テレビジョン信号のガウス-マルコフモデルと DPCM 系への応用

藤　本　　　勉*

Gauss-Markov Models of Random Television Signals and, Its Applications to Differential Pulse Code Modulation Systems

Tsutomu FUJIMOTO

Abstract

Recently, *J. D. Irwin* and *J. B. O' Neal Jr.* have reported about the design of optimum DPCM (Differential Pulse Code Modulation) encoding system via the *Kalman* predictor.

But, in their articles, no mentions are concretely made for the transmission of Television signals.

So, in this paper, the auther tries to design of DPCM system, particular of the local decoder via the *Kalman's* predictor, for the transmission of television signals, because the the DPCM system is seemed to be most useful only for the transmission of that kind of signals to reduce the redundant information contents.

For the first to do this, the *Gauss-Markov* model is made of the autocorrelation functions, and the after, the full discussions are presented along the same manners as theirs.

But, only by these methods, the noise, caused by quantizing the prediction error signals in the decorder, remains flawlessly as the outputs in the decorder.

Therefore, to reduce this noise componet, next the effective filtering or smoothing scheme is considered.

As the results of this considerations, it is find to use the filter or the smoother more effective as the larger the quantizing noise is.

And the smoothing has a marvelous effect, when the covariance of quantizing noise is about **0.1**, in contrast that of input signal to the DPCM encoder **1.0**.

Moreover, when the former becomes larger or equals to the value of the latter, oppositly the filter becomes more useful.

1. まえがき

テレビジョン信号のように冗長度の多い信号を，その冗長度を除去し帯域圧縮して伝送する有効な手段に DPCM 通信系 (Differential Pulse Code Modulation System)[1] がある.

この通信方式は，入力信号の微分波形を伝送し，受信側においては逆に積分操作を行なって原信号を再生するものである．したがって伝送路において混入する雑音は受信側で積分されて出力となるので，その影響が後まで残り，そのため微分波形は伝送路雑音の影響を受けない形に変調されて伝送路に送出される.

このような変調方式としては例えば PCM がある．そこで変調方式として PCMを採用した場合，DPCM系は入力信号の差分値を伝送し，受信側では，この差分値の現在までの総和を取って原信号を再生することになる.

ところが，PCM を採用することによって，伝送路における雑音の混入は問題とならなくなるが，今度は別の雑音の混入が起る.

この雑音は，PCM 特有のものであり，量子化操作を行なうために発生するので，一般に量子化雑音と言われている.

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

この量子化雑音は，量子化器入力信号空間の出力信号空間への写像が線形に行なわれないことにより発生する．

したがって次には，量子化雑音の低減が問題となり，量子化雑音が量子化器入力信号の電力の自乗に比例する[2),3)]ということから，量子化器入力の電力低減の研究が行なわれてきた．

この電力低減の方法は，例えば送信側において量子化器入力信号を瞬時圧縮して量子化し，受信側においては復調出力を逆に瞬時伸張する等，いろいろの方法が用いられているが，ＤＰＣＭ系においては，量子化器入力として，差分信号を用いる代りに，過去の信号値に基づいて，現在の値の予測を行ない．真値と予測値との差，つまり予測誤差を量子化，伝送することが試みられ，単純に差分を伝送するよりも，予測誤差を伝送する方が，量子化雑音を低減する効果が著しいことが確認されるにいたり，このような動作を行なう DPCM 系は，予測量子化系 (Predictive Quantizing System)[4)]と呼ばれている．

したがって，局部復調器の動作としては，DPCM 系におけるものが，単に現在までの差分値の総和を取るのに対し，予測量子化系においては過去の入力信号値の最適重みづけの総和を取るような動作を行なう．

後者のような動作をする予測器としては，例えば *Wiener*[5)~9)] フィルタがあり，その構成については，既に筆者は報告を行なっている[10)]．

しかし，この *Wiener* フィルタは，入力信号の自己相関関数を *a priori* に与えてやらなければならないので，入力信号が定常な場合は問題とならないが，例えば実際のテレビジョン信号の場合のように，順次，異なった種類の多数の画像を伝送する場合とか，一枚の静止画像であっても走査が画像の端に達した場合などのように信号の非定常性を考慮しなければならない場合[11)]には，*Wiener* フィルタでは，設計が困難[12),13)]となる．この理由は *Wiener* フィルタがオープンループ的な動作をするためである．

したがって，非定常な信号を伝送するには，予測の**はずれ**を次の予測に有効に用いる逐次修正形すなわち，クローズドループ的な予測器の方がより良い成積を上げるであろうことは容易に想像がつく．このような予測器としては，例えば *Kalman*[14)~19)] フィルタがある．*Kalman* フィルタは，*Wiener* フィルタより導かれて[17)20)]，現代制御理論において盛んに応用されているものである．[30),31)]

以上のような背景のもとに，最近 *J. D. Irwin, J. B, O'Neal Jr*[21)]は予測量子化系へ *Kalman* フィルタが適用できるということを示しているが，彼等は実際の設計については具体的にふれていない．本文では *Kalman* フィルタにテレビジョン信号が適用できるような形にするため，先ずガウスーマルコフモデルを作り実際に *Kalman* フィルタを局部復調器に用いた予測量子化系の設計を行なう．

しかし，このままでは復調された信号出力として，量子化雑音がそのまま現われるので，好ましくない．したがって受信側において，量子化雑音を復調出力から除くためにさらに濾波することを考える．

また受信側においては復調出力がある一定時間遅れて取り出されても，これはバッファ・メモリーの容量さえあれば問題にならないので，復調出力をさらに平滑することについても論じ，どの程度量子化雑音が低減できるかを検討し，併せて平滑を採用することの是否についてもふれる．

2．テレビジョン信号のガウスーマルコフ モデル

先ず，テレビジョン信号のガウスーマルコフモデル[17)]を求める．

A. R. Billings, K. E. Foward[22)]，その他の実験結果[4),21),22)]によると，一般的な画像を走査して得られるテレビジョン信号の正規化自己相関関数は，次式で表わされる．

$$\phi(\tau)=\sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\xi_i|\tau|} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i=1 \qquad (2)$$

ここにτは時間推移であり，ξ_i は正の係数，さらに N は画像に存在する単一 *detail* のエリアの数である．

例えば，画像の全エリアが，一様な *detail* より構成されている場合には $N=1$ であり

$$\phi(\tau)=e^{-\xi|\tau|} \qquad (3)$$

と書けて，*Kretzmer*[21)]，その他の実験結果[4),22)]と一致する．

また，画像が，２つの異なった *detail* のエリアより成る場合には，

$$\phi(\tau)=A_1 e^{-\xi_1|\tau|}+A_2 e^{-\xi_2|\tau|} \qquad (4)$$

$$A_1+A_2=1 \qquad (5)$$

と書ける．

さて一般にテレビジョン信号の正規化自己相関関数が(1)，(2)式で表わせる場合，我々はテレビジョン信号の統計的性質については，第１次モーメントである平均値

と，第2次モーメントである自己相関関数に関する情報を知っているので，テレビジョン信号を全く同じ統計的性質をもつガウスーマルコフ過程で表わすことができる．

(1), (2)式により自己相関関数を表わすと，これは時間推移τのみの関数であり，テレビジョン信号は定常確率過程となる．したがって，テレビジョン信号の平均値は0とすることができる．もちろん実際のテレビジョン信号は物理的に非負であるので，平均値はある非負の値となるが，ここではテレビジョン信号からその平均値を引いたものを考えることにしても何ら不都合は生じない．さらに分散は $\phi(0)$ と同一となり，$\phi(0)=1$ とする．そこで，テレビジョン信号 $\mathbf{w}(k)$ を次のように表わす．

$$\mathbf{w}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\mathbf{w}(k) \tag{6}$$

ここに $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$はサンプル時点を表わし，

$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)$ は遷移の係数である．

$\boldsymbol{\eta}(k)$ は平均値0の正規性白色雑音である．

すなわち

$$\left.\begin{aligned} &E[\boldsymbol{\eta}(k)]=0\\ &E[\boldsymbol{\eta}(k)\boldsymbol{\eta}(j)]=\mathbf{Q}(k)\boldsymbol{\delta}_{kj} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\ j=0,\ 1,\ 2,\cdots$

$\boldsymbol{\delta}_{kj}$: *Kronecker* のデルタ

また，テレビジョン信号 $\mathbf{w}(k)$ の初期値 $\mathbf{w}(0)$ は平均値0で，ガウス分布をしているものとする．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &E[\mathbf{w}(0)]=0\\ &E[\mathbf{w}^2(0)]=\phi(0) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

さらに，信号 $\{\mathbf{w}(k),\ k=0,1,2,\cdots\cdots\cdots\}$ と雑音 $\{\boldsymbol{\eta}(k),\ k=0,1,2,\cdots\cdots\}$ とは独立であるとすれば，

$$E[\mathbf{w}(k)\boldsymbol{\eta}(k)]=0 \tag{9}$$

次に，$\mathbf{w}(k)$ の分散は(6)式より両辺に $\mathbf{w}(k)$ を掛けて平均を取れば良いので，次の式となる．

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(k+1)\mathbf{w}(k)] &= E[\{\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\,\mathbf{w}(k)\\ &\qquad +\boldsymbol{\eta}(k)\}\mathbf{w}(k)]\\ &=\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)E[\mathbf{w}^2(k)]\\ &\qquad +E[\boldsymbol{\eta}(k)\mathbf{w}(k)] \end{aligned} \tag{10}$$

上式において，右辺第2項は仮定より0である．したがって

$$E[\mathbf{w}(k+1)\,\mathbf{w}(k)]=\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)E[\mathbf{w}^2(k)] \tag{11}$$

ここで，(1), (2)式より

$$E[\mathbf{w}(k+1)\mathbf{w}(k)]=\boldsymbol{\Phi}(1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i} \tag{12}$$

$$E[\mathbf{w}^2(k)]=\phi(0)=\sum_{i=1}^{N}A_i=1 \tag{13}$$

(12), (13)式を(1)式に代入して，$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)$ を求めれば

