経営系学生のための数 e(自然対数の底)のイメージといくつかの演習問題的話題

松浦利治*

The Image of the Napier Number e for Business Administration Students, and some episodes

Toshiharu MATSUURA

Abstract : We want to understand the meaning of the Napier Number e and try to make clear the meaning in the business field for example. For business administration students, we propose a financial example. The statement "$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$" is illustrated. And some episodes of the Napier Number e ——— area problem, differential of exponential function, definition of e, Euler's formula and so on ——— are mentioned.

Key words : e, Napier number, business, finance

1．はじめに

経営系の学生に、いかにして数e（自然対数の底、ネーピアの数）についてわかってもらうか、を課題とする。複利の計算と関係がありそうであるが。

機械や電気の工学系では、指数関数の微分や、線型微分方程式を解くときに、自然対数の底eを用いるので、なじみは出てくる。意味はよくわからないとしても。

私自身、数eの直観的あるいは自然な意味を知りたい。πが円の周囲の長さと直径との比という非常にわかりやすい数であるのに対して、数eはよくわからないからである。

このような動機から、数e（自然対数の底）についてまとめてみることにする。

(2006年11月24日受理)

*宇部工業高等専門学校一般科（元経営情報学科）

まず、経営系の学生のために、複利の計算を例にして、数eの定義式を示す。

次に、数eに関する話題———歴史的にはそれなりの問題であったが、現在では演習問題的話題———をいくつか取り上げる。

2．経営系学生のための数eのイメージ

2．1　財務分野の例

次のような状況を考える。

（1）現在P円もっている。これを一定期間T預けると元利合計Sは$2P$となるものとする。すなわち期間Tでの利率は１（１００％）とする。

$$S = P(1+1) = P(1+\frac{1}{1})$$

（2）次に、期間Tを２等分割する。期間Tの半ばでそのときまでに生じた利子を元金に繰り入れ、その後

もさらに預けるとする。期間を$\frac{1}{2}$としたので、期間Tの半ばまでの利率は$\frac{1}{2}$（５０%）とすると

$$S=\{P(1+\frac{1}{2})\}(1+\frac{1}{2})=P(1+\frac{1}{2})^2$$

（3）今度は、期間Tを３等分割する。期間Tの$\frac{1}{3}$のときそれまでに生じた利子を元金に繰り入れ、その後もさらに預け、期間Tの$\frac{2}{3}$のときに、期間Tの$\frac{1}{3}$のとき以降それまでに生じた利子を元金に繰り入れ、その後もさらに預ける。期間を$\frac{1}{3}$としたので、このときの利率は$\frac{1}{3}$（３３.３・・・%）とすると

$$S=P(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})=P(1+\frac{1}{3})^3$$

（4）一般に、期間Tをn等分割する。時点kT/n $(k=1,2,\ldots,n)$で１つ前までの時点以降に生じた利子を元金に繰り入れ、その後もさらに預けることをすると（即ち、期間Tを均等にn分割して、その分割された期間の利率を$\frac{1}{n}$（即ち$\frac{100}{n}$%）とし、その分割された期間終了時には、生じた利子を元金に繰り入れ、その後もさらに預けるとすると）

$$S=P(1+\frac{1}{n})^n$$

（5）上記（4）でnを無限に大きくすると、すなわち時間が少しでも経過したら生じた利子を元金に繰り入れるとすると（連続的に利子を繰り入れることになる）、項$(1+\frac{1}{n})^n$は一定の値に近づくことが知られている[1)]。この値がeである。すなわち

