

ヒステシスを含んだ確率微分方程式について

吉川周二, 田中亜依

On Stochastic Differential Equations with Hysteresis

Shuji Yoshikawa, Ai Tanaka

Abstract: We consider the stochastic differential equation including a hysteresis operator in this article. Hysteresis occurs in several phenomena. For instance, we encounter it in plasticity, friction, ferromagnetism, ferroelectricity, superconductivity, adsorption and desorption. One of hysteresis effects is represented by the play operator which describes the play of hundle of car. On the other hand, stochastic differential equations appear in a lot of fields. In this paper, we give a numerical result for the stochastic equation with the hysteresis effect of the play type.

1 序

ヨーロッパオプションの価格付けで有名な Black-Scholes 方程式は, 株価の変動を記述する確率微分方程式を利用して導かれる. 確率微分方程式とは確率項を伴う微分方程式のことであり, 数理ファイナンスや統計物理学など多くの分野であられる. 確率微分方程式については, [2] に詳しい.

ヒステシスは粗くいうと, 時間発展する変数 A が別の変数 B に依存しているとき, その変数 B の時間発展による増減によって, A の反応経路が異なるような現象をいう. ヒステシス現象は, 超伝導現象・金属の塑性変形など, 物理学や工学など多くの分野で現れる. ヒステシスを含んだ微分方程式の数学的取り扱いが行われたのは比較的最近のことであり, 関数解析的には劣微分のような単調作用素を用いて説明できることが知られている. ヒステシスの数学的取り扱いについてより詳しくは, [1] や [4] を参考にされたい.

本論文では, 確率微分方程式にヒステシス作用を導入した方程式について考察する. 第2節で, 数理ファイナンスに現れる価格変動を記述する確率微分方程式に対して, 遊び作用素と呼ばれるヒステシス作用素を確率項に作用させた次の方程式を紹介する:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma d\Phi_r[z_t],$$

ただし $S(t)$ は証券価格, μ と σ はそれぞれ単位時間当たりの期待収益率とボラティリティを表す定数, z_t は Brown 運動, Φ_r は遊び幅 r の遊び作用素である. ほとんどの証券価格は大きなニュースには反応し小さなニュースには反応を示さないと考えられるであろう. この方程式はそのような効果を考慮して価格変動を表現したモデルといえる.

更に第3節では, この価格変動を記述する確率微分方程式を差分化した方程式についての数値計算結果を紹介する. 差分化した確率項としては $(2k+1)$ 項モデルをとり, その確率分布は一様分布と正規分布を近似した離散分布をとったものの二つの場合について数値実験を行ったが, 本論文では前者についての結果のみ紹介したい. ヒステシス項を付与した確率微分方程式について考察することが研究目的であり, その数学的な結果を予想するために, 本論文では数値実験を行う. 本論文の結果は, 数値実験に限ったものではあるが, 多くの興味深い問題を提示するものであり, いくつかの結果も示唆する. これらの問題については第4節で紹介する.

2 価格変動の方程式へのヒステシスの導入

いくつかの価格変動の方程式が知られているが, ここでは [3] に与えられた証券価格 $S(t)$ についての確率微分方程式について考察する:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dz_t,$$

(2007年11月26日受理)

宇部工業高等専門学校 経営情報学科

ここで z_t は Brown 運動, μ, σ はそれぞれ単位時間当たりの期待収益率とボラティリティを表す定数であるとする.
本論文では, 時間離散化した $(2k+1)$ 項モデルの方程式

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \mu dt + \sigma Z_n \quad (1)$$

を考察する. ただし, $S_n = S(n)$ として, 確率過程 Z_n はランダムウォークを表わし, 一般に $-k$ から k の値をとる確率変数 X_n を用いて $Z_n = X_n - X_{n-1}$ と定義されるものとする. 差分方程式 (1) は,

$$S_n = (1 + \mu dt + \sigma Z_n) S_{n-1} \quad (2)$$

と変形できる.