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i} \tag{14}$$

ここで若干 $\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)$ の性質について考察を加える．(6)式において，$k+1$を $k+n\ (n>1)$ としてみると，

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+n)&=\boldsymbol{\Phi}(k+n,\ k+n-1)\mathbf{w}(k+n-1)\\ &\qquad +\boldsymbol{\eta}(k+n-1) \end{aligned} \tag{15}$$

前と同様に分散を求めてみると，

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(k+n)\mathbf{w}(k)]&=\boldsymbol{\Phi}(k+n,\ k+n-1)\\ &\times E[\mathbf{w}(k+n-1)\mathbf{w}(k)]+E[\boldsymbol{\eta}(k+n-1)\mathbf{w}(k)] \end{aligned} \tag{16}$$

上式右辺第2項は0である．

なぜならば，(6)式を変形して

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+n-1)&=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-2)\\ &\times\mathbf{w}(k+n-2)+\boldsymbol{\eta}(k+n-2)\\ &=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-2)\{\boldsymbol{\Phi}(k+n-2,\\ &\quad k+n-3)\mathbf{w}(k+n-3)+\boldsymbol{\eta}(k+n-3)\}\\ &\quad +\boldsymbol{\eta}(k+n-2)\\ &=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-3)\mathbf{w}(k+n-3)\\ &\quad +\sum_{i=k+n-2}^{k+n-1}\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ i)\boldsymbol{\eta}(i-1) \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，ここで

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-3)\\ &\quad=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-2)\\ &\qquad\times\boldsymbol{\Phi}(k+n-2,\ k+n-3) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k+n-1)=1 \tag{19}$$

を用いた．以下同様にして，

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+n-1)&=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k)\mathbf{w}(k)\\ &\quad+\sum_{i=k+1}^{k+n-1}\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ i)\boldsymbol{\eta}(i-1) \end{aligned} \tag{20}$$

(20)式において，両辺に $\boldsymbol{\eta}(k+n-1)$ を掛けて平均を取ってみると

$$\begin{aligned} &E[\mathbf{w}(k+n-1)\eta(k+n-1)]\\ &\quad=\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ k)E[\mathbf{w}(k)\boldsymbol{\eta}(k+n-1)]\\ &\qquad+\sum_{i=k+1}^{k+n-1}\boldsymbol{\Phi}(k+n-1,\ i)E[\eta(k+n-1)\boldsymbol{\eta}(i-1)] \end{aligned} \tag{21}$$

上式において，(9)式の仮定より

$$E[\mathbf{w}(k)\eta(k+n-1)]=0 \tag{22}$$

(7)式の仮定より

$$\begin{aligned} &E[\eta(k+n-1)\boldsymbol{\eta}(i-1)]=0\\ &\quad i=k+1,\ k+2,\ \cdots\cdots,\ k+n-1 \end{aligned} \tag{23}$$

したがって

$$E\left[\eta(k+n-1)w(k)\right]=0 \tag{24}$$

となり，(16)式右辺第2項は0となる．

また(16)式の左辺，および右辺第1項は

$$E\left[w(k+n)w(k)\right]=\phi(n)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i n} \tag{25}$$

$$E\left[w(k+n-1)w(k)\right]=\phi(n-1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(n-1)} \tag{26}$$

結局(16)式は

$$\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i\cdot n}=\Phi(k+n,\ k+n-1)\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(k-1)} \tag{27}$$

故に，$\Phi(k+n,\ k+n-1)$ は上式と(13)，(14)式より

$$\Phi(k+n,\ k+n-1)=\frac{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i n}}{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(n-1)}}=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}=\Phi(k+1,\ k) \tag{28}$$

以上の議論により，結局 Φ は，$w(k)$ の推移の起った時点には依存せず，単に時間推移（この場合には1）にのみ依存することがわかり，$w(k)$ の定常性の確認ができた．よって Φ は次のように書ける．

$$\Phi(k+n,\ k+n-1)=\Phi(1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i} \tag{29}$$

また一般に $\Phi(k+n,\ k)$ は，(20)式を導いた時に用いた次の関係より

$$\Phi(k+n,\ k)=\Phi(k+n,\ k+n-1)\times\Phi(k+n-1,\ k+n-2)\cdots\cdots\Phi(k+1,\ k)$$

$$=\Phi(1)\cdot(1)\cdots\cdots\Phi(1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i\cdot n} \tag{30}$$

となる．

以上の考察により，(6)式のガウスーマルコフモデルは次の式で書ける．

$$w(k+1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\cdot w(k)+\eta(k) \tag{31}$$

(31)式は(18)式と同様にして

$$w(k+1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\left\{\sum_{i=1}^{N}Ae^{-\xi i}w(k-1)+\eta(k-1)\right\}+\eta(k)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-2\xi i}w(k-1)+\sum_{j=k}^{k+1}\left\{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(k+1-j)}\eta(j-1)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(k+1)}w(0)+\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i(k+1-j)}\eta(j-1)\right\} \tag{32}$$

上式において，(7)，(8)式の仮定より $w(0)$，$\{\eta(j-1),\ j=1,2,\cdots\cdots k+1\}$ は平均値0のガウス分布をしているので，$w(k+1)$ も平均値0のガウス分布となる．すなわち，テレビジョン信号の統計的性質のうち第一次モーメントである平均値が k の値にかかわらず一致した．次に $w(k)$ の分散も一致するように，雑音 $\{\eta(k),\ k=0,1,2,\cdots\}$ の分散を決定しよう．それには，(31)式より，$w(k+1)$ の分散を求めてみる．

$$E\left[w^2(k+1)\right]=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}w(k)+\eta(k)\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2 w^2(k)\right]+2E\left[\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}w(k)\,\eta(k)\right]+E\left[\eta^2(k)\right] \tag{33}$$

(33)式の右辺第2項は(9)式の仮定より0，また(7)，(13)式より

$$E\left[w^2(k+1)\right]=E\left[w^2(k)\right]=\phi(0)=1$$

$$E\left[\eta^2(k)\right]=Q(k)$$

であるから，(33)式は

$$1=\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2+Q(k)$$

または，

$$Q(k)=1-\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2 \tag{34}$$

(34)式は k の値に依存しない定数であるから

$$Q(k+n)=Q(k)=1-\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2 \tag{35}$$

となる．

上の議論をまとめると，正規化自己相関関数(1)，(2)式をもつ平均値0のテレビジョン信号 $\{w(k),\ k=0,1,2,\cdots\cdots\}$ は次のようなガウスーマルコフモデルで表わされる．

$$w(k+1)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}w(k)+\eta(k) \tag{36}$$

ここに，$\{w(0)\}$ は平均値0，分散1のガウス分布 $\{\eta(k),\ k=0,1,2,\cdots\cdots\}$ は平均値0，分散 $1-\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2$ の正規性白色雑音である．

(36)式を図示すれば Fig. 1のようになる．

例として，*A. R. Billings, K. E. Forward*[22]の実験結果より，*low-detail* の風景写真の場合

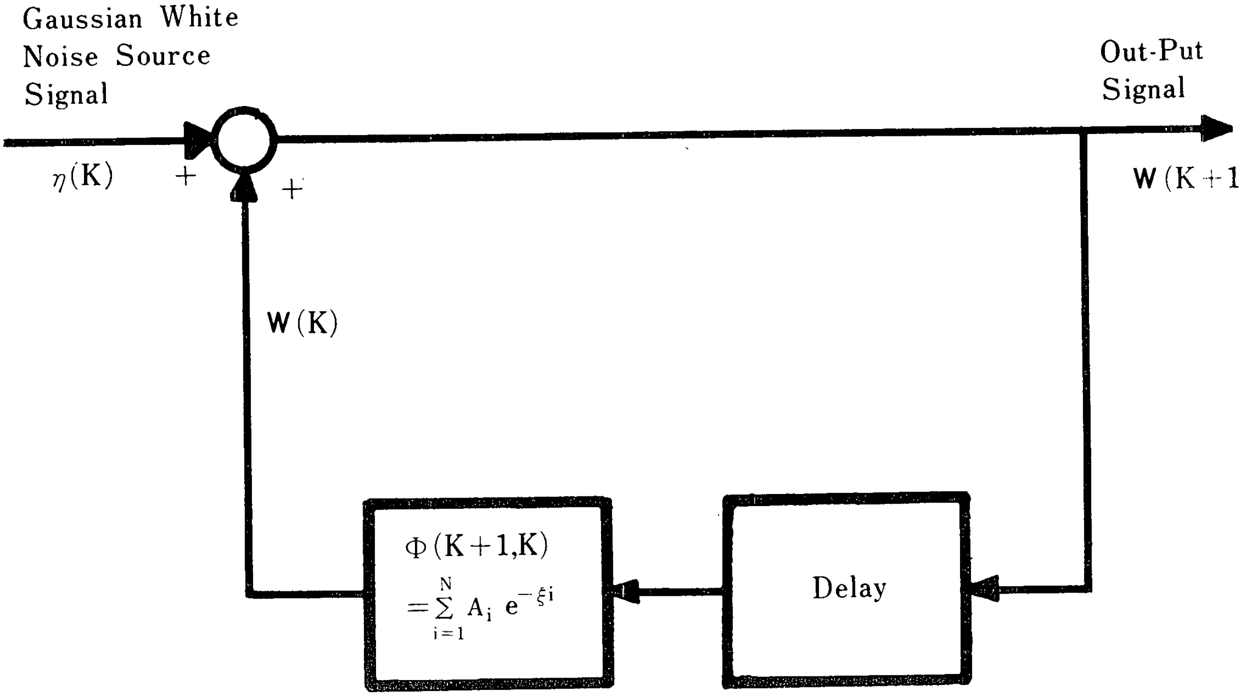

Fig.1. Gauss-Markov Signal Model

$$\phi(\tau)=e^{-1.8\times10^{-1}|\tau|} \qquad \tau:\mu s \qquad (37)^{\text{注}1)}$$

