条件を述べ、すんなりとは頭に入って来ない説明になっている。

これからすれば、教科書[1]の方がわかりやすい記述になっている。しかし、言えていない命題（$q \Rightarrow p$）に関して「p であるための必要条件」はわかりにくい。なぜ「p

であるための」なのか。$p \Rightarrow q$ しか言っていないのだから「q であるための」ならわかる。しかるに、$p \Rightarrow q$ としか言っていないのに（$q \Rightarrow p$ とは言っていないのに）「p であるための」とは何事か。

考えている状況をよく説明していない。やりたいことが何か他にあるのにその説明をしていない。$p \Rightarrow q$ はわかっている。今 q が成り立っている。とすれば p は成り立っているであろう。いや、そうは言えないかもしれない。別のことがらが成り立って、その結果として q が成り立っているかもしれない（別のことがら p_1 に関して $p_1 \Rightarrow q$ が成り立つ場合）。しかし p が成り立つためには、少なくとも q が成り立っていなければならないだろう（$p \Rightarrow q$ だから p が成り立てば q は成り立つのだから）。このような状況ではじめて、p が成り立つためには、q が成り立っていなければならないという意味で、q は p が成り立つために必要な条件になる。ここから「必要」条件の言葉が出てくるのであって、$p \Rightarrow q$ だけからはわからない。「q が成り立っている状況で p が成り立っているか」を問題にしているからであろう。

上述のことを多少表現をかえて述べてみる。

学ぶべきことは、一言でいうと、「十分条件→必要条件」ということであるが、次の表現は不十分ではないか。

$p \Rightarrow q$ のとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるという。

$p \Rightarrow q$（「p ならば q」が成り立つから）であるから、q であるために p は十分条件であるのはよい。

q ならばどうなのか、については何も言っていないのだから、p であるために q は必要条件であるというのはおかしいのではないか。p であるためになぜ必要なのか、p が成り立てば必然的に q が成り立つのだから、むしろ必然条件というべきではないのか。

q が成り立っているから、p が成り立っているのではないか。いや、それとも、他の命題 $p_1 \Rightarrow q$ によって、p_1 が成り立っているので、q が成り立っているのかも知れない。この場合は、q が成り立っているからといって、p が成り立っているわけではない。

p が成り立っているならば、$p \Rightarrow q$ によって、必ず q が成り立つ。したがって $p \Rightarrow q$ しか言えないとき（他の命題は考えないとき――数学だから論理的に、そんなことを言っていないのだから、考える必要はないといえば、それはその通りなのであるが、そのような状況のもとで）、p が成り立つためには、少なくとも、q が成り立っていなければならない。このような意味で、p が成り立つためには、q が成り立つことが必要なのである。これが必要条件の意味であろう。

q が成り立っているからといって、p が成り立っていると必ずしも言えるわけではないが（$q \Rightarrow p$ とは言っていないので）、q が成り立っていなければ、p は成り立っていない（これは $p \Rightarrow q$ の対偶の表現である。すなわち $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$）。対偶を持ち出してはじめて、「必要」という言葉が必要になるのであろう。

必要条件のわかりにくさは、$p \Rightarrow q$ 以外の p と q との関係（できれば可能性のあるものすべて）を明確に述べていないからであろう。言及していないからであろう。

Ⅱ　提案したいこと

ことがら p が成り立つとき、ことがら q が成り立つことを、$p \Rightarrow q$ と書く。命題「p ならば q である」

このとき、p と q との関係において、p を十分条件、q を必要条件という。ただしここでいう「必要」は数学用語であって、日常普通に使う「必要」という言葉とは一応関係ないとせよ。

q が成り立っているとき、$p \Rightarrow q$ なのだから、p が成り立っていることが期待されるが、そうだろうか。

対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が成り立つから、p が成り立つためには、少なくとも q（$\overline{\overline{q}}$）が成り立っていなければならないということから（ここまで説明してはじめて）、q を p であるための、必要条件という。

