ラプラス変換の振動系，梁，積分方程式その他への応用

第3報 梁の横振動への応用（I）

望月太喜雄*

On the Application of Laplace Transform to the Dynamical Vibrations, Beam Problems, Integral Equations and etc. (No.3)

Transverse Vibration of Beams (1)

Takio MOCHIZUKI

Abstract

Continued from the preceding reports this offers a few illustrations and the summary of problems of the transverse vibration of basic beams (simple beam, cantilever, fixed beam) subjected to a concentrated load such as a periodic load $P_0 \sin\omega t$, an impulsive one $P_0 u'(t)$, and a rapid one $P_0 u(t)$. The equation of the transverse vibration of a beam forms a partial differential equation with x and t as independent variables, where x and t represent displacement and time respectively.

The Laplace transform is first applied with t and the partial differential equation is reduced to an ordinary differential equation of the t-transform $\bar{y}(x, s)$ and x. The general solution of the equation is then fitted to the boundary conditions of the beam determined only by supporting conditions. The final solution $y(x, t)$ which represents deflection is obtained as the sum of residues by the application of the complex inversion integral.

1. まえがき

ラプラス変換の梁の横振動への応用についてはすでにChurchill 氏（ミシガン大学）が，その著書「応用ラプラス変換[1]」において入力が周期的変位 $y_c \sin\omega t$ の場合について解法を示している．Thomson 氏（カリフォルニア大学）は著書「Laplace Transformation[2]」において，ユニットステップ，ユニットインパルス関数を用いて単純梁が集中荷重 $P_0 \sin\omega t$ を受ける場合の定常解を示しているが，非定常状態も含めた完全解については触れられていない．また亘理厚氏（東京大学）は著書「機械振動[3]」において規準座標 $q_i(t)$，規準関数 $Y_i(x)$ を用いて完全解を示しているが，梁に急速荷重 $P_0 u(t)$ が加わった場合については示されていない．また分布荷重，集中モーメントが梁に加わった場合についても触れられていない．

筆者は Thomson 氏の解法に従いユニットステップ，ユニットインパルスおよびユニットダブレット関数を用いて，上記の著書には触れられていない不静定梁の場合も取り上げ，非定常項も含めた完全解を求めることを試みた．また梁がインパルス荷重 $P_0 u'(t)$ を受ける場合の解が求まれば，線形系の応答においては単位衝撃応答の積分はインディシャル応答であることが証明できるから，簡単に積分することにより急速荷重 $P_0 u(t)$ が加わる場合の解を求め得る．筆者は $P_0 u(t)$ が加わるこの問題に対しては，所謂，オーソドックスな方法により求めた解と，積分による解を比較してみることにした．

本報においては両端自由支持，片持，両端固定梁の三つの場合について周期的集中荷重 $P_0 \sin\omega t$，衝撃荷重 $P_0 u'(t)$，急速荷重 $P_0 u(t)$ が夫々加わる場合に対してのまとめも含めてその計算例の一文を呈する次第で

* 宇部工業高等専門学校機械教室

である．

2. 梁の一般の横振動方程式

梁の静撓みに関する荷重方程式（第１報[4)]，(2)式）は

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=f(x) \qquad (2\cdot1)$$

ここに $f(x)$ は梁の単位長さ当りに作用する外力で上向きを正とする．梁の一般の横振動方程式は上式に慣性力 $-m(\partial^2y/\partial t^2)$ をつけ加わえることにより得られる．

すなわち

$$EI\frac{\partial^4y(x,\ t)}{\partial x^4}=-m\frac{\partial^2y(x,\ t)}{\partial t^2}+f(x,\ t) \qquad (2\cdot2)$$

ここに　t ：時間

m：単位長さ当りの質量

$f(x,\ t)$：梁の単位長さ当りに作用する外力

$y(x,\ t)$：梁の撓み量

(2.2) 式を t に関してラプラス変換すると

$$\frac{d^4\bar{y}(x,\ s)}{dx^4}+\frac{ms^2}{EI}\bar{y}(x,\ s)$$
$$=\frac{m}{EI}[sy(x,\ 0)+y_t'(x,\ 0)]+\frac{\bar{f}(x,\ s)}{EI}$$

ここに $y(x,\ 0)$，$y_t'(x,\ 0)$ は梁の初期条件を示す．ここで

$$\begin{cases}\beta^4=-\dfrac{ms^2}{EI}\\ \bar{\varphi}(x,\ s)=\dfrac{m}{EI}[sy(x,\ 0)+y'_t(x,\ 0)]\\ \qquad +\dfrac{\bar{f}(x,\ s)}{EI}\end{cases} \qquad (2\cdot3)$$