サンプリング周期として *Nyquist* 間隔を採用すれば

$$\tau=0.1n,\ n=0,1,2,\cdots\cdots \qquad (38)$$

したがって，(36)式を用いて

$$\mathbf{w}(k+1)=e^{-1.8\times10^{-2}}\mathbf{w}(k)+\eta(k)$$
$$\fallingdotseq 0.93216\ \mathbf{w}(k)+\eta(k) \qquad (39)$$

また $\eta(k)$ の分散 $\mathbf{Q}(k)$ は(36)式より

$$\mathbf{Q}(k)=1-(e^{-1.8\times10^{-2}})^2$$
$$\fallingdotseq 3.5360\times10^{-2} \qquad (40)$$

となる．

さらに，前景が *Low-detail* 背景が *high-detail* のエリアよりなる画像の場合には，(4)，(5)式において，

$$A_1=0.92 \qquad A_2=0.08 \qquad (41)^{\text{注}2)}$$

$$\xi_1=1.8\times10^4 \quad \xi_2=1.5\times10^5 \qquad (42)^{\text{注}3)}$$

となり前と同様に，ガウスーマルコフモデルを作ることができる．

注　1)，2)，3)，*A. R. Billings, K. E. Forward*[22] は論文の中で，注1）の値 1.8×10^{-1} を 1.8×10^4 と報告しているがこの値では彼等の実験結果（Fig. 5）に適しないので，修正して採用し計算を実行した．
また注2)，3）の値を実験結果と適合しないので，これらはそのまま掲げるにとどめた．

3. DPCM系への応用

DPCM系のモデル[1]を Fig. 2 およびその動作を Fig. 3 に示す．DPCM 系はこれらの図よりわかるように，送信側では入力信号の差分値を送信し，受信側では差分値の現在までの総和を取って原信号を再生する．

この DPCM 系は Fig. 4 に示すように，局部復調器に予測器を用いて特性を改善する試みが *J. B. O'Neal Jr.*[4] によって行なわれ予測量子化系　(Predictive Quantizing System) と呼ばれている．さらに最近 *J. D. Irwin, J. B. O'Neal Jr*[21] は局部復調器に，*R. E. Kalman*[14)~19)] のフィルタ理論が適用できることを示している．しかし彼等は，テレビジョン信号に対する具体的設計は行なっていないので，ここで先に求めた，テレビジョン信号のガウスーマルコフモデルに対して設計を行ない，さらに受信側において復調された信号の濾波および平滑を行ない，量子化雑音を低減することを試みる．

さて，Fig. 4 において入力信号は前に述べた(30)式のガウスーマルコフモデルより生成されるテレビジョン信号であるとする．ここで，同図において量子化器の出力は入力信号 $w(k+1)$ と $\{w(j),\ j=0,1,2,\cdots\cdots k\}$ に基づいて行なわれた $w(k+1)$ の予測値 $w(k+1|k)$ との差（すなわち予測誤差）がそのまま表われているが，これは理想的な場合であり通常は量子化雑音，過負荷雑音等が混入する．ここでは量子化によって量子化雑

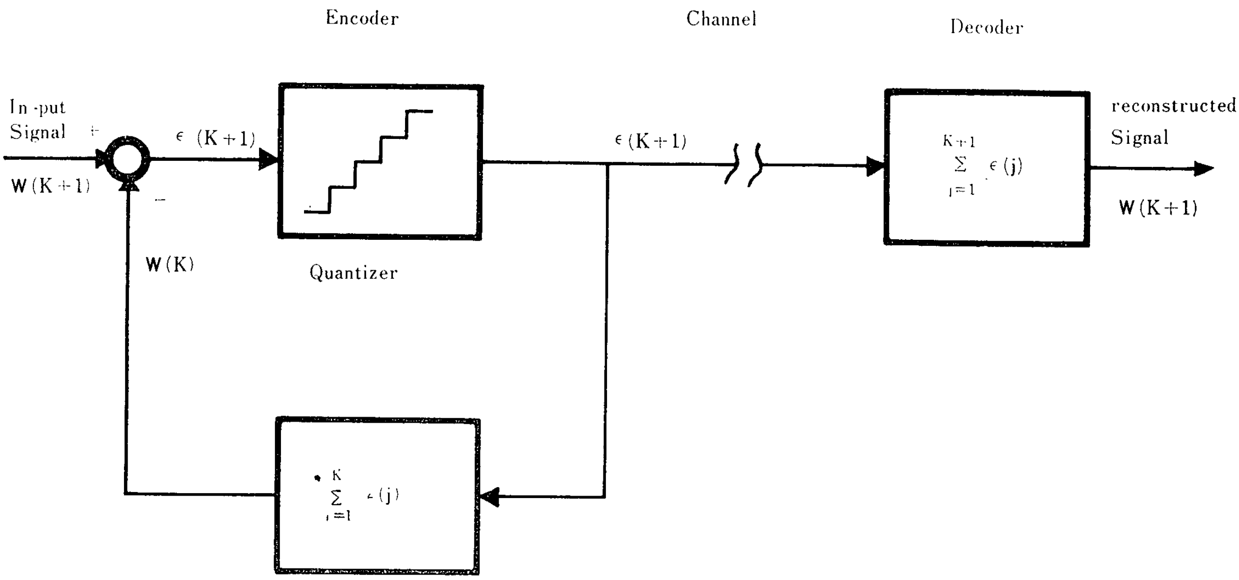

Fig.2. DPCM System

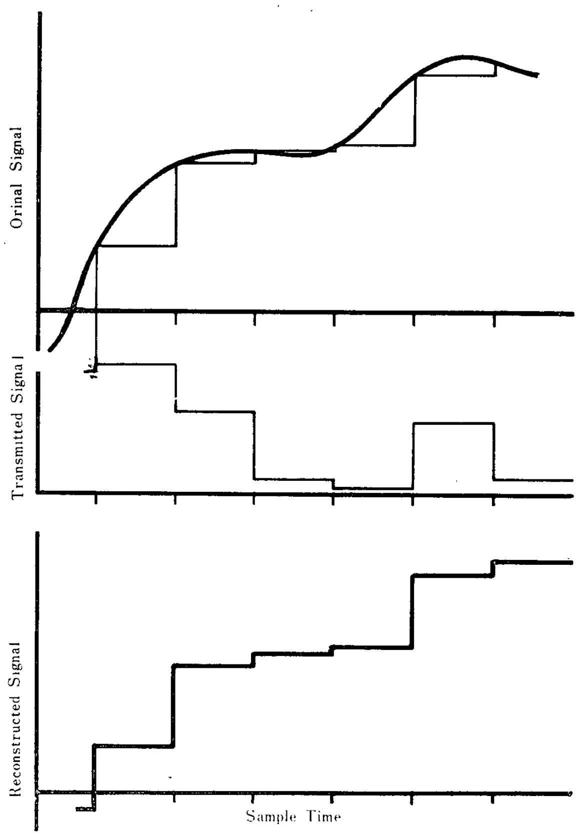

Fig.3. Conceptual Diagram of the Operation of DPCM System

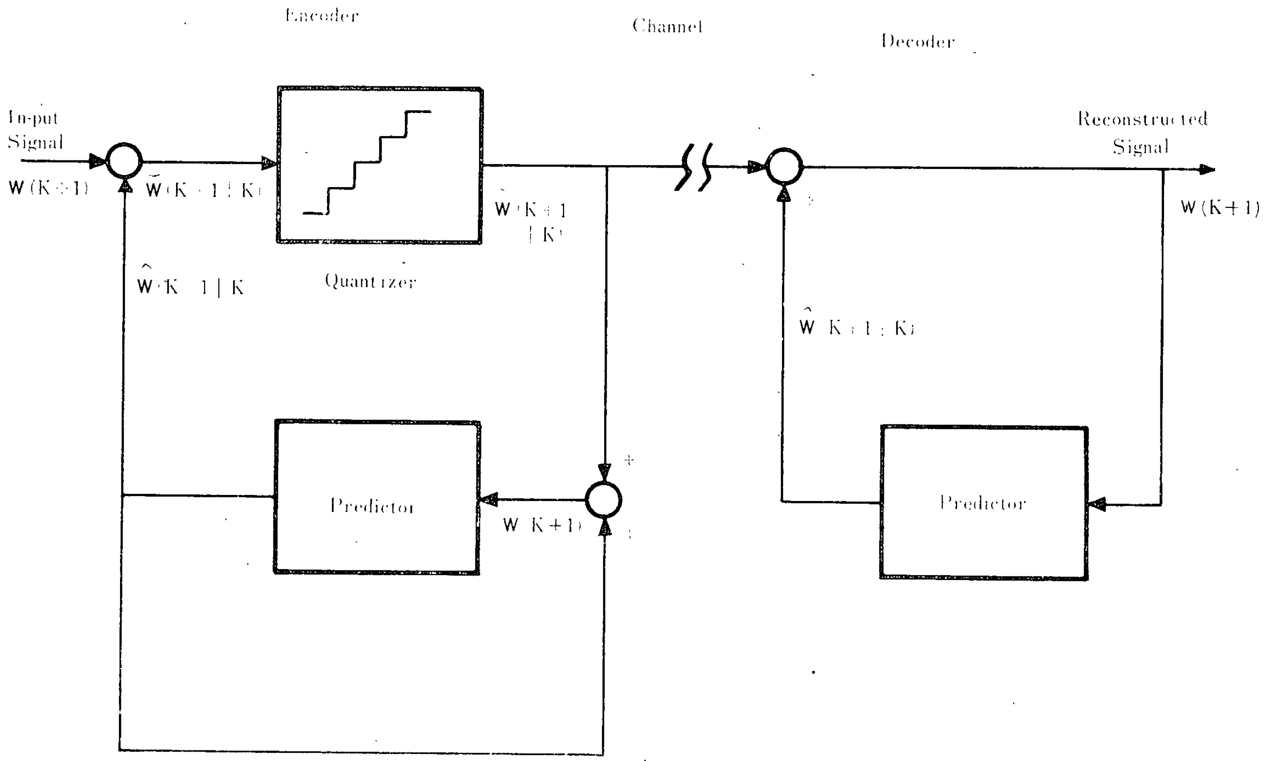

Fig.4. Predictive Quantizing System, where $\hat{W}(k+1 \mid k)$ is optimal predicted value for $W(k+1)$ based on $\{W(1)\ W(2)\ W(k)\}$

音 $\delta(k)$ のみが混入するものとし，この $\delta(k)$ は *J. B. O'Neal Jr*[4] の実験結果より量子化ステップ数が大であるとして，平均値0の正規性白色雑音であるとする．さらに $\delta(k)$ は入力信号の初期値 $w(0)$ とは独立であるとする．すなわち

$$E\left[w(0)\delta(k)\right] = 0 \quad k=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{13}$$

以上の仮定を用いると Fig. 4 は Fig. 5 のように書くことができる.