ここでは, ヒステシス作用素の中での代表的な遊び作用素を用いた解析を行う. 遊び作用素とは図 A のように, 要素 I の位置座標を v としたときに, 幅 r のガイドを持つような要素 II の中心の位置座標 w を対応させる写像 $w = \Phi_r[v]$ のことをいう.

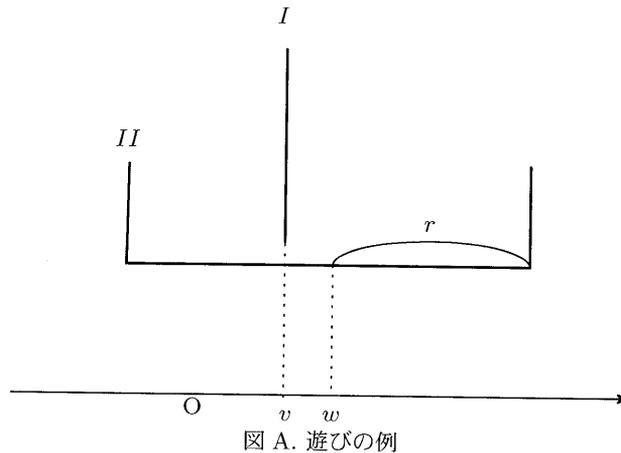


図 A. 遊びの例

この作用における v と w の関係は図 B のようになる. v の値だけでは w が定まらず, $v(t)$ の時間変数 t についての増減にも依存して $w(t)$ が定まるといことがわかるが, これがヒステシスの扱いにくさである.

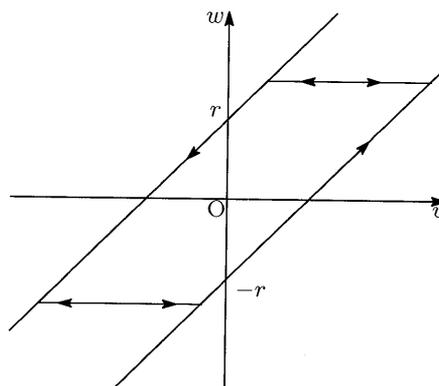


図 B. 遊び作用素のヒステシスループ

遊び作用素 Φ_r は, 区分的単調な関数 $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次のように定義される:

$$\begin{aligned} \Phi[v](0) &= f_r(v(0), 0), \\ \Phi[v](t) &= f_r(v(t), \Phi[v](t_i)) \quad \text{for } t_i < t \leq t_{i+1} \quad (0 \leq i \leq N-1), \end{aligned}$$

ただし, $f_r(v, w) = \max\{v - r, \min\{v + r, w\}\}$ として, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ は各部分区間 $[t_i, t_{i+1}]$ で v が単調になるようにとる. この作用素 Φ は $C([0, T])$ 上リプシッツ連続であり $C([0, T])$ 上に拡張でき, 更に Sobolev 空間 $W_1^1(0, T)$ 上にも拡張でき, $W_1^1(0, T)$ 上リプシッツ連続であることが知られている ([4] 参照).

ヒステレシス作用を含んだ価格変動の方程式は次で与えられる。遊び作用素 Φ_r を用いて新たな確率過程

$$\tilde{Z}_n^r = \Phi_r[X_n] - \Phi_r[X_{n-1}]$$

を定義する。価格変動の方程式 (2) において、確率項を \tilde{Z}_n^r に交換した差分方程式:

$$S_n = (1 + \mu dt + \sigma \tilde{Z}_n^r) S_{n-1} \quad (3)$$

が導かれる。この方程式 (3) は、確率微分方程式:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma d\Phi_r[z_t]$$

を時間離散 (差分) したものである。次節では、この確率差分方程式 (3) の数値実験を行う。

3 数値計算の結果

時間離散化したことによって、単純な分岐構造のプログラムでヒステレシスを扱うことができるようになる。以下で方程式 (3) の数値実験結果を紹介する。

プログラムでは、 $\mu dt = 0.0005$ かつ $\sigma = 0.002$ として、1000 ステップの計算を行った。また確率項 X_n は、一様分布に従う確率変数を用いた。ここで一様分布とは、全ての n に対して

$$P(X_n = -k) = P(X_n = -k + 1) = \dots = P(X_n = k - 1) = P(X_n = k) = 1/(2k + 1)$$