と置くと

$$\frac{d^4}{dx^4}\bar{y}(x,\ s)-\beta^4\bar{y}(x,\ s)=\bar{\Phi}(x,\ s) \qquad (2\cdot4)$$

pを補助変数として x に関してラプラス変換すると

$$P^4\bar{\bar{y}}(p,\ s)-p^3\bar{y}(0,\ s)-p^2\bar{y}_x'(0,\ s)-p\bar{y}_x''(0,\ s)$$
$$-\bar{y}_x'''(0,\ s)-\beta^4\bar{\bar{y}}(p,\ s)=\bar{\bar{\varphi}}(p,\ s)$$

$$\bar{\bar{y}}(p,\ s)=\frac{\bar{\bar{\varphi}}(p,\ s)}{p^4-\beta^4}$$
$$+\frac{p^3\bar{y}(0,\ s)+p^2\bar{y}_x'(0,\ s)+p\bar{y}_x''(0,\ s)+\bar{y}_x'''(0,\ s)}{p^4-\beta^4}$$
$$(2\cdot5)$$

（２・５）式を x について逆変換を行うと次の梁の一般の補助方程式を得る．

$$\bar{y}(x,\ s)=\frac{1}{2\beta^3}\int_0^x\bar{\varphi}(\xi,\ s)[\sinh\beta(x-\xi)-\sin\beta(x-\xi)]\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\bar{y}(0,\ s)(\cosh\beta x+\cos\beta x)$$
$$+\frac{1}{2\beta}\bar{y}_x'(0,\ s)(\sinh\beta x+\sin\beta x)$$
$$+\frac{1}{2\beta^2}\bar{y}_x''(0,\ s)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+\frac{1}{2\beta^3}\bar{y}_x'''(0,\ s)(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$
$$(2\cdot6)\quad(\beta^4=-ms^2/EI)$$

ここに　$\bar{y}(0,\ s)$：$x=0$ における撓み

$\bar{y}_x'(0,\ s)$：$x=0$ における傾き

$\bar{y}_x''(0,\ s)$：$(1/EI)\times(x=0$ における曲げモーメント$)$

$\bar{y}_x'''(0,\ s)$：$(1/EI)\times(x=0$ における剪断力$)$

は未知量でこれらの値はすべて境界条件より決定される．

3. 両端固定梁が周期的集中荷重 $P_0\sin\omega t$ を受ける場合（非定常状態も含めた完全解）

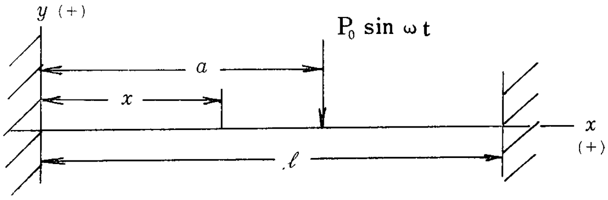


Fig.1

（解）Fig. 1 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=-P_0u'(x-a)\sin\omega t$$
$$=-P_0u'(x-a)F(t) \qquad (3\cdot1)$$

最初，梁は静止の状態にあり弾性曲線は直線であると仮定すると初期条件は　$y(x,\ 0)=y_t'(x,\ 0)=0$

$$(3\cdot2)$$

境界条件は $\begin{cases}y(0,\ t)=y_x'(0,\ t)=0\\ y(\ell,\ t)=y_x'(\ell,\ t)=0\end{cases}$

$$(3\cdot3)$$

（３・１），（３・３）式をラプラス変換すると

$$\begin{cases}\bar{f}(x,\ s)=-u'(x-a)p_0\bar{F}(s)\\ \bar{y}(0,\ s)=\bar{y}_x'(0,\ s)=\bar{y}(\ell,\ s)=\bar{y}_x'(\ell,\ s)=0\end{cases}$$

（２・３），（３・２）式より

$$\bar{\varphi}(x,\ s)=-\frac{u'(x-a)p_0\bar{F}(s)}{EI}$$
$$(3\cdot4)$$

これらを（２・６）式に代入すると

$$\bar{y}(x,\ s)=-\frac{P_0\bar{F}(s)}{2\beta^3EI}\int_0^x u'(\xi-a)[\sinh\beta(x-\xi)-\sin\beta(x-\xi)]\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2\beta^2}\bar{y}_x''(0,\ s)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+\frac{1}{2\beta^3}\bar{y}_x'''(0,\ s)(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$