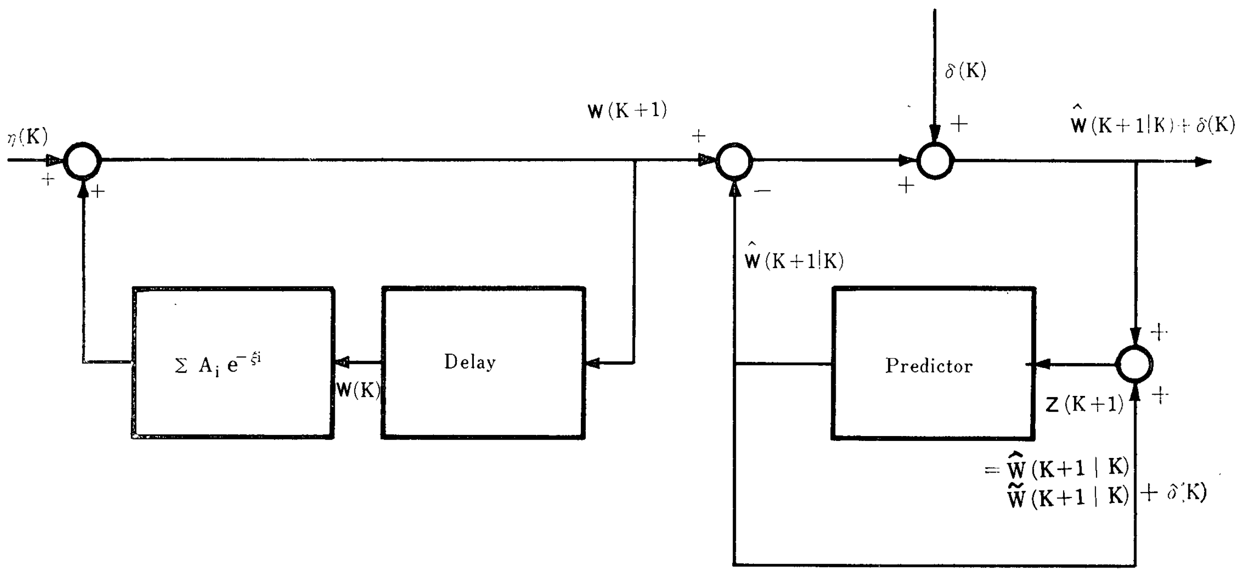

Fig.5. Predictive Quantizing System applicationable kalmans' Theory

Fig. 5 において，予測器の入力 $\mathbf{z}(k+1)$ は

$$\mathbf{z}(k+1)=\tilde{\mathbf{w}}(k+1\mid k)+\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)+\boldsymbol{\delta}(k+1)$$
$$=\mathbf{w}(k+1)+\delta(k+1) \qquad (44)$$

予測器は $\{\mathbf{z}(k+1),\ k=0,1,2,\cdots\cdots k\}$ に基づいて $\mathbf{w}(k+2)$ の最適*推定値を求めるので，これは付加雑音観測系[24]にすぎない．ここでさらに $\{\boldsymbol{\delta}(k+1),\ k=0,1,2\cdots\cdots\}$ は $\{\boldsymbol{\eta}(k),\ k=0,1,2\cdots\cdots\}$ に独立であると仮定すれば，直接 *R. E. Kalman*[14] の予測理論が適応できる．すなわち(6)，(44)式のような系において，観測データ $\{\mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2),\ \mathbf{z}(3)\cdots\cdots,\ \mathbf{z}(k+1)\}$ に基づく $\mathbf{w}(k+1)$ の最適推定値 $\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k+1)$ は全ての $k=0,1,2\cdots\cdots$ に対して，

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k+1)=\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)$$
$$+\mathbf{G}(k+1)\left[\mathbf{z}(k+1)-\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)\right] \qquad (45)$$

ただし，初期値として

$$\hat{\mathbf{w}}(0\mid 0)=\hat{\mathbf{w}}(0\mid \text{no measurement})$$
$$=E\left[\mathbf{w}(0)\right]=0 \qquad (46)$$

(45)式において，$\mathbf{G}(k+1)$ はフィルターゲインと言われ次式で表わされる．

$$\mathbf{G}(k+1)=\frac{\mathbf{P}(k+1\mid k)}{\mathbf{P}(k+1\mid k)+\mathbf{R}(k+1)} \qquad (47)$$

$$\mathbf{P}(k+1\mid k)=\Phi^2(k+1,\ k)\mathbf{P}(k\mid k)+\mathbf{Q}(k) \qquad (48)$$

$$\mathbf{P}(k+1\mid k+1)=\left[1-\mathbf{G}(k+1)\right]\mathbf{P}(k+1\mid k) \qquad (49)$$

ここに，$\mathbf{R}(k+1)$ は $\delta(k+1)$ の分散であり

$$E\left[\boldsymbol{\delta}(j+1)\boldsymbol{\delta}(k+1)\right]=\mathbf{R}(k+1)\rho_{kj} \qquad (50)$$

$\boldsymbol{\delta}_{kj}$: *Kronecker* のデルタ

また，$\mathbf{P}(k+1\mid k)$，$\mathbf{P}(k+1\mid k+1)$ は推定誤差分散であり次の式で定義される．

$$\mathbf{P}(k+1\mid k)\triangleq E\left[\{\mathbf{w}(k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)\}^2\right]$$
$$\mathbf{P}(k+1\mid k+1)\triangleq E\left[\{\mathbf{w}(k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k+1)\}^2\right]$$

また，くり返し計算の初期値として

$$\mathbf{P}(0\mid 0)=E\left[\mathbf{w}^2(0)\right]=\phi(0) \qquad (51)$$

(45)式において，*Kalman*[14] により

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)=\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k) \qquad (52)$$

であるので，Fig. 5 と較べてみると，(45)式の右辺第2項のカッコの中は DPCM において，伝送路に送り出される信号であることがわかる．すなわち(44)，(52)式を用いて

$$\mathbf{z}(k+1)-\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)$$
$$=\mathbf{z}(k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)$$
$$=\mathbf{w}(k+1)+\boldsymbol{\delta}(k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)$$
$$=\tilde{\mathbf{w}}(k+1\mid k)+\boldsymbol{\delta}(k+1) \qquad (53)$$

(52)，(54)式を用いて，(45)式を書きかえれば

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k+1)=\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)$$
$$+\mathbf{G}(k+1)\left[\tilde{\mathbf{w}}(k+1\mid k)+\boldsymbol{\delta}(k+1)\right] \qquad (54)$$

(36)，(54)式を Fig. 4，5 に適用すれば Fig. 6 が得られる．Fig. 6 が局部復調器に *Kalman*[14] の予測器を用いた予測量子化系である．復調された信号出力としては $\mathbf{w}(k+1)+\boldsymbol{\delta}(k+1)$ が取り出されているが，量子化雑音を低減するために，$\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k+1)$ を出力とした方が，特性の改善ができるであろうことは容易に想像がつく．このことはまた後で考察する．

次に，フイルタゲイン $\mathbf{G}(k+1)$ を求める．$\mathbf{G}(k+1)$ の計算は，先ず初期値(51)式から始まり，(48)，(47)，(49)式と順次進み，以後はこの手続きをくり返して行なわれる．実際に行なうと，先ず(13)式を用いて

$$\mathbf{P}(0\mid 0)=1 \qquad (55)$$

$$\mathbf{P}(1\mid 0)=\Phi^2(1,0)\mathbf{P}(0\mid 0)+\mathbf{Q}(0) \qquad (56)$$

上式において，$\boldsymbol{\Phi}(1,0)=\Phi(1)=\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i}$ であり，

$\mathbf{Q}(0)$ は(35)式より $\mathbf{Q}(0)=\mathbf{Q}(n)=1-(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i})^2$

したがって(56)式は

$$\mathbf{P}(1\mid 0)=(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i})^2+1-(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i})^2=1 \qquad (57)$$

(57)式を(47)式の代入して，

$$\mathbf{G}(1)=\frac{\mathbf{P}(1\mid 0)}{\mathbf{P}(1\mid 0)+\mathbf{R}(1)}=\frac{1}{1+\mathbf{R}(1)} \qquad (58)$$