となる確率変数をいう、但し $P(A)$ は事象 A が起こる確率を表す。この X_n としては、正規分布を近似する分布についても数値計算は行ったが、以降の視覚的な議論のために本論文ではこの一様分布についての数値実験結果を採用する。 $(2k + 1)$ 項モデルの k はある程度大きい値をとる必要がある。ここでは $k = 15$ 、即ち 31 項モデルについて考察する。図 1, 2, 3 は、それぞれ遊び作用素の幅 r として 0, 3, 7 とした結果である。

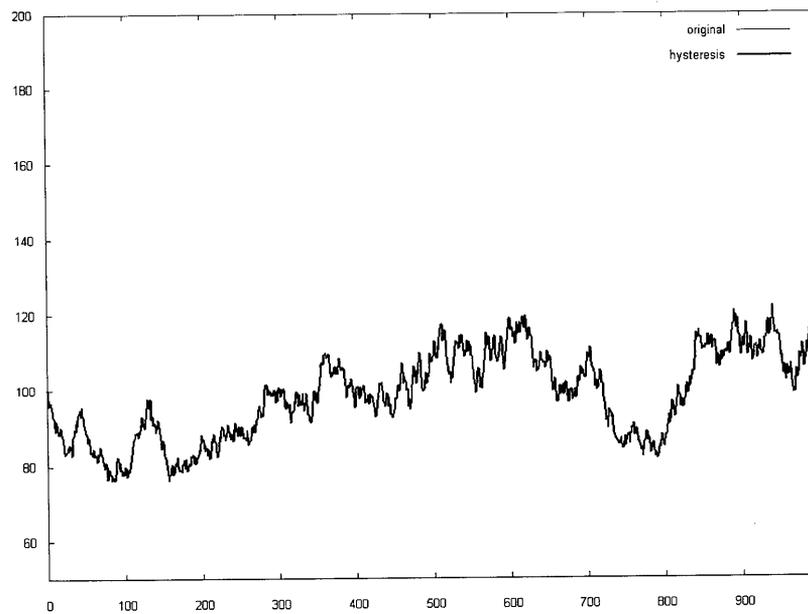
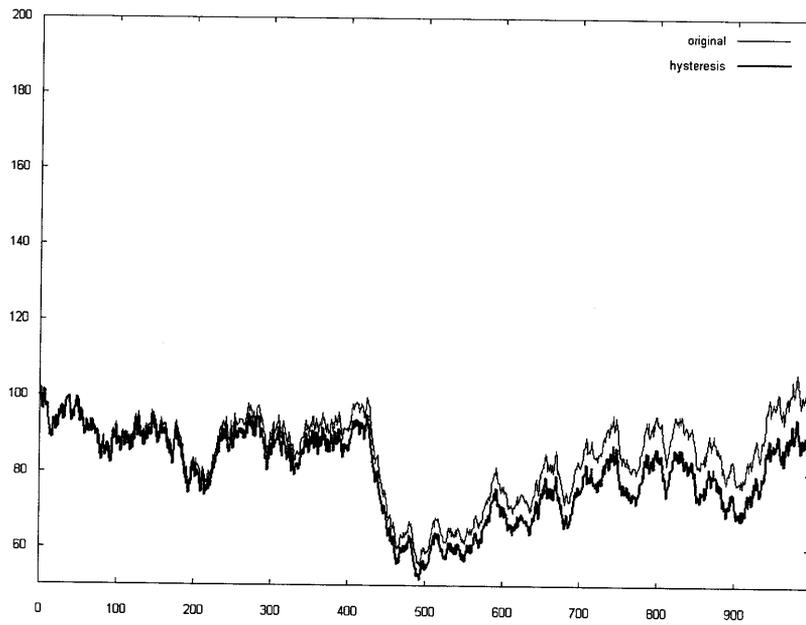
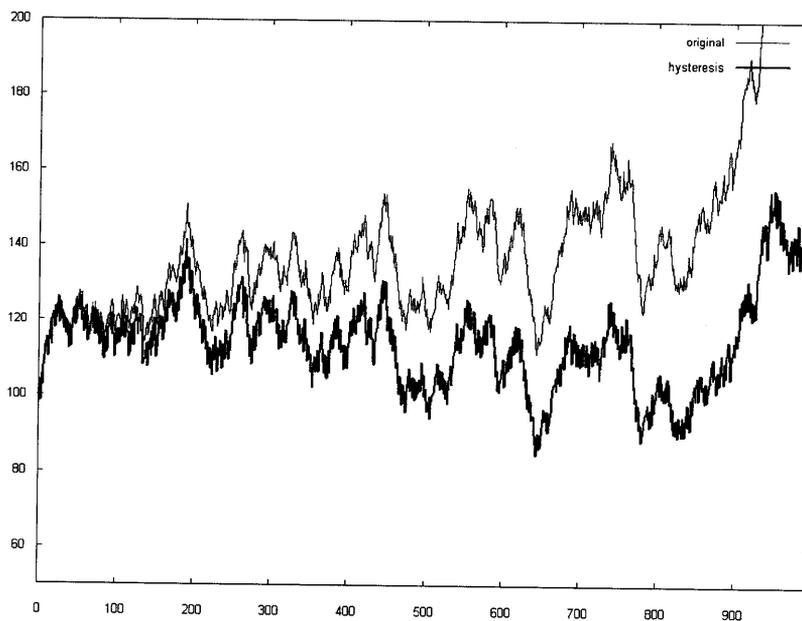


