接線方向の成分を有するキネマティック方程式

吉川周二*, 熊谷聡美†, 中川晃子†, 大﨑浩一*

Kinematic Equation with Tangential Component

Shuji Yoshikawa, Satomi Kumaya, Akiko Nakagawa, Koichi Osaki

Abstract: Kinematic system of equations, which was proposed by Mikhailov et al., is a mathematical model for dynamics of wave patterns in excitable reaction-diffusion systems. The kinematic system has been good agreement with various wave behavior, however, there are mathematical difficulties such that the time evolutional equation for curvature of wave in the system does not have explicitly expressed tangential component. In this report, a new kinematic equation with explicitly expressed tangential component is derived in the same assumptions as Mikhailov et al.

1 序

キネマティック方程式は興奮反応拡散系の進行波のダイナミクスに対するモデルとして提唱された方程式であり, 例えば BZ 反応に現れる進行波の形状などがその対象である. この方程式については例えば, [1], [2], [3] などの文献に解説されており, 具体的には曲線の曲率 k と曲線の長さ L についての方程式系で次のように表される:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\left(\int_0^l kVd\xi+G\right)\frac{\partial k}{\partial l}=-k^2V-\frac{\partial^2 V}{\partial l^2},\qquad t>0,\ 0<l<L(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t,0)=-G\frac{\partial k}{\partial l}(t,0),\qquad t>0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\{k(t,L(t))\}=\frac{\partial k}{\partial t}(t,L(t))+\frac{\partial k}{\partial l}(t,L(t))\frac{dL}{dt}=\tilde{G}\frac{\partial k}{\partial l}(t,L(t)),\qquad t>0, \tag{3}$$

$$\frac{dL}{dt}=\int_0^L kVdl+G+\tilde{G},\qquad t>0, \tag{4}$$

$$L(0)=L_0, \tag{5}$$

$$k(0,l)=k_0(l),\qquad 0<l<L_0. \tag{6}$$

ただし, $V(l,t)$ は弧長 l での曲線の法線方向の速度, $G(t)$ は弧長 0 の端点での曲線の接線方向の速度, $\tilde{G}(t)$ は弧長 $L(t)$ の端点での曲線の接線方向の速度を表している. 特に, V, G, $\tilde{G}$ は, 定数 V_0, D, γ_0, K_c を用いて, 次のような定義で与えられる:

$$V(t,l)=V_0-Dk(t,l), \tag{7}$$

$$G(t)=\gamma_0(K_c-Dk(t,0)), \tag{8}$$

$$\tilde{G(t)}=\gamma_0(K_c-Dk(t,L)). \tag{9}$$

この方程式は非局所項の付いた放物型の自由境界問題であり, この種の方程式は一般に取り扱いが難しいとされている. その為, 時間発展の方程式の理論的な結果は, 筆者等の知る限り現在のところ, 可解性すらまだ知られていないようである. この発展方程式についての数学的な解析を行うのが我々の目的である.

本稿では以下の点に注目した研究をまとめたものである. この方程式は, $l=0$ 及び $l=L$ の両端点において, 方程式と境界条件が一致していないことに注意する, すなわち方程式 (1) において $l=0$ としたものと (2), 及び (1) において $l=L$ としたものと (3) は一致していない. これは, 曲線の発展における各点での速度に接線方向の成分を明示的に表示しないことに起因すると考えられる.

(2006 年 11 月 24 日受理)
*宇部工業高等専門学校 経営情報学科
†宇部工業高等専門学校 経営情報学科 5 年

そこでまず方程式の設定から見直してみたい．方程式 (1)-(6) は曲率 k と弧長 L についての方程式である．曲率と弧長は曲線が定まれば決定される値である．そこで，我々は一般座標系でパラメータ表示した曲線自身を未知関数として，方程式を再導出することを考えた．まず図 1 のように，時刻 t での曲線 $K(t)$ を $K(t) = \{(f(s,t), g(s,t)) \mid s \in [0,1]\}$ で表現する．弧長パラメータ s は規格化したものをとることに注意する．