むしろ、いっそのこと、次のように述べたらよいのではないか。　２つのことがら p、q について「p ならば q である」という命題において、p を仮定、q を結論という。

命題「p ならば q」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、仮定 p は q であるための十分条件であるといい、結論 q は p であるための必要条件であるという。即ち、命題が真のとき、仮定を十分条件、結論を必要条件という。

Ⅲ　<ストーリー>

１．２つのことがら p、q について命題「p ならば q であ

る」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるという。――――高校（高専）の数学ではこう教えている(教えられてきた)。「p は q であるための十分条件である」というのはよい。$p \Rightarrow q$ だから p が成り立つだけで q が成り立つのだから、q が成り立つためには p が成り立つだけで十分である。

しかし、$p \Rightarrow q$ しかいっていないこの段階で「q は p であるための」というのはおかしい。q ならばどうなのだ、については何もいっていないのだからである。さらに p であるために「必要」な条件もおかしい。そんなことはわからない。この段階では、p が成り立てば q は必然的に成り立つのだから、q はむしろ必然条件というべきである。

したがって、この段階では、次のように述べるべきであると提案する。

２つのことがら p、q について命題「p ならば q である」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、p と q との関係において、p を十分条件であるといい、q を必要条件であるという。ただしここでいう「必要」は数学用語であって、日常普通に使う「必要」という言葉とは一応関係ない。

２．$p \Rightarrow q$ の対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を説明し、$p \Rightarrow q$ と $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ とは同じであることを述べた後、$p \Rightarrow q$ であり、q が成り立っているのだから、p が成り立っているのではないか、に関心が寄せられる。$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ であり、いま q が成り立っている（$\overline{\overline{q}}$ が成り立っている）のだから、p（$\overline{\overline{p}}$）が成り立っているのではないか、成り立っているかもしれない。p が成り立つためには、少なくとも q が成り立っていなければならない。p が成り立つためには、q が成り立つことが必要である。ここまで述べてはじめて、「q は p であるための必要条件であるという。」といえるのである。

したがって、ここまで来た段階では、次のように述べるべきであると提案する。

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ だから、p（$\overline{\overline{p}}$）が成り立つためには、少なくとも q（$\overline{\overline{q}}$）が成り立っていなければならない。p が成り立つためには、q が成り立つことが必要である。よって、q は p であるための必要条件であるという。ここでいう「必要」の意味は日常使う言葉の意味と同じである。

３．上記１と２とをまとめた提案をする。

２つのことがら p、q について命題「p ならば q である」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ も真である。このとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるという。

Ⅳ　早い段階で、集合を用いると、すっきりいえるかもしれない。集合の基礎的なところはすでに学んでいるものとする。

命題「p ならば q」が真のとき、$p \Rightarrow q$ と表す。このとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるという。

ここで、q は、p であるためにどうして必要なのかを、集合を用いて説明する。

条件（ことがら）p を満たす要素の集合を P とする。条件 q を満たす要素の集合を Q とする。$p \Rightarrow q$ であるから、集合では、$P \subset Q$ が成り立つ（P は Q に含まれる。即ち集合 P の要素 p は集合 Q の要素でもある)。今 q が成り立っているということは、この要素は集合 Q の要素であるいうことである。p が成り立つとはどういうことか。今着目している要素、それは Q の要素であるが、P の要素でなければならないことを意味する。$P \subset Q$ であるから、P の要素であるためには、(集合 Q の要素であっても集合 P の要素ではない要素があっても、) 少なくとも Q の要素でなければならない。
よって、p が成り立つためには、q が成り立つことが必要である。q は p であるための必要条件である。

＜参考文献＞

1) 新井他、「新訂　基礎数学」、大日本図書、2003年2月
2) 功刀他、「高等学校　数学Ⅰ」、数研出版、昭和39年1月