これで先ず，$k=0$ に対するフイルターゲイン $\mathbf{G}(1)$ が求まった．

以下同様に $k=1$ に対して

$$\mathbf{P}(1\mid 1)=\left[1-\mathbf{G}(1)\right]\mathbf{P}(0\mid 0)$$
$$=\frac{\mathbf{R}(1)}{1+\mathbf{R}(1)} \qquad (59)$$

$$\mathbf{P}(2\mid 1)=(\sum_{\xi=1}^{N}Ae^{-\xi i})^2\frac{\mathbf{R}(1)}{1+\mathbf{R}(1)}$$
$$+1-(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i})^2$$
$$=1-\frac{1}{1+\mathbf{R}(1)}(\sum_{i=1}^{N}A_ie^{-\xi i})^2 \qquad (60)$$

$$\mathbf{G}(2)=\frac{\mathbf{P}(2\mid 1)}{\mathbf{P}(2\mid 1)+\mathbf{R}(2)}$$

*：最適なる用語は，本稿においては全ての許容損失関数[17]を最小ならしめることを意味する．

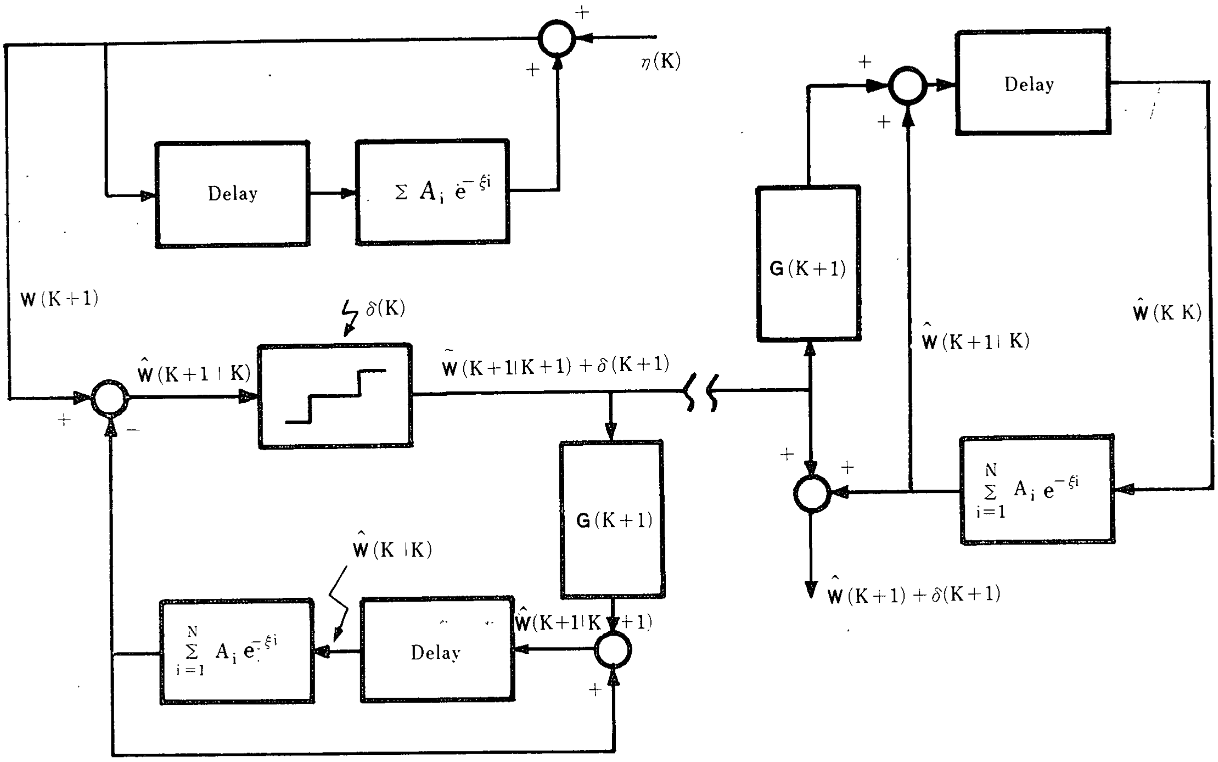

Fig. 6. Predictive Quantizing System via the kalman filter

$$=\frac{1-\dfrac{1}{1+\mathbf{R}(1)}\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2}{1-\dfrac{1}{1+\mathbf{R}(1)}\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2+\mathbf{R}(2)} \tag{61}$$

(60)式において，$\mathbf{R}(1)$，$\mathbf{R}(2)$ が共に0の場合には，

$\mathbf{P}(2\mid 1)=\mathbf{P}(1\mid 0)=1-\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2$ となって，これは(35)式に一致する．また(58)，(61)式においては　$\mathbf{G}(2)=\mathbf{G}(1)=1$　となる．

さらに，$\mathbf{R}(1)$，$\mathbf{R}(2)$ が共に無限大の場合には，(58)，(61)式より $\mathbf{G}(2)=\mathbf{G}(1)=0$ となってこれは回路をしゃ断することを意味する．

前者の場合には量子化雑音の混入が全くないことを意味し，後者の場合には，観測値の中に，$\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)$ を生成するに役立つ情報が全く含まれないこと意味するので，この場合には観測の必要が全くなく，したがって上のことは容認できる．

以下のこの手続きはくり返されて，$\mathbf{G}(k+1)$ は求まる．

次に一段最適平滑[17),25),26)]について考察する．これは $\{\mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2),\ \cdots\cdots\mathbf{z}(k),\ \mathbf{z}(k+1)\}$ に基づいて $\mathbf{w}(k)$ を最適に推定する問題である．最適値は *S. Sherman*[27)] によって次の式で表わされる．

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(k\mid k+1)&=E\,[\mathbf{w}(k)\mid \mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2)\\&\qquad\cdots\cdots\mathbf{z}(k),\ \mathbf{z}(k+1)]\\&=E\,[\mathbf{w}(k)\mid \mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2)\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\mathbf{z}(k),\ \tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)]\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)&=\mathbf{z}(k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)\\&=\mathbf{w}(k+1)+\boldsymbol{\delta}(k+1)\\&\qquad-\hat{\mathbf{w}}(k+1\mid k)\\&=\tilde{\mathbf{w}}(k+1\mid k)+\boldsymbol{\delta}(k+1)\end{aligned} \tag{63}$$

さらに(62)式は次のように書きかえられる．

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(k\mid k+1)&=E\,[\mathbf{w}(k)\mid \mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2)\ \cdots\mathbf{z}(k)]\\&\quad+E\,[\mathbf{w}(k)\mid \tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)]\\&=\hat{\mathbf{w}}(k\mid k)+E\,[\mathbf{w}(k)\mid \tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)]\end{aligned} \tag{64}$$

(64)式右辺第2項において，$\mathbf{w}(k)$ は(32)式より，また $\tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)$ は *Kalman*[17)]によって，それぞれ平均値0のガウス過程であるので，

$$E\,[\mathbf{w}(k)\mid \tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)]=\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}}}{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}}}\cdot\tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k) \tag{65}$$

ただし

$$\mathbf{P}_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}}=E\,[\mathbf{w}(k)\,\tilde{\mathbf{z}}(k+1\mid k)]$$

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}=E\left[\tilde{\mathbf{z}}^{2}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right]$$

したがって，(64)式は

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\frac{\mathbf{P}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}}{\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}}\tilde{\mathbf{z}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k}) \tag{68}$$

次に $\mathbf{P}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}/\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}$ を求める．先ず(66)式に(63)式を代入して

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}&=E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\tilde{\mathbf{z}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right]\\&=E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\{\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\}\right]\\&=E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right]\\&\quad+E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\right]\end{aligned} \tag{69}$$

(69)式第2項は，(43)式の仮定を(21)式のように変形すれば **0** となる．次に(6)式より *Kalman*[14] の結果を用いて，

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}+1\mid \mathrm{k})=\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\boldsymbol{\eta}(\mathrm{k}) \tag{70}$$

したがって，(69)式は

$$\begin{aligned}P\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}&=E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\{\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\boldsymbol{\eta}(\mathrm{k})\}\right]\\&=\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]\\&\quad+E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\eta(\mathrm{k})\right]\end{aligned} \tag{71}$$

(71)の右辺第2項は(9)式の仮定より **0**，さらに

$E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]$ は，

$$\begin{aligned}&E\left[\mathbf{w}(\mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]\\&\quad=E\left[\{\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\}\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]\\&\quad=E\left[\tilde{\mathbf{w}}^{2}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]\\&\quad=\mathbf{P}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\end{aligned} \tag{72}$$

(72)式の誘導において

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]=0 \tag{73}$$

を用いた．よって(71)式は，

$$\mathbf{P}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}=\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})\mathbf{P}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}) \tag{74}$$

となる．

次に $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}$ を求めると，(67)式より

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}&=E\left[\tilde{\mathbf{z}}^{2}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right]\\&=E\left[\{\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\}^{2}\right]\\&=E\left[\tilde{\mathbf{w}}^{2}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k}\right]+E\left[\boldsymbol{\delta}^{2}(\mathrm{k}+1)\right]\\&=\mathbf{P}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\mathbf{R}(\mathrm{k}+1)\end{aligned} \tag{75}$$

ただし上式の誘導において

$$E\left[\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\right]=0 \tag{76}$$

を用いた．以上の議論により $\mathbf{R}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}/\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}$ は

$$\frac{\mathbf{P}\mathbf{w}\tilde{\mathbf{z}}}{\mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}}=\frac{\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})\mathbf{P}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})}{\mathbf{P}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\mathbf{R}(\mathrm{k}+1)}\triangleq\mathbf{M}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}-1) \tag{77}$$

したがって，一段最適平滑値 $\hat{\mathbf{w}}$ (k|k+1) は(68)式より

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)&=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\\&\quad+\mathbf{M}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)\left[\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right.\\&\quad\left.+\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\right]\end{aligned} \tag{78}$$

(78)式において，右辺第2項のカッコ内は(53)式と同じく，DPCM 系において，伝送路に送出される信号であることがわかる．よって一般最適平滑を行なった場合，受信側のみ図示すれば，DPCM 系は Fig. 7 のようになる．