$\int_o^x u'(\xi-a)\psi(\xi)d\xi=\psi(a)$ より

$$\bar{y}(x, s)=-\frac{p_o\bar{F}(s)}{2\beta^3 EI}\left\{\sinh\beta(x-a)-\sin\beta(x-a)\right\}u(x-a)$$
$$+A(\cosh\beta x-\cos\beta x)+B(\sinh\beta x-\sin\beta x) \quad (3 \cdot 5)$$

ただし $A=\frac{1}{2\beta^2}\bar{y}''_x(0, s)$,

$$B=\frac{1}{2\beta^3}\bar{y}'''_x(0, s)$$

境界条件 $\bar{y}(\ell, s)=\bar{y}'_x(\ell, s)=0$ より A，Bを決定すると次の補助方程式を得る．

$$\bar{y}(x, s)=-\frac{p_o\bar{F}(s)}{2\beta^3}\left\{\sinh\beta(x-a)-\sin\beta(x-a)\right\}u(x-a)$$
$$+\frac{p_o\bar{F}(s)}{2\beta^3 EI}\cdot\frac{M(\beta)(\cosh\beta x-\cos\beta x)+N(\beta)(\sinh\beta x-\sin\beta x)}{2(1-\cosh\beta\ell\cos\beta\ell)} \quad (3 \cdot 6)$$

ただし

$$M(\beta)=\{\sinh\beta(\ell-a)-\sin\beta(\ell-a)\}(\cosh\beta\ell-\cos\beta\ell)$$
$$-\{\cosh\beta(\ell-a)-\cos\beta(\ell-a)\}(\sinh\beta\ell-\sin\beta\ell)$$
$$N(\beta)=\{\cosh\beta(\ell-a)-\cos\beta(\ell-a)\}(\cosh\beta\ell-\cos\beta\ell)$$
$$-\{\sinh\beta(\ell-a)-\sin\beta(\ell-a\}(\sinh\beta\ell+\sin\beta\ell)$$

ここで $\bar{F}(s)=\mathcal{L}^{-1}\sin\omega t=\omega/s^2+\omega^2$ を（3・6）式に代入

$$\bar{y}(x, s)=-\frac{p_o\omega}{4\beta^3 EI}\cdot\frac{1}{S^2+\omega^2}\cdot\frac{Q(\beta)}{(1-\cosh\beta\ell\cos\beta\ell)} \quad (3 \cdot 7)$$

ただし

$$Q(\beta)=2\{\sinh\beta(x-a)-\sin\beta(x-a)\}$$
$$\cdot u(x-a)(1-\cosh\beta\ell\cos\beta\ell)$$
$$-M(\beta)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$-N(\beta)(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$

ところで

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{Q(\beta)}{\beta^3(1-\cosh\beta\ell\cos\beta\ell)}=\text{定数}\neq 0$$

よって $s=0\ (\beta=0)$ は（3・7）式の極とはなりえない．

極は　$S^2+\omega^2=0$　より　$S=\pm i\omega$　（3・8）

および $\cosh\beta\ell\cos\beta\ell=1$ より求まる．この特性方程式の根 β をを γ_n で表わすと

$$\gamma_1\ell=4.730,\ \gamma_2\ell=7.853,\ \gamma_3\ell=10.996,\ \cdots\cdots$$

ところで

$$\beta^4=-\frac{ms^2}{EI}$$

よって

$$S=\pm\frac{h}{i}\beta^2=\pm ih\beta^2=\pm ih\gamma_n^2=\pm i\omega_n$$

（ただし $h^2=EI/m$, $\omega_n=h\gamma_n^2$, $\cosh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=1$）

よって極は $S_n=\pm i\omega_n$ $(n=1, 2\cdots\cdots)$（3・9）

よって極 $\pm i\omega$, $\pm i\omega_n$ に対する留数を求め，それらの総和の逆変換が $y(x, t)$ になる．すなわち

$$y(x, t)=\mathcal{L}^{-1}\bar{y}(x, s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar{y}(x, s)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{R\to\infty}e^{st}\bar{y}(x, s)ds=\sum R$$

（ただしRは $e^{st}\bar{y}(x, s)$ の留数，かつ $\lim_{R\to\infty}|\bar{y}(x, s)|=0$, $S=Re^{i\theta}$）極はすべて単極であるからこれらの極に対する留数は

$$res\{\bar{y}, \pm i\omega\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=\pm i\omega}$$
$$=-\frac{p_o}{4EI}\cdot\frac{Q(\gamma_o)\sin\omega t}{\gamma_o^3(1-\cosh\gamma_o\ell\cos\gamma_o\ell)} \quad (3 \cdot 10)$$