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

（実はこれは数eの定義の式なのであるが。）

そしてｅの近似値は$e=2.718281828459\cdots$である。

期間T終了後、元利合計Sは元金Pのe倍になっている。

以上の様子を図１に示す。

２．２　文献 1)によるコメント

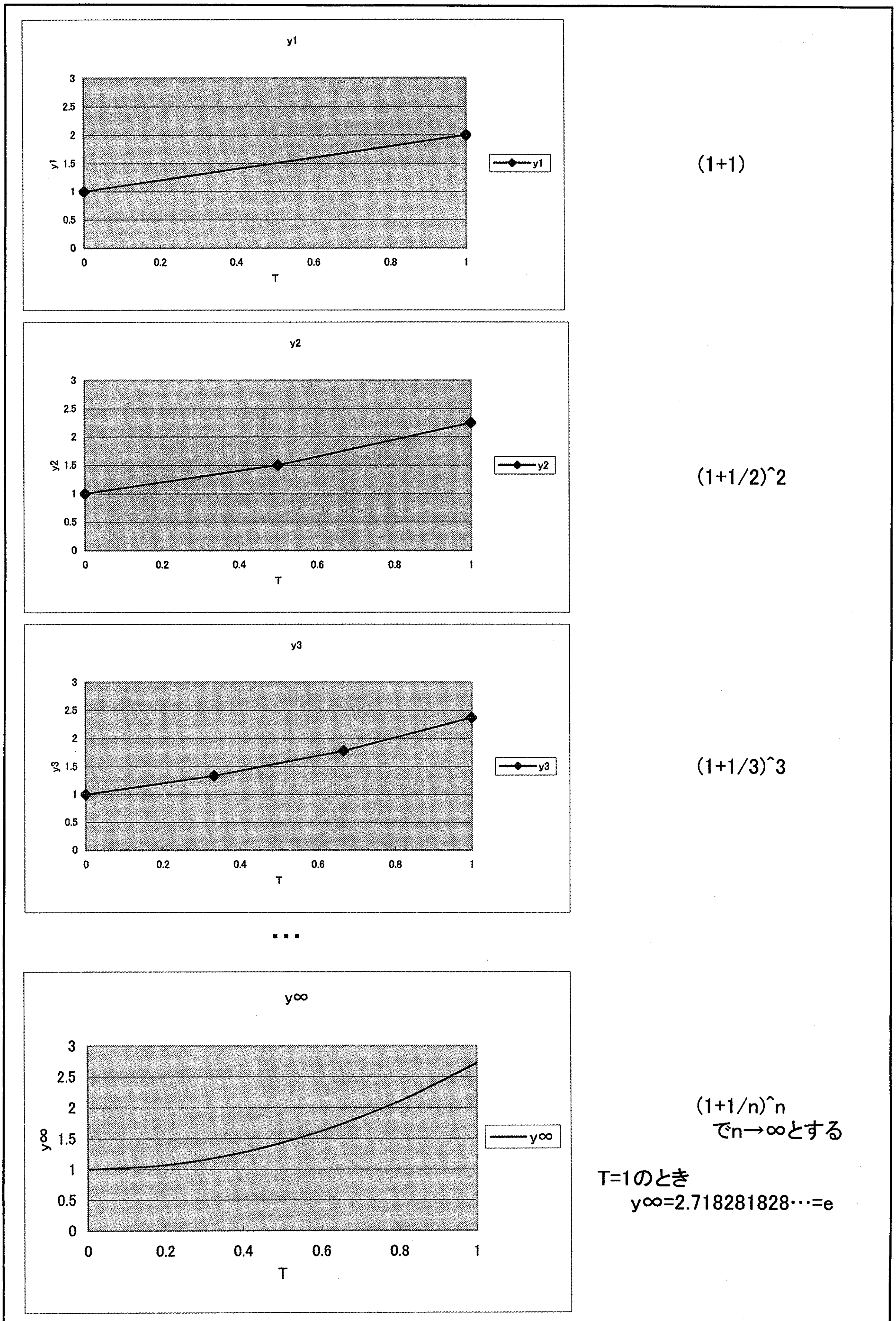
上記２．１の（５）に関連して、文献 1)によるコメントを記す。

微積分の発明より少なくとも半世紀前、数eは数学者達に知られていた。・・・ どのようにしてこのようなことが起こり得たのだろう？ 一つの可能性は、数eは複利の公式との関連で最初に登場したのではないかということである。・・・ この発見は、厳密な数学的推論の結果というよりむしろ実験的観察結果であったろうが、この事実は１７世紀初頭の数学者を驚かせたに違いない。彼らにとって極限の概念はまだ知られていなかったのだから。このように、数eと指数関数e^xの本当の起源は、時間が経つと金が増えるという世俗的な問題の中にあったというのはもっともらしい。

２．３　私のコメント

経営系の学生に、数eについて少しでも理解してもらうために、上述の２．１の例を私なりに考えたものである。しかし数eが実は歴史的には経営ビジネス・商売の分野に起源をもつらしいとは意外であった。機械工学や電気工学での線形微分方程式の解よりもずっと先輩らしいのは意外であった。

なお私は上記の例を考えたが、年利rで、１年間にn回の複利でt年間預け、nを限りなく大きくすると、公式$S=P(1+\frac{r}{n})^{nt}$で与えられる元利合計Sがある極限値に近づき、$P=1$、$r=1$、$t=1$に対するこの極限値はeであるという、文献 1)の説明の仕方でも同様である。また年利１（１００%）で１年間預けることから始め、年利を$\frac{1}{n}$としてn年間預けるとした説明の仕方でも同様である（ネットのフリー百科事典 Wikipedia の項目「利子」の中での「自然対数と利子」の説明）。



y1
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
T
y1
(1+1)
y2
y2
(1+1/2)^2
y3
y3
(1+1/3)^3
・・・
y∞
y∞
(1+1/n)^n
でn→∞とする
T=1のとき
y∞=2.718281828…=e

図1. eへの収束

３．いくつかの演習問題的話題

以下に、演習問題的話題をいくつか記す。歴史的にはいろいろな話題であるが。

３．１　面積

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の下の面積を求める問題。すなわち双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$、$y=0$（x 軸）、$x=1$、$x=a(a>1)$ で囲まれる領域の面積が１となるときの a の値はいくらか（今日のわれわれは対数の簡単な積分の計算により、$a=e$ であることが導けるが）。