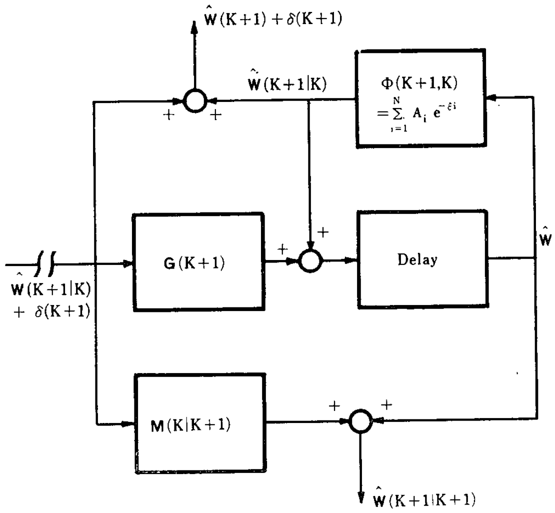

Fig. 7. Decoder for Predictive Quantizing System via the kalman filter and smoother

次に(77)，(78)式を異なった形で表わす．(47)式より

$$\frac{1}{\mathbf{P}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\mathbf{R}(\mathrm{k}+1)}=\frac{\mathbf{G}(\mathrm{k}+1)}{\mathbf{P}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})} \tag{79}$$

であるので，(77)式は

$$\mathbf{M}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)=\frac{\mathbf{P}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})\mathbf{G}(\mathrm{k}+1)}{\mathbf{P}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})} \tag{80}$$

$$\triangleq\mathbf{A}(\mathrm{k})\mathbf{G}(\mathrm{k}+1) \tag{81}$$

(81)式を(78)式に代入すれば

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)&=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\mathbf{A}(\mathrm{k})\mathbf{G}(\mathrm{k}+1)\\&\quad\times\left[\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})+\boldsymbol{\delta}(\mathrm{k}+1)\right]\end{aligned} \tag{82}$$

また(54)式より

$$\begin{aligned}&\mathbf{G}(\mathrm{k}+1)\left[\tilde{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+\mid \mathrm{k})+\delta(\mathrm{k}+1)\right]\\&\quad=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k}+1)-\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\end{aligned} \tag{83}$$

したがって(82)式は

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k}+1)&=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\mathbf{A}(\mathrm{k})\\&\quad\times\left[\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k}+1)-\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k})\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})\right]\\&=\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}\mid \mathrm{k})+\mathbf{A}(\mathrm{k})\left[\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k}+1)\right.\\&\quad\left.-\hat{\mathbf{w}}(\mathrm{k}+1\mid \mathrm{k})\right]\end{aligned} \tag{84}$$

ただし

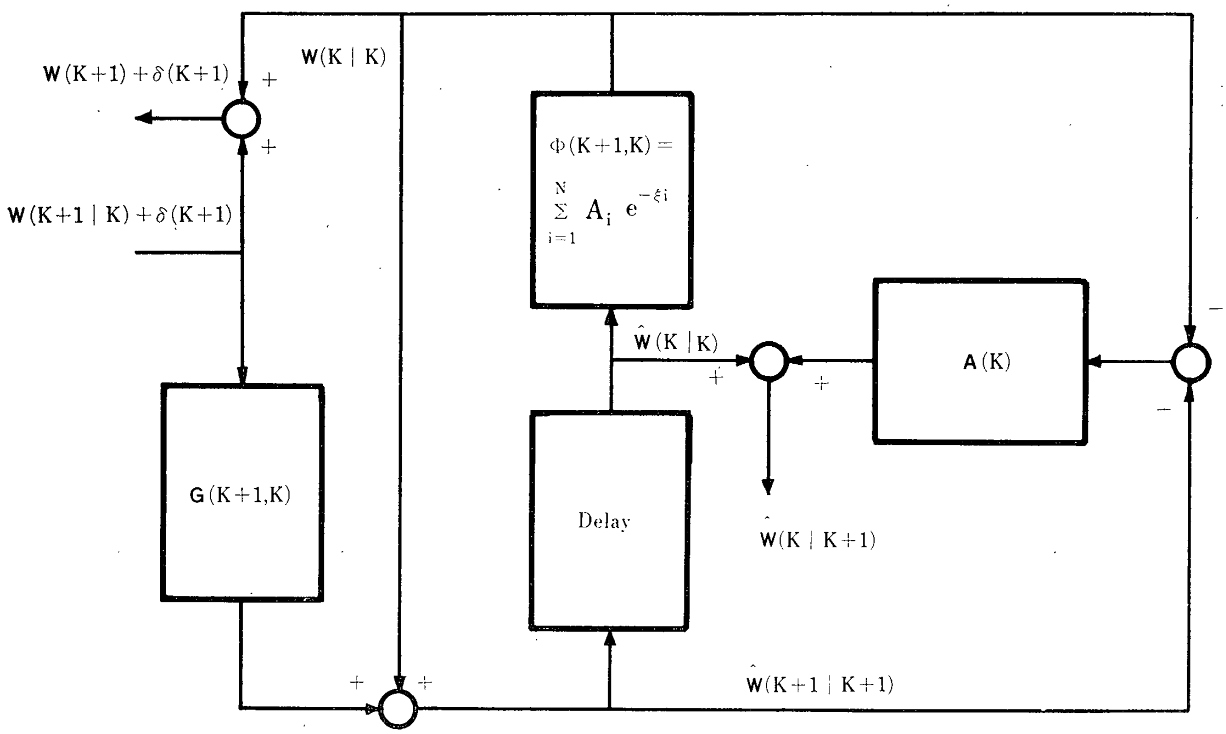

Fig. 8. Simplified version in computational aspect of Preclictive Quantizing System Decoder

$$A(k)=\frac{\mathbf{P}(k \mid k)\cdot\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)}{\mathbf{P}(k+1 \mid k)} \tag{85}$$

(84)式を Fig. 8 に示す.

ここで，(85)式より $\mathbf{A}(k)$ の計算を $\mathbf{G}(k+1)$ の場合と同様に(36)式のモデルに対して行なってみる.

先ず $k=0$ に対して，(57)を用いて

$$\mathbf{A}(0)=\frac{\mathbf{P}(0 \mid 0)\boldsymbol{\Phi}(1,\ 0)}{\mathbf{P}(1 \mid 0)}=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i} \tag{86}$$

$k=1$ に対して，(60)式を用いて

$$A(1)=\frac{\mathbf{P}(2 \mid 2)\cdot\boldsymbol{\Phi}(2\cdot 1)}{\mathbf{P}(2 \mid 1)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}}{1-\frac{1}{1+\mathbf{R}(1)}\left(\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-\xi i}\right)^2} \tag{87}$$

以下同様に計算を進め，$\mathbf{A}(k)(k=0,\ 1\cdots\cdots)$ を求めることができる.

次に推定誤差分散[17),25)] について考察する．すでに予測誤差分散は(48)式，濾波誤差分散は(49)式にて求められているので，平滑誤差分散を求める，平滑誤差 $\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k+1)$ は，(84)式を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k+1)&=\mathbf{w}(k)-\hat{\mathbf{w}}(k \mid k+1)\\&=\mathbf{w}(k)-\hat{\mathbf{w}}(k \mid k)-\mathbf{A}(k)\\&\quad\times[\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k)]\\&=\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k)-\mathbf{A}(k)[\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)-\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k)]\end{aligned} \tag{88}$$

または

$$\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k+1)+\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)=\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k)+\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k) \tag{89}$$

したがって

$$E[\{\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k+1)+\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)\}^2]=E[\{\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k)+\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k)\}^2] \tag{90}$$

ここで *Meditch*[17),28)] によって，$\hat{\mathbf{w}}(k \mid j)$ は $\{\mathbf{z}(1),\ \mathbf{z}(2)\cdots\cdots\mathbf{z}(j)\}$ の全ての線型結合に独立であるので，

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k+1)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)]=0 \tag{91}$$

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(k \mid k)\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k)]=0 \tag{92}$$

したがって，(90)式は

$$E[\tilde{\mathbf{w}}^2(k \mid k+1)]+\mathbf{A}^2(k)E[\hat{\mathbf{w}}^2(k+1 \mid k+1)]=E[\tilde{\mathbf{w}}^2(k \mid k)]+\mathbf{A}^2(k)E[\hat{\mathbf{w}}^2(k+1 \mid k)] \tag{93}$$

ここで

$$E[\hat{\mathbf{w}}^2(k+1 \mid k+1)]=E[\{\mathbf{w}(k+1)-\tilde{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1)\}^2]$$

$$=E\left[\mathbf{w}^2(k+1)\right]+E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k+1\mid k+1)\right] \tag{94}$$

同様に

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}^2(k+1\mid k)\right]=E\left[\mathbf{w}^2(k+1)\right]+E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k+1\mid k)\right] \tag{95}$$

よって，結局(93)式は

$$E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k\mid k+1)\right]+\mathbf{A}^2(k)E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k+1\mid k+1)\right]=E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k\mid k)\right]+\mathbf{A}^2(k)E\left[\tilde{\mathbf{w}}^2(k+1\mid k)\right] \tag{96}$$

すなわち

$$\mathbf{P}(k\mid k+1)=\mathbf{P}(k\mid k)+\mathbf{A}^2(k)\left[\mathbf{P}(k+1\mid k)-\mathbf{P}(k+1\mid k+1)\right] \tag{97}$$

ゲイン，$\mathbf{G}(k+1)$，$\mathbf{A}(k)$，および推定誤差分散 $\mathbf{P}(k+1\mid k+1)$，$\mathbf{P}(k+1\mid k)$，$\mathbf{P}(k\mid k+1)$ を求める流れ図をFig. 9に示す．さらに，(89)式のモデルについて，量子化雑音の分散 $\mathbf{R}(k+1)$ がkの値に関係なく，0.001，0.01，0.1，1.0，10.0，100.0とした時のゲイン $\mathbf{G}(k+1)$，$\mathbf{A}(k)$ および各推定誤差分散の計算結果を Tabel 1に示す．さらに，$\mathbf{R}(k+1)$ が0.001，0.01，0.1の場合の各推定誤差分散を図示すれば Fig. 9のようになる．