（ただし $\bar{y}(x, s)=A(s)/B(s)$,
$B(s)=S^2+\omega^2$, $\gamma_o^2=\omega/h$）

$$res\{\bar{y}, i\omega_n\}=-\left[\frac{p_o\omega}{4\beta^3 EI}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{Q(\beta)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$

（ただし　$B(s)=1-\cosh\beta\ell\cos\beta\ell$）

$$=-\frac{p_o\omega h}{2\gamma_n^2 EI}\cdot\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$$
$$\cdot\frac{Q(\gamma_n)e^{i\omega_n t}}{\ell(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\sin\gamma_n\ell)i}$$

（$i\omega_n$ に対しては $d\beta/ds=-i/2h\beta$）

$$res\{\bar{y}, -i\omega_n\}=\frac{p_o\omega h}{2\gamma_n^2 EI}\cdot\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$$
$$\cdot\frac{Q(\gamma_n)e^{-i\omega_n t}}{\ell(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell)i}$$

$$\therefore\quad y(x, t)=res\{\bar{y}, \pm i\omega\}+\sum_{n=1}^{\infty}res\{\bar{y}, \pm i\omega_n\}$$
$$=-\frac{p_o}{4EI\gamma_o^3}\cdot\frac{Q(\gamma_o)}{1-\cosh\gamma_o\ell\cos\gamma_o\ell}\sin\omega t$$
$$-\frac{p_o h^2\omega}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}$$
$$\cdot\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell} \quad (3 \cdot 11)$$

（ただし $\gamma_o^2=\omega/h$, $\gamma_n^2=\omega_n/h$,
$h^2=EI/m$, $\cos h\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=1$）

第1項は $\sin\omega t$ に比例している故，周期は外力と等しく，所謂，梁の強制振動を示す定常状態における解である．第2項の級数は梁の自由振動を表わすが，実際には材料の分子間の内部摩擦等の抵抗のため時間と共に減衰することを式を検討すれば容易に結論しうる．梁の固有振動数は $\omega_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$ で梁は $\omega=\omega_n$ のとき共振を生じ第1項，第2項共，振巾が増大する．また

$\omega=\omega_n$ の時は $S=\pm i\omega_n$ において2位の極（3・7式）が生じる.

4. 片持梁が衝撃集中荷重 $P_0u'(t)$ を受ける場合

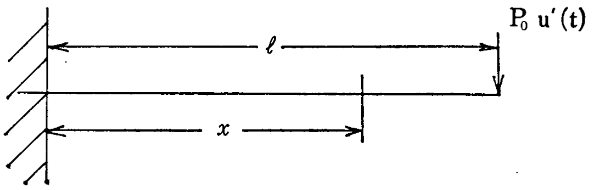


Fig.2

(解) Fig.2 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=-p_0\,u'(x-\ell)u'(t)=0 \qquad (4\cdot1)$$
$$=-p_0u'(x-\ell)F(t)=0$$

初期条件 $y(x,\ 0)=y_t'(x,\ 0)=0 \qquad (4\cdot2)$

境界条件 $y(0,\ t)=y_x'(0,\ t)=y_x''(\ell,\ t)=0 \qquad (4\cdot3)$

$$y_x'''(\ell,\ t)=\frac{V(0,\ t)}{EI}=\frac{P_0F(t)}{EI} \qquad (4\cdot4)$$

（$V(x,\ t)$：剪断力）

それぞれラプラス変換すると

$$\left.\begin{aligned}&\bar{y}(0,\ s)=\bar{y}_x'(0,\ s)=\bar{y}_x''(\ell,\ s)=0\\&\bar{y}_x'''(\ell,\ s)=\frac{P_0\bar{F}(s)}{EI}\\&\text{また}\quad\bar{\varphi}(x,\ s)=-\frac{p_0u'(x-\ell)\bar{F}(s)}{EI}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot5)$$

前問と同様に（2・6）式に代入し，境界条件 $\bar{y}_x''(\ell,\ s)=0$，$\bar{y}_x'''(\ell,\ s)=p_0\bar{F}(s)/EI$ を用いて未定係数を決定し，かつ $\bar{F}(s)=1$ を代入すれば次の如き補助方程式を得る.

$$\bar{y}(x,\ s)=-\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3}\cdot\frac{Q(\beta)}{1+\cosh\beta\ell\cos\beta\ell} \qquad (4\cdot6)$$

ただし $Q(\beta)=(\sinh\beta\ell+\sin\beta\ell)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$
$\qquad -(\cosh\beta\ell+\cos\beta\ell)(\sinh\beta x-\sin\beta x)$

前問と同様に $s=0$ は（4・6）式の極とはなり得ない.