放物線 $y=x^2$ の下の面積を求める問題は、区分求積法でできる。この計算の過程で、$\sum_{k=1}^{n} k^2$ を求める必要が出てくるが、これには下記の公式があり、計算できる。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

一方、双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の下の面積を求める問題では、$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ を求める必要が出てくるが、これには上記のような公式がなく、計算できない。

ここで蛇足ながら、私の漠然とした感想を述べてみたい。上記のような面積を求めようとするとき、一般に $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k^s$ の計算（ただし指数 s は正だけでなく負もある）が必要となるであろう。この式を一般化したものが、リーマンのゼータ関数であろう。

３．２　微積分

指数関数 $y=a^x$（ただし話を簡単にするために、ここでは $a>1$ とする。）の微分を考える。一般の数 a の指数関数 $y=a^x$ を微分すると、係数が出てきていつもついてまわる。

実際やってみると、$h\to 0$ として

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

すなわち $\dfrac{dy}{dx}=a^x\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$

となり、係数 $\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ がうるさい。

そこで、上記係数が１となるような特定の a の値を用いることにする。この特定の値を e とする。すなわち

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \qquad （よって\frac{de^x}{dx}=e^x）$$

この式から上に述べた e の定義の式を導こう。

上式より $\dfrac{e^h-1}{h}\fallingdotseq 1$、すなわち $e^h\fallingdotseq 1+h$

両辺を $\dfrac{1}{h}$ 乗して、$e\fallingdotseq(1+h)^{\frac{1}{h}}$

$h=\dfrac{1}{n}$ とすると、$e\fallingdotseq(1+\dfrac{1}{n})^n$

ここで $h\to 0$、すなわち $n\to\infty$ とすると

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

なお上記３．１の面積の解は、$\int_1^a\dfrac{1}{x}dx=1$、すなわち $[\log x]_1^a=1$、（ただしここでの対数は e を底とする自然対数である。）

$\log a-\log 1=1$、$\log a=1$

よって $a=e$

３．３　近似式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

これはテーラー展開（厳密にはマクローリン展開のようだが）による。

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)$$
$$+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{4!}f''''(a)+\cdots$$

において、$f(x)=e^x$、$a=0$、$h=x$ とおくと上述の式が得られる。

本論とは直接の関係はないが、e^x の展開式において、

$x = i\theta$、ただし$i = \sqrt{-1}$（虚数単位）とおくと、

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 + \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots) + i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

とオイラーの公式が導ける。さらにこの公式において、

$\theta = \pi$とおくと、

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{すなわち} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

オイラーの式が導ける。小説「博士の愛した数式」に出てくる式である。

これは摩訶不思議な式ではないか。e、i、πという生まれも育ちも異なる数、1、0という最も簡単な数、+、=という最も簡単な演算が、このような美しい関係にあるとは！

4．素数定理―――演習問題的ではない話題

正の整数x以下の素数の個数を$\pi(x)$とすると、xが十分大きいと、

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\log x}$$

（ここでも対数はeを底とする自然対数）

素数の個数の平均密度などということに、なぜ数eがからんでくるのか？！

正確に表現すると、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\log x}} = 1$$

ガウスが予想し、アダマールとプーサンが独立に証明したという。

文献 1)によれば(pp.250-251)、

“素数定理”に自然対数が現れるということは、数eが間接的に素数に関係していることを示している。そのような関係があることは真に注目に値する。素数は整数の領域のもので、離散数学の最も本質的な部分であるのに対して、一方、eは解析学の分野に属し、極限や連続性の領域のものである。リチャード・クーラントとハーバート・ロビンズの What is Mathematics? (数学とは何か)を引用すれば：

素数分布の平均的行動が対数関数によって記述できるということは、まことに注目すべき発見である。なぜなら、これほどかけ離れているように思われる二つの概念が、実際にはこれほど密接な関係をもっているとは驚くべきことだからである。

同様なことは、文献 1)の p.63 によると、Wallis による

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdot$$

Gregory による

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ところで、$n \to \infty$のとき、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

$$= C\,(\text{オイラーの定数}) = 0.57721\cdots$$

が知られている。

5．何となく近い数―――私の思い込み

$$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx \sqrt{10}$$

$$\because 3.14\ldots \approx 3.146\cdots (= 1.414\cdots + 1.732\cdots)$$

$$\approx 3.16\ldots$$

1+2+3+...+100 ≈ 1・2・3・4・5・6・7　すなわち

$$\sum_{k=1}^{100} k \approx 7! = \prod_{k=1}^{7} k \qquad (\because 5050 \approx 5040)$$

6．おわりに

以上自然対数の底eに関する私の思いと話題について述べた。

しかし数eの、腑に落ちる説明はまだ得ていない。

参考文献

1)　E．マオール著、伊里由美訳「不思議な数eの物語」pp.xi－xii、東京、岩波書店、１９９９年９月