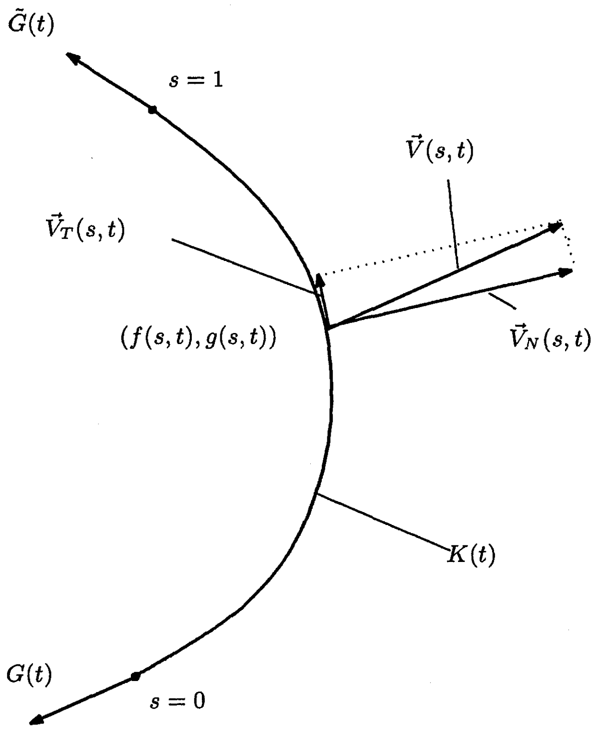

図 1 新しい設定

曲線の法線方向についての速度 V_N の条件は (7) と同様に定義する．すなわち，曲線の曲率は

$$k = \frac{f_{ss}g_s - f_s g_{ss}}{(f_s^2 + g_s^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

で表されるので，

$$V_N(s,t) = V_0 - D\frac{f_{ss}g_s - f_s g_{ss}}{(f_s^2 + g_s^2)^{\frac{3}{2}}}(s,t) \tag{11}$$

で定義する．ただし，V_0 と D は定数とする．また曲線の接線方向の速度 V_T の条件を次のように与える：

$$V_T(s,t) = -(1-s)G(t) + s\tilde{G}(t), \tag{12}$$

ただし，G と $\tilde{G}$ は (8),(9) と同様に，

$$G(t) = \gamma_0\left(K_c - D\frac{f_{ss}g_s - f_s g_{ss}}{(f_s^2 + g_s^2)^{\frac{3}{2}}}(t,0)\right),$$

$$\tilde{G(t)} = \gamma_0\left(K_c - D\frac{f_{ss}g_s - f_s g_{ss}}{(f_s^2 + g_s^2)^{\frac{3}{2}}}(t,1)\right)$$

で定義する．この条件 (12) が曲線の接線方向の速度を明示した式である．

このような条件の下で，曲線の時間発展を考える．$X := (f,g)$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，導かれる方程式は以下のよ

うになる:

$$X_t = \left(\frac{V_0}{|X_s|} - D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s + \frac{-(1-s)G+s\tilde{G}}{|X_s|}X_s, \tag{13}$$

$$X_t(0,t) = \left(\frac{V_0}{|X_s|} - D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s(0,t) - \frac{G}{|X_s|}X_s(0,t), \tag{14}$$

$$X_t(1,t) = \left(\frac{V_0}{|X_s|} - D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s(1,t) + \frac{\tilde{G}}{|X_s|}X_s(1,t), \tag{15}$$

$$X(s,0) = X_0(s). \tag{16}$$

この方程式の導出が本稿の主な内容であり, 次節で与える. 方程式 (13)-(16) は規格化した弧長パラメータと時間についての関数についての方程式であるため, 固定境界問題となっている. また非局所項も現れていない. ただし, 方程式が準線形方程式となっている.

曲線 $K(t)$ が分かれば, 曲率 k は (10) で, 弧長 L は

$$L = \int_0^1 (f_s^2 + g_s^2)^{\frac{1}{2}} ds$$

で与えられることに注意したい.

今後の研究の展望としては, 次のような問題が考えられる. この方程式 (13)-(16) は流体の問題で有名なラグランジュ変換のような変換によって (1)-(6) と同値な方程式であるのかどうかを調べたい. もし, 同値であるのであれば, (1)-(6) においても接線方向の速度を暗示的に仮定していることを示しており, (1)-(6) の物理的な正当性を保証することができる. また, 同値であれば, (13)-(16) の可解性を証明すれば, (1)-(6) の可解性も証明することができる. 仮に, 同値でなかったとしても, この方程式の解の性質を考察し, BZ 反応の現象をうまく再現しているのであれば, こちらの方程式を BZ 反応のキネマティック方程式として採用することも出来る.