極は $\cosh\beta\ell\cos\beta\ell=-1$ より求まる. この特性方程式の根 β を γ_n で表わすと

$$\gamma_1\ell=1.875,\ \gamma_2\ell=4.694,\ \gamma_3\ell=7.855\cdots\cdots$$

ところで

$$S=\pm\frac{h}{i}\beta^2=\pm ih\beta^2=\pm ih\gamma_n^2=\pm i\omega_n \text{ とおくと}$$

極は $S_n=\pm i\omega_n \qquad (4\cdot7)$

（ただし $h^2=EI/m,\ \omega_n=h\gamma_n^2$，
$\cosh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=-1,\ n=1,2,\cdots$）

$$\therefore\ y(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{R\to\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds$$
$$=\sum R=\sum_{n=1}^{\infty}res\{\bar{y},\ \pm i\omega_n\} \qquad (4\cdot8)$$

極はすべて単極であるから

$$res\{\bar{y},\ i\omega_n\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$
$$=-\left[\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3}\cdot\frac{Q(\beta)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$

（ただし $\bar{y}(x,\ s)=A(s)/B(s)$，
$B(s)=1+\cosh\beta\ell\cos\beta\ell$）

$$res\{\bar{y},\ i\omega_n\}=\frac{p_0h}{EI\ell}\cdot\frac{Q(\gamma_n)e^{i\omega_nt}}{\gamma_n^2(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell)i}$$

$$res\{\bar{y},\ -i\omega\}=-\frac{p^0h}{EI\ell}\cdot\frac{Q(\gamma_n)e^{-i\omega_nt}}{\gamma_n^2(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell)i}$$

$$\therefore\ y(x,\ t)=-\frac{2p_0h}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_nt}{\gamma_n^2(\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell-\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell)} \qquad (4\cdot9)$$

（ただし $h^2=EI/m,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=-1$）

5. 単純支持梁が急速集中荷重 $P_0u(t)$ を受ける場合

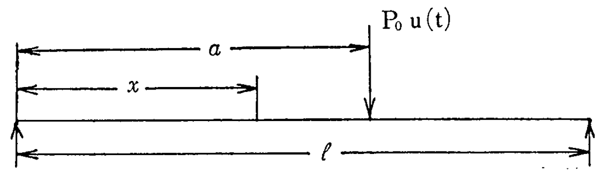


Fig.3

(解) Fig.3 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=-p_0u'(x-a)u(t) \qquad (5\cdot1)$$
$$=-p_0u'(x-a)F(t)$$

初期条件 $y(x,\ 0)=y_t'(x,\ 0)=0 \qquad (5\cdot2)$

境界条件 $y(0,\ t)=y_x''(0,\ t)=0 \qquad (5\cdot3)$

$y(\ell,\ t)=y_x''(\ell,\ t)=0 \qquad (5\cdot4)$

（5・3），（5・4）式を t についてラプラス変換すると

$$\bar{y}(0,\ s)=\bar{y}_x''(0,\ s)=0 \qquad (5\cdot5)$$
$$\bar{y}(\ell,\ s)=\bar{y}_x''(\ell,\ s)=0 \qquad (5\cdot6)$$

また

$$\bar{\varphi}(x,\ s)=-\frac{p_0u'(x-a)}{EI}\bar{F}(s) \qquad (5\cdot7)$$

前問の如くして求めた単純梁の一般の横振動の補助方程式へ $\bar{F}(s)=1/s$ を代入すると

$$\bar{y}(x,\ s)=-\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3 s}\cdot\frac{Q(\beta)}{\sinh\beta\ell\sin\beta\ell} \qquad (5\cdot8)$$

ただし $Q(\beta)=[\sinh\beta(x-a)-\sin\beta(x-a)]$

$$\cdot u(x-a)\sinh\beta\ell\ \mathrm{sia}\beta\ell$$

$$-\sin h\beta(\ell-a)\sinh\beta x\sin\beta\ell$$

$$+\sin\beta(\ell-a)\sin\beta x\sin h\beta\ell$$

ところで

$$\lim_{\beta\to0}\frac{Q(\beta)}{\beta^3\sinh\beta\ell\sin\beta\ell}=K \text{（一定値）（後述参照）}$$

よって $s=0$ は重極にはならない．よって（5・8）式の極は　$s=0$　（5・9）

および　$\sinh\beta\ell\sin\beta\ell=0$（$\beta\neq0$）より求まる．

すなわち $\sinh\beta\ell=-i\sin i\beta\ell=0$　*or*　$\sin\beta\ell=0$

$$\sin i\beta\ell=0 \qquad \beta\ell=n\pi$$

$$\text{よって}\quad \beta=-\frac{in\pi}{\ell} \qquad \beta=\frac{n\pi}{\ell}$$

ところで　$S=\pm\frac{h}{i}\beta^2$

$$\therefore\quad S_n=\pm i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}=\pm i\omega_n \qquad (5\cdot10)$$