Table. 1. Table of Filter Gain and Estimation Error Covariance

$\mathbf{R}=0.001$

K	P(k+1 | k)	G(k+1)	A(k)	P(k+1 | k+1)	P(k | k+1)
00	+1.000000000E+00	+9.990009990E−01	+9.821600000E−01	+9.990010000E−04	+3.632540900E−02
01	+3.632367632E−02	+9.732073552E−01	+2.701210123E−02	+9.732073647E−04	+9.732074027E−04
02	+3.629879475E−02	+9.731894822E−01	+2.633270200E−02	+9.731894900E−04	+9.487121946E−04
03	+3.629877750E−02	+9.731894698E−01	+2.633223086E−02	+9.731894994E−04	+9.486952084E−04
04	+3.629877751E−02	+9.731894693E−01	+2.633223111E−02	+9.731894996E−04	+9.486952173E−04
05	+3.629877751E−02	+9.731894698E−01	+2.633223112E−02	+9.731894996E−04	+9.486952175E−04

$\mathbf{R}=0.01$

K	P(k+1 | k)	G(k+1)	A(k)	P(k+1 | k+1)	P(k | k+1)
00	+1.000000000E+00	+9.900990099E−01	+9.821600000E−01	+9.900991000E−03	+4.491261000E−02
01	+4.491089195E−02	+8.178867680E−01	+2.165255887E−01	+8.178867685E−03	+8.178871365E−03
02	+4.324966292E−02	+8.122053840E−01	+1.857345501E−01	+8.122053840E−03	+6.967059205E−03
03	+4.319485801E−02	+8 120119053E−01	+1.846783799E−01	+8.120119071E−03	+6.925791146E−03
04	+4.319299166E−02	+8.120053095E−01	+1.846423653E−01	+8.120053120E−03	+6.924384285E−03
05	+4.319292804E−02	+8.120050847E−01	+1.846411376E−01	+8.120050878E−03	+6.924336327E−03
06	+4.319292587E−02	+8.120050770E−01	+1.846410959E−01	+8.120050773E−03	+6.924334696E−03
07	+4.319292577E−02	+8.120050767E−01	+1.846410939E−01	+8.120050797E−03	+6.924334621E−03
08	+4.319292580E−02	+8.120050768E−01	+1.846410943E−01	+8.120050803E−03	+6.924334639E−03
09	+4.319292580E−02	+8.120050768E−01	+1.846410945E−01	+8.120050803E−03	+9.924334643E−03
10	+4.319292580E−02	+8.120050768E−01	+1.846410945E−01	+8.120050303E−03	+6.924334643E−03

$\mathbf{R}=0.1$

K	P(k+1 | k)	G(k+1)	A(k)	P(k+1 | k+1)	P(k | k+1)
00	+1.000000000E+00	+9.090909090E−01	+9.821600000E−01	+9.090909100E−02	+1.230561230E−01
01	+1.230545455E−01	+5.516791653E−01	+7.255910169E−01	+5.516791658E−02	+5.516798081E−02
02	+8.857717904E−02	+4.697131408E−01	+6.117119728E−01	+4.697131414E−02	+3.959935402E−02
03	+8.067040847E−02	+4.465059285E−01	+5.718744551E−01	+4.465059287E−02	+3.519137952E−02
04	+7.843174790E−02	+4.395616185E−01	+5.591361593E−01	+4.395616189E−02	+3.387237856E−02
05	+7.776187200E−02	+4.374496686E−01	+5.551819014E−01	+4.374496691E−02	+3.347123521E−02
06	+7.755814488E−02	+4.368042083E−01	+5.539657603E−01	+4.368042083E−02	+3.334863656E−02
07	+7.749588114E−02	+4.366066449E−01	+5.535928037E−01	+4.366066455E−02	+3.331111144E−02
08	+7.747682345E−02	+4.365461470E−01	+5.534785291E−01	+4.365461469E−02	+3.329962046E−02
09	+7.747098751E−02	+4.365276184E−01	+5.534435243E−01	+4.365276186E−02	+3.329610116E−02
10	+7.746920020E−02	+4.365219435E−01	+5.534328025E−01	+4.365219440E−02	+3.329502330E−02
11	+7.746865280E−02	+4.365202055E−01	+5.534295189E−01	+4.365202059E−02	+3.329469317E−02
12	+7.746848514E−02	+4.365196733E−01	+5.534285130E−01	+4.365196733E−02	+3.329459205E−02
13	+7.746843376E−02	+4.365195102E−01	+5.534282048E−01	+4.365195101E−02	+3.329456106E−02
14	+7.746841802E−02	+4.365194601E−01	+5.534281103E−01	+4.365194601E−02	+3.329455157E−02

15	+7.746841319E−02	+4.365194449E−01	+5.534280815E−01	+4.365194453E−02	+3.329454867E−02
16	+7.746841177E−02	+4.365194404E−01	+5.534280728E−01	+4.365194404E−02	+3.329454780E−02
17	+7.746841129E−02	+4.365194339E−01	+5.534280700E−01	+4.365194393E−02	+3.329454753E−02
18	+7.746841119E−02	+4.365194386E−01	+5.534280694E−01	+4.365194387E−02	+3.329454746E−02
19	+7.746841113E−02	+4.365194383E−01	+5.534280691E−01	+4.365194384E−02	+3.329454742E−02
20	+7.746841110E−02	+4.365194381E−01	+5.534280689E−01	+4.365194382E−02	+3.329454740E−20
21	+7.746841108E−02	+4.365194382E−01	+5.534280688E−01	+4.365194381E−02	+3.329454738E−02
22	+7.746841107E−02	+4.365194382E−01	+5.534280687E−01	+4.365194380E−02	+3.329454738E−02
23	+7.746841106E−02	+4.365194381E−01	+5.534280687E−01	+4.365194380E−02	+3.329454737E−02
24	+7.746841106E−02	+4.365194381E−01	+5.534280687E−01	+4.365194380E−02	+3.329454737E−02
25	+7.746841106E−02	+4.365194381E−01	+5.534280687E−01	+4.365194380E−02	+3.329454737E−02

R= 1.0

00	+1.000000000E+00	+5.000000000E−01	+9.821600000E−01	+5.000000000E−01	+5.176808680E−01
01	+5.176800000E−01	+3.410995730E−01	+9.486169061E−01	+3.410995730E−01	+3.410998588E−01
02	+3.643982920E−01	+2.670761859E−01	+9.193631363E−01	+2.670761863E−01	+2.583401482E−01
03	+2.929923723E−01	+2.266002326E−01	+8.952845599E−01	+2.266002327E−01	+2.138605997E−01
04	+2.539476484E−01	+2.025185411E−01	+8.763919382E−01	+2.025185411E−01	+1.870994426E−01
05	+2.307174854E−01	+1.874658385E−01	+8.621176238E−01	+1.874658386E−01	+1.703718932E−01
06	+2.161970465E−01	+1.777643179E−01	+8.516372031E−01	+1.777648180E−01	+1.595914842E−01
07	+2.068390540E−01	+1.713890956E−01	+8.441031334E−01	+1.713890957E−01	+1.525063647E−01
08	+2.006887772E−01	+1.671447098E−01	+8.387689463E−01	+1.671447099E−01	+1.477897259E−01
09	+1.965944729E−01	+1.642949867E−01	+8.350328764E−01	+1.642949867E−01	+1.446229273E−01
10	+1.938455159E−01	+1.623706865E−01	+8.324358876E−01	+1.623706865E−01	+1.424845192E−01
11	+1.919892590E−01	+1.610662659E−01	+3.306401838E−01	+1.610662661E−01	+1.410349620E−01
12	+1.907309629E−01	+1.601797290E−01	+8.294030580E−01	+1.601797289E−01	+1.400497841E−01
13	+1.898757736E−01	+1.595761321E−01	+8.285528981E−01	+1.595761320E−01	+1.393790279E−01
14	+1.892935199E−01	+1.591646779E−01	+8.279696731E−01	+1.591646779E−01	+1.389217931E−01
15	+1.888966148E−01	+1.588839707E−01	+8.275700449E−01	+1.588839707E−01	+1.386098530E−01
16	+1.886258334E−01	+1.586923556E−01	+8.272964407E−01	+1.586923556E−01	+1.383969178E−01
17	+1.884409939E−01	+1.585615062E−01	+8.271092222E−01	+1.585615061E−01	+1.382515092E−01
18	+1.883147712E−01	+1.584721285E−01	+8.269811646E−01	+1.584721286E−01	+1.381521871E−01
19	+1.882285541E−01	+1.584110678E−01	+8.268935950E−01	+1.584110680E−01	+1.380843326E−01
20	+1.881696526E−01	+1.583693475E−01	+8.268337234E−01	+1.583693475E−01	+1.380379701E−01
21	+1.881294073E−01	+1.583408391E−01	+8.267927940E−01	+1.583408391E−01	+1.380062897E−01
22	+1.881019070E−01	+1.583213576E−01	+8.267648158E−01	+1.583213578E−01	+1.379846407E−01
23	+1.880831145E−01	+1.583080445E−01	+8.267456922E−01	+1.583080445E−01	+1.379698462E−01
24	+1.880702720E−01	+1.582989461E−01	+8.267326209E−01	+1.582989461E−01	+1.379597355E−01
25	+1.880614953E−01	+1.582927281E−01	+8.267236876E−01	+1.582927281E−01	+1.379528256E−01
26	+1.880554972E−01	+1.582834786E−01	+8.267175813E−01	+1.582884787E−01	+1.379481034E−01
27	+1.880513980E−01	+1.582855744E−01	+8.267134084E−01	+1.582855745E−01	+1.379448761E−01
28	+1.880485965E−01	+1.582835896E−01	+8.267105561E−01	+1.582835897E−01	+1.379426704E−01
29	+1.880466819E−01	+1.582822332E−01	+8.267086067E−01	+1.582822331E−01	+1.379411629E−01
30	+1.880453733E−01	+1.582813060E−01	+8.267072742E−01	+1.582813060E−01	+1.379401326E−01
31	+1.880444790E−01	+1.582806724E−01	+8.267063639E−01	+1.582806724E−01	+1.379394285E−01
32	+1.880438678E−01	+1.582802394E−01	+8.267057416E−01	+1.582802394E−01	+1.379389473E−01
33	+1.880434501E−01	+1.582799434E−01	+8.267053163E−01	+1.582799435E−01	+1.379386185E−01
34	+1.880431646E−01	+1.582797412E−01	+8.267050261E−01	+1.582797412E−01	+1.379383937E−01
35	+1.880429695E−01	+1.582796030E−01	+8.267048271E−01	+1.582796029E−01	+1.379382401E−01