2　方程式の導出

時刻 t での規格化された弧長パラメータ s における速度は $\vec{V}(s,t)$ で与えられるので,

$$(f(s,t+\Delta t), g(s,t+\Delta t)) = (f(s,t), g(s,t)) + \vec{V}(s,t)\Delta t$$

と書ける. 故に,

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(s,t), g(s,t)) = \vec{V}(s,t) \tag{17}$$

が得られる. また $\vec{V}(s,t)$ を,

$$\vec{V}(s,t) = \vec{V}_T(s,t) + \vec{V}_N(s,t) \tag{18}$$

のように分解する. ただし, $\vec{V}_T(s,t)$ は曲線の接線方向の成分, $\vec{V}_N(s,t)$ は法線方向の成分を表している.

ここで, 仮定より,

$$|\vec{V}_T|(s,t) = -(1-s)G(t) + s\tilde{G}(t),$$
$$|\vec{V}_N|(s,t) = V_0 - Dk(s,t)$$

を満たす. 曲線の接ベクトルは $(f_s(s,t), g_s(s,t))$, 法線ベクトルは, $(g_s(s,t), -f_s(s,t))$ で書き表されるので,

$$\vec{V}_N(s,t) = |\vec{V}_N|\frac{\vec{V}_N}{|\vec{V}_N|} = \frac{V_0 - Dk(s,t)}{\sqrt{f_s^2(s,t)+g_s^2(s,t)}}(g_s(s,t), -f_s(s,t)), \tag{19}$$

$$\vec{V}_T(s,t) = |\vec{V}_T|\frac{\vec{V}_T}{|\vec{V}_T|} = \frac{-(1-s)G(t)+s\tilde{G}(t)}{\sqrt{g_s^2(s,t)+f_s^2(s,t)}}(f_s(s,t), g_s(s,t)) \tag{20}$$

と書ける. よって, (17)-(20) をまとめると,

$$\begin{aligned}(f_t(s,t), g_t(s,t)) = {} & \frac{V_0 - Dk(s,t)}{\sqrt{f_s^2(s,t)+g_s^2(s,t)}}(g_s(s,t), -f_s(s,t)) \\ & + \frac{-(1-s)G(t)+s\tilde{G}(t)}{\sqrt{g_s^2(s,t)+f_s^2(s,t)}}(f_s(s,t), g_s(s,t))\end{aligned}$$

と表わせる．曲率 k は

$$k=\frac{f_{ss}g_s-f_sg_{ss}}{(f_s^2+g_s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

で表現出来るので，方程式は，

$$f_t=\left(\frac{V_0}{\sqrt{f_s^2+g_s^2}}-D\frac{f_{ss}g_s-f_sg_{ss}}{(f_s^2+g_s^2)^2}\right)g_s+\frac{-(1-s)G+s\tilde{G}}{\sqrt{g_s^2+f_s^2}}f_s, \tag{21}$$

$$g_t=-\left(\frac{V_0}{\sqrt{f_s^2+g_s^2}}-D\frac{f_{ss}g_s-f_sg_{ss}}{(f_s^2+g_s^2)^2}\right)f_s+\frac{-(1-s)G+s\tilde{G}}{\sqrt{g_s^2+f_s^2}}g_s \tag{22}$$

となる．さて，ここで $X(s,t):=(f(s,t),g(s,t))$ とおく．また -90 度の回転行列を A で定義する，すなわち，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

とすると，方程式 (21)-(22) は

$$X_t=\left(\frac{V_0}{|X_s|}-D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s+\frac{-(1-s)G+s\tilde{G}}{|X_s|}X_s$$

と書き直すことが出来る．

境界条件についても全く同様に証明でき，これらをまとめると以下の方程式を得る：

$$\begin{cases}X_t=\left(\frac{V_0}{|X_s|}-D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s+\frac{-(1-s)G+s\tilde{G}}{|X_s|}X_s,\\ X_t(0,t)=\left(\frac{V_0}{|X_s|}-D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s(0,t)-\frac{G}{|X_s|}X_s(0,t),\\ X_t(1,t)=\left(\frac{V_0}{|X_s|}-D\frac{X_{ss}\cdot AX_s}{|X_s|^4}\right)AX_s(1,t)+\frac{\tilde{G}}{|X_s|}X_s(1,t),\\ X(s,0)=X_0(s).\end{cases}$$

このようにして，新しい設定でのキネマティック方程式 (13)-(16) が導かれる．

参考文献

[1] 三池秀敏, 森義仁, 山口智彦, 非平衡系の科学 III 反応・拡散系のダイナミクス, 講談社, 1997.

[2] A.S. Mikhailov, V.A. Davydov and V.S. Zykov, Complex dynamics of spiral waves and motion of curves, Physica D, Vol.70, pp.1–39, 1994.

[3] 西浦廉政, 非線形問題 1 パターン形成の数理, 岩波書店, 1999.