（ただし $n=1,2,\cdots\cdots$，かつ $\omega_n=n^2\pi^2h/\ell^2$，

$h^2=EI/m$）

ところで一般に関数 f(t) のラプラス変換 $\bar{f}(s)$ の逆変換は Fourier-Mellin 複素反転積分（Bromwich の積分）になり，またそれは結果的には $e^{st}\bar{f}(s)$ の留数の級数展開となる．すなわち

$$y(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{R\to\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds=\sum R$$

$$(\lim_{R\to o}|\bar{y}(x,\ s)|=0,\ s=Re^{i\theta}=\gamma+i\lambda)$$

$$=res\{\bar{y},\ 0\}+\sum_{n=1}^{\infty}res\left\{\bar{y},\ \pm i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}\right\} \qquad (5\cdot11)$$

極 $s=0$，$s=\pm in^2\pi^2h/\ell^2$ はすべて単極である故，これらに対する留数は次のようにして求まる．

$$res\{\bar{y},\ 0\}=\lim_{s\to o}\{s\cdot\bar{y}(x,\ s)e^{st}\}$$

$$=\lim_{\beta\to o}\left\{-\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3}\cdot\frac{Q(\beta)}{\sinh\beta\ell\sin\beta\ell}\right\}$$

ところで

$$S\cdot\bar{y}(x\cdot s)=-\frac{p_0}{2EI}\left\{\frac{\sinh\beta(x-a)-\sin\beta(x-a)}{\beta^3}u(x-a)\right.$$

$$\left.-\frac{\sinh\beta(\ell-a)\sinh\beta x\ \sin\beta\ell-\sin\beta(\ell-a)\sin\beta x\sinh\beta\ell}{\beta^3\sinh\beta\ell\ \sin\beta\ell}\right\}$$

$\sin h\beta x$，$\sin\beta x$ 等の展開式を上式へ代入

$$=-\frac{p_0}{2EI}\left\{\frac{1}{\beta^3}\left[2\times\frac{\beta^3(x-a)^3}{3!}+2\times\frac{\beta^7(x-a)^7}{7!}+\cdots\cdots\right]u(x-a)\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{3}\beta^5\left[-(\ell-a)x\ell^3+(\ell-a)x^3\ell+(\ell-a)^3x\ell-\frac{1}{36}(\ell-a)^3\beta^4x^3\ell^3\right]}{\beta^3\left\{\beta\ell+\frac{\beta^3\ell^3}{3!}\right\}\left\{\beta\ell-\frac{\beta^3\ell^3}{3!}\right\}}\right.$$

（後項については第2項まで）

$$=-\frac{p_0}{2EI}\left\{\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{2}{7!}\beta^4(x-a)^7+\cdots\right]u(x-a)\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{3}\left\{-(\ell-a)x\ell^3+(\ell-a)x^3\ell+(\ell-a)^3x\ell-\frac{1}{36}(\ell-a)^3\beta^4x^3\ell^3\right\}}{\left(\ell+\frac{\beta^2\ell^3}{3!}\right)\left(\ell-\frac{\beta^2\ell^3}{3!}\right)}\right.$$

$$\therefore\ res\{\bar{y},\ 0\}=\lim_{s\to o}\{s\cdot\bar{y}(x,\ s)e^{st}\}$$

$$=-\frac{p_0}{6EI}\left\{(x-a)^3u(x-a)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\ell}(\ell-a)x\ell^2-(\ell-a)x^3-(\ell-a)^3x\right\} \qquad (5\cdot12)$$

$$res\{\bar{y},\ i\omega_n\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$

$$=-\left[\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3 s}\cdot\frac{Q(\beta)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$

（ただし $B(s)=\sinh\beta\ell\ \sin\beta\ell$，

$\bar{y}(x,\ s)=A(s)/B(s)$）

$$B'(s)=\frac{d}{d\beta}(\sinh\beta\ell\sin\beta\ell)\frac{d\beta}{ds}$$

$$=\ell(\cosh\beta\ell\ \sin\beta\ell+\sinh\beta\ell\ \cos\beta\ell)\cdot\frac{d\beta}{ds}$$