図 1: 遊びの幅 $r = 0$

図 2: 遊びの幅 $r = 3$ 図 3: 遊びの幅 $r = 7$

細線で描かれたグラフが方程式 (2) の数値計算結果であり、太線は方程式 (3) のグラフである。遊び作用素は $\Phi_0 = I$ (I は恒等作用素) だから、図 1 は太線も細線も完全に重なる。図 2、図 3 より遊びの幅 r を大きくすることで、そのグラフの差も大きくなっていくことがわかる。これらのグラフにより推測されることは、以下の二点である。遊び作用素はその対称

性より平均はかわらない, 即ち確率過程 z_t に対して

$$E[\Phi_r[z_t]] = E[z_t], \quad (4)$$

分散は小さくなる:

$$V[\Phi_r[z_t]] \leq V[z_t]. \quad (5)$$

4 今後の展望と課題

結びに, 今後の研究の展望と課題について述べる. 第3節で挙げた問題 (4)-(5) の他に以下の問題を紹介する.

- Brown 運動 z_t に対して確率過程 $\tilde{z}_t = \Phi_r[z_t]$ はどのような性質を持つか? マルチンゲール性は保存されるのか?
- ヒステレシス付き価格変動方程式から導かれる Black-Scholes 方程式はどのような形になるのか?
- ボラティリティや期待収益率が確率過程に依存する場合はどのようにヒステレシス効果の影響が現れるのか?

また, 本論文では以下の幾つかの課題もある:

- ヒステレシス効果を作用させる位置が不明瞭.
- 遊びの幅はどのように選べばよいのか.
- 実際のデータとの比較をどのようにすればよいか.

謝辞

本研究は, 財団法人長岡技術科学大学技術開発教育研究振興会より助成を受けたものである.

参考文献

- [1] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and phase transitions*, Applied Mathematical Sciences Vol. 121 Springer-Verlag, New York 1996.
- [2] 舟木直久, 確率微分方程式, 岩波書店, .
- [3] 木島正明, 経済学入門シリーズ 金融工学, 日経文庫, 2002.
- [4] A. Visintin *Differential Models of Hysteresis*, Applied Mathematical Sciences Vol. 111, Springer-Verlag, New York 1994.