ところで $s=h\beta^2/i$ としても，$s=-h\beta^2/i$ としても $S_n=\pm in^2\pi^2h/\ell^2$．よって極 S_n に対する留数を求める場合何れか一方に対す $d\beta/ds$ をとるとよいことに注意すれば $s=h\beta^2/i$ より $d\beta/ds=i/2\beta h$．また $\beta=-in\pi/\ell$ は $S_n=i\omega_n$，$\beta=n\pi/\ell$ は $S_n=-i\omega_n$ に対応する．これらより極 $\pm i\omega_n$ に対する留数は

（i）$S_n=i\omega_n=i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}$ の場合$\left(\beta=-i\frac{n\pi}{\ell},\ \sinh\beta\ell=0\right)$

$$res\left\{\bar{y},\ i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}\right\}$$

$$= -\left[\frac{p_o}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3 s}\cdot\frac{Q(\beta)}{\ell(\cos h\beta\ell\sin\beta\ell+\sin h\beta\ell\cos\beta\ell)}\cdot\frac{2\beta h}{i}e^{st}\right]_{s=i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}}$$

$$= -\frac{p_o\ell^2}{EI\,n^2\pi^2}\cdot\frac{\ell^2}{in^2\pi^2h}\cdot\frac{\sin\left\{-i\left(n\pi-\frac{n\pi a}{\ell}\right)\right\}\sin h\left(-\frac{in\pi}{\ell}x\right)}{\ell\cos h(-in\pi)}\cdot\frac{h}{i}e^{\frac{in^2\pi^2h}{\ell^2}t}$$

$$= \frac{p_o\ell^3}{EI\pi^4n^4}\cdot\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,e^{i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}t} \quad (5\cdot13)$$

(ii) $S_n=-i\omega_n=-i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}$ の場合 $\left(\beta=\frac{n\pi}{\ell},\ \sin\beta\ell=0\right)$

$$res\left\{\bar{y},\ -i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}\right\}$$

$$= -\left[\frac{p_o}{2EI}\cdot\frac{1}{\beta^3 s}\cdot\frac{Q(\beta)}{\ell(\cosh\beta\ell\sin\beta\ell+\sinh\beta\ell\cos\beta\ell)}\cdot\frac{2\beta h}{i}e^{st}\right]_{s=-i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}}$$

$$= \frac{p_o\ell^2}{EIn^2\pi^2}\cdot\frac{\ell^2}{in^2\pi^2h}\cdot\frac{\sin\left\{\frac{n\pi}{\ell}(\ell-a)\right\}\sin\frac{n\pi}{\ell}x}{\ell\cos n\pi}\cdot\frac{h}{i}e^{-i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}t}$$

$$= \frac{p_o\ell^3}{EIn^4\pi^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,e^{-i\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}t} \quad (5\cdot14)$$

$$\therefore\ res\{\bar{y},\ \pm i\omega_n\}$$

$$= \frac{2p_o\ell^3}{EIn^4\pi^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{n^2\pi^2h}{\ell^2}t \quad (5\cdot15)$$

$$\therefore\ y(x,\ t)=\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}t$$
$$-\frac{p_o}{6EI}\left\{(x-a)^3u(x-a)+\frac{1}{\ell}[(\ell-a)x\ell^2-(\ell-a)x^3-(\ell-a)^3x]\right\} \quad (5\cdot16)$$

（別解）

線形系の応答において単位衝撃応答の積分は，インディシャル応答であることが証明できる故，これを用いると次のように求められる．すなわち

$$y(x,\ t)=-\int_0^t\frac{2p_o\ell}{\pi^2\sqrt{EIm}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\tau\,d\tau$$

(Table. 1 参照)

$$=\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}t$$
$$-\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad (5\cdot17)$$

第１項は自由振動の項で，もし梁が完全弾性体ならばば正弦波状の振動を無限に繰り返すことになるが，実際には分子間の摩擦等により減衰して，結局第２項が静撓みとして残る．すなわち静撓みは無限級数にて表わされて

$$y(x,\ \infty)=-\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\,\mathrm{din}\frac{n\pi}{\ell}x \quad (5\cdot18)$$

$x=\ell/2=a$ のき

$$y\left(\frac{\ell}{2},\ \infty\right)=-\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin^2\frac{n\pi}{2}$$
$$=-\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)=-\frac{p_o\ell^3}{48EI} \quad (5\cdot49)$$

よって（5・19）式は材料力学的静撓みに一致する．

また（5・17）式において

$$\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}t=\pi \quad とおくと$$

$$y(x,\ t)=-\left\{\frac{2p_o\ell^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}\times2$$
$$=-y(x,\ t)_{max} \quad (5\cdot20)$$

これは急速荷重の場合の伸びは静荷重の場合の２倍になることを示している．

また（5・16）式の静撓みの項は $x=a=\ell/2$ において $-p_o\ell^3/48EI$ になることが次のように示される．

$$y(x,\ \infty)=-\frac{p_o}{6EI}\left\{(x-a)^3u(x-a)+\frac{1}{\ell}\left[(\ell-a)x\ell^2-(\ell-a)x^3-(\ell-a)^3x\right]\right\}$$

$$y\left(\frac{\ell}{2},\ \infty\right)=-\frac{p_o\ell^3}{48EI} \quad (5\cdot21)$$

よって（5・16）式と（5・17）式は一致する．

6. む す び

以上のことにより結論として得たことを列挙すると

1）不静定の場合も非定常状態を含めた完全解を求めることができて，その中には定常解も含まれる．

2）線形系において単位衝撃応答の積分はインディシャル応答になることを用いると急速荷重に対する解を極めて簡単に求めることができる．

3）急速荷重の場合の最大撓みは静撓みの場合の２倍になる．

更に言葉を加えると梁の横振動に関しては，種々の近似解がなされているがラプラス変換を用いると静撓みの場合と同様，静定，不静定の区別は無くなり完全解を機械的に求め得る．定常解のみを必要とするときは計算は，極めて簡単になり例えば両端固定梁の場合は（3・6）式の $\bar{F}(s)$ を除くすべての項に $s=i\omega$ を代入し，

$\bar{F}(s)$ の代りに $\sin\omega t$ を入れればよい．2変数の偏微分方程式に対しては2回の変換，逆変換を必要としたが多変数の場合は変数の数程，変換，逆変換を行えばよい．本報においては分布荷重，集中モーメントがかかる場合は次報に譲り，集中荷重の場合についてのみまとめた．筆者の計算したその他のものを Table. 1 に示す．

謝　辞

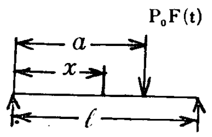
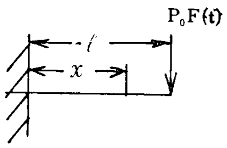
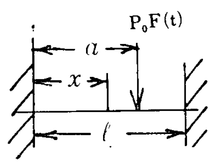
終りに本題に対して終始，熱心に研究を進め，多くの有益なる結果および示唆を示された43年度卒論研究生，水本岩治君に対して深甚なる敬意と感謝の意を表します．

参　考　文　献

1）R. V. Churchill："応用ラプラス変換", p. 251, 彰国社, (1944).
2）W. T. Thomson："Laplace Transformation", p. 219, 丸善, (1962).
3）亘理厚："機械振動", p. 167, 丸善, (1966).
4）望月太喜雄："ラプラス変換の梁への応用" 第1報 宇部高専研究報告, 6号, p. 16, (1968).

（昭和45年4月10日受理）

Table. 1

beam	L.T.	loading function	deflection $y(x, t)$ (perfect solution containing a transient condition)
	a	$-p_0u'(x-a)$ $\cdot\sin\omega t$	$-\frac{p_0}{2EI}\cdot\frac{Q(\gamma_0)}{\gamma_0^3\sin h\gamma_0\ell\sin\gamma_0\ell}\sin\omega t$ $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p_0\omega h\ell^5\sin\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x}{EIn^2\pi^2(\ell^4\omega^2-n^4\pi^4h^2)}\sin\omega_n t$ $(\gamma_0^2=\omega/h,\ h^2=EI/m,\ \omega_n=n^2\pi^2h/\ell^2)$
	b	$-p_0u'(x-a)$ $\cdot u'(t)$	The solution for $0\leqq x\leqq a$ was obtained by Thomson. I obtained an identical expression as the solution for $0\leqq x\leqq\ell$.
	a	0	The solution was obtained by Mr. Watari.
	c	$-p_0u'(x-\ell)$ $\cdot u(t)=0$	$\frac{2p_0}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n^4(\cos h\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell-\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell)}$ $-\frac{2p_0}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n^4(\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell-\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell)}$ $(h^2=EI/m,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=-1)$
	b	$-p_0u'(x-a)$ $\cdot u'(t)$	$-\frac{p_0h^2}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\omega_n(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\cos\gamma_n\ell)}$ $(0\leqq x\leqq\ell,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell=1)$
	c	$-p_0u'(x-a)$ $\cdot u(t)$	$\frac{p_0}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n^4(\sin h\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cos h\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell)}$ $-\frac{p_0}{EI\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n^4(\sinh\gamma_n\ell\cos\gamma_n\ell-\cosh\gamma_n\ell\sin\gamma_n\ell)}$ (　〃　〃　)

a : a piriodic load　b : an impulsive load　c : a rapid lood