R=10.0

00	+1.000000000E+00	+9.090909090E−02	+9.821600000E−01	+9.090909100E−01	+9.123056140E−01
01	+9.123054554E−01	+8.360336498E−02	+9.786993191E−01	+8.360336503E−01	+8.360337817E−01
02	+8.418315004E−01	+7.764661352E−02	+9.753956813E−01	+7.764661356E−01	+7.738452557E−01
03	+7.843702930E−01	+7.273213659E−02	+9.722627010E−01	+7.273213661E−01	+7.225380840E−01

04	+7.369632825E−01	+6.863796245E−02	+9.693100997E−01	+6.863796247E−01	+6.797948800E−01
05	+6.974692411E−01	+6.519946217E−02	+9.665438593E−01	+6.519946218E−01	+6.438969156E−01
06	+6.643000919E−01	+6.229195411E−02	+9.639665047E−01	+6.229195411E−01	+6.135425138E−01
07	+6.362531061E−01	+5.981928975E−02	+9.615774768E−01	+5.981928976E−01	+5.877278832E−01
08	+6.124007967E−01	+5.770615045E−02	+9.593735662E−01	+5.770615044E−01	+5.656666964E−01
09	+5.920166096E−01	+5.589271920E−02	+9.573493680E−01	+5.589271915E−01	+5.467344634E−01
10	+5.745235260E−01	+5.433091381E−02	+9.554977395E−01	+5.433091382E−01	+5.304292068E−01
11	+5.594577270E−01	+5.298167214E−02	+9.538102297E−01	+5.298167212E−01	+5.163431160E−01
12	+5.464424019E−01	+5.181296034E−02	+9.522774751E−01	+5.181296035E−01	+5.041417586E−01
13	+5.351685407E−01	+5.079828943E−02	+9.508895471E−01	+5.079828945E−01	+4.935485888E−01
14	+5.253806193E−01	+4.991559343E−02	+9.496362470E−01	+4.991559341E−01	+4.843332374E−01
15	+5.168657802E−01	+4.914637031E−02	+9.485073513E−01	+4.914637033E−01	+4.763025443E−01
16	+5.094455467E−01	+4.847501657E−02	+9.474928064E−01	+4.847501656E−01	+4.692936073E−01
17	+5.029693997E−01	+4.788830482E−02	+9.465828793E−01	+4.788830481E−01	+4.631683334E−01
18	+4.973097435E−01	+4.737497090E−02	+9.457682674E−01	+4.737497093E−01	+4.578091249E−01
19	+4.923579195E−01	+4.692538357E−02	+9.450401749E−01	+4.692538355E−01	+4.531154304E−01
20	+4.880210198E−01	+4.653127785E−02	+9.443903608E−01	+4.653127785E−01	+4.490009648E−01
21	+4.842193186E−01	+4.618553888E−02	+9.438111635E−01	+4.618553888E−01	+4.453914481E−01
22	+4.808841822E−01	+4.588202425E−02	+9.432955072E−01	+4.588202426E−01	+4.422227539E−01
23	+4.779563588E−01	+4.561541801E−02	+9.428368952E−01	+4.561541797E−01	+4.394393828E−01
24	+4.753845679E−01	+4.538110893E−02	+9.424293915E−01	+4.538110894E−01	+4.369931952E−01
25	+4.731243292E−01	+4.517508956E−02	+9.420675951E−01	+4.517508955E−01	+4.348423518E−01
26	+4.711369838E−01	+4.499387074E−02	+9.417466145E−01	+4.499387075E−01	+4.329504265E−01
27	+4.693888748E−01	+4.483441016E−02	+9.414620256E−01	+4.483441015E−01	+4.312856570E−01
28	+4.678506540E−01	+4.469405130E−02	+9.412098474E−01	+4.469405130E−01	+4.298203100E−01
29	+4.664966964E−01	+4.457047187E−02	+9.409865012E−01	+4.457047189E−01	+4.285301402E−01
30	+4.653046000E−01	+4.446163946E−02	+9.407887794E−01	+4.446163948E−01	+4.273939293E−01
31	+4.642547590E−01	+4.436577377E−02	+9.406138113E−01	+4.436577377E−01	+4.263930908E−01
32	+4.633300000E−01	+4.428131388E−02	+9.404590326E−01	+4 428131392E−01	+4.255113296E−01
33	+4.625152665E−01	+4.420689050E−02	+9.403221562E−01	+4.420689049E−01	+4.247343486E−01
34	+4.617973434E−01	+4.414130128E−02	+9.402011447E−01	+4.414130126E−01	+4.240495966E−01
35	+4.611646434E−01	+4.408349015E−02	+9.400941852E−01	+4.408349012E−01	+4.234460481E−01

R=100.0

00	+1.000000000E−00	+9.900990099E−03	+9.821600000E−01	+9.900990100E−01	+9.904491270E−01
01	+9.904491090E−01	+9.807354238E−03	+9.818128309E−01	+9.807354239E−01	+9.807354408E−01
02	+9.814166193E−01	+9.718784429E−03	+9.814782885E−01	+9.718784431E−01	+9.715473023E−01
03	+9.728728213E−01	+9.634991996E−03	+9.811561292E−01	+9.634992004E−01	+9.628547644E−01
04	+9.647898686E−01	+9.555706207E−03	+9.808460944E−01	+9.555706202E−01	+9.546297390E−01
05	+9.571416430E−01	+9.480672965E−03	+9.805479128E−01	+9.480672970E−01	+9.468458706E−01
06	+9.499036373E−01	+9.409653733E−03	+9.802613021E−01	+9.409653736E−01	+9.394784102E−01
07	+9.430528379E−01	+9.342424384E−03	+9.799859712E−01	+9.342424384E−01	+9.325041082E−01
08	+9.365676257E−01	+9.278774263E−03	+9.797216218E−01	+9.278774263E−01	+9.259011118E−01
09	+9.304276805E−01	+9.218505287E−03	+9.794679501E−01	+9.218505282E−01	+9.196488713E−01
10	+9.246138935E−01	+9.161431078E−03	+9.792246483E−01	+9.161431071E−01	+9.137280529E−01
11	+9.191082868E−01	+9.107376226E−03	+9.789914060E−01	+9.107376220E−01	+9.081204597E−01
12	+9.138939396E−01	+9.007673503E−03	+9.787679117E−01	+9.056175561E−01	+9.028089574E−01
13	+9.089549193E−01	+9.007673503E−03	+9.785538533E−01	+9.007673506E−01	+8.977774053E−01
14	+9.042762170E−01	+8.961723437E−03	+9.783489207E−01	+8.961723440E−01	+8.930105940E−01
15	+8.998436899E−01	+8.918187162E−03	+9.781528049E−01	+8.961723440E−01	+8.884941858E−01
16	+8.956440058E−01	+8.876934328E−03	+9.779652004E−01	+8.876934330E−01	+8.842146611E−01
17	+8.916645932E−01	+8.837842032E−03	+9.777858050E−01	+8.837842024E−01	+8.801592666E−01
18	+8.878935930E−01	+8.800794249E−03	+9.776143211E−01	+8.800794243E−01	+8.763159689E−01
19	+8.843193158E−01	+8.765681500E−03	+9.774504561E−01	+8.765681503F−01	+8.726734103E−01
20	+8.809327005E−01	+5.732400434E−03	+9.772939225E−01	+8.732400437E−01	+8.692208676E−01

21	+8.777222757E−01	+8.700853434E−01	+9.771444396E−01	+8.700853432E−01	+8.659482146E−01
22	+8.746791254E−01	+8.670948281E−03	+9.770017321E−01	+8.670948281E−01	+8.628458859E−01
23	+8.717943549E−01	+8.642597873E−03	+9.768655320E−01	+8.642597876E−01	+8.599048447E−01
24	+8.690595615E−01	+8.615719882E−03	+9.767355777E−01	+8.615719885E−01	+8.571165502E−01
25	+8.664668029E−01	+8.590236481E−03	+9.766116155E−01	+8.590236485E−01	+8.544729293E−01
26	+8.640085722E−01	+8.566074113E−03	+9.764933980E−01	+8.566074108E−01	+8.519663499E−01
27	+8.616777727E−01	+8.543163194E−03	+9.763806856E−01	+8.543163190E−01	+8.495895954E−01
28	+8.594676939E−01	+8.521437940E−03	+9.762732465E−01	+8.521437940E−01	+8.473358408E−01
29	+8.573719894E−01	+8.500836113E−03	+9.761708558E−01	+8.500836107E−01	+8.451986285E−01
30	+8.553846542E−01	+8.481298818E−03	+9.760732962E−01	+8.481298820E−01	+8.431718509E−01
31	+8.535000093E−01	+8.462770348E−03	+9.759803583E−01	+8.462770350E−01	+8.412497270E−01
32	+8.517126790E−01	+8.445197974E−03	+9.758918389E−01	+8.445197976E−01	+8.394267874E−01
33	+8.500175775E−01	+8.428531779E−03	+9.758075436E−01	+8.428531779E−01	+8.376978538E−01
34	+8.484098895E−01	+8.412724515E−03	+9.757272839E−01	+8.412724512E−01	+8.360580246E−01
35	+8.468850573E−01	+8.397731445E−03	+9.756508790E−01	+8.397731444E−01	+8.345026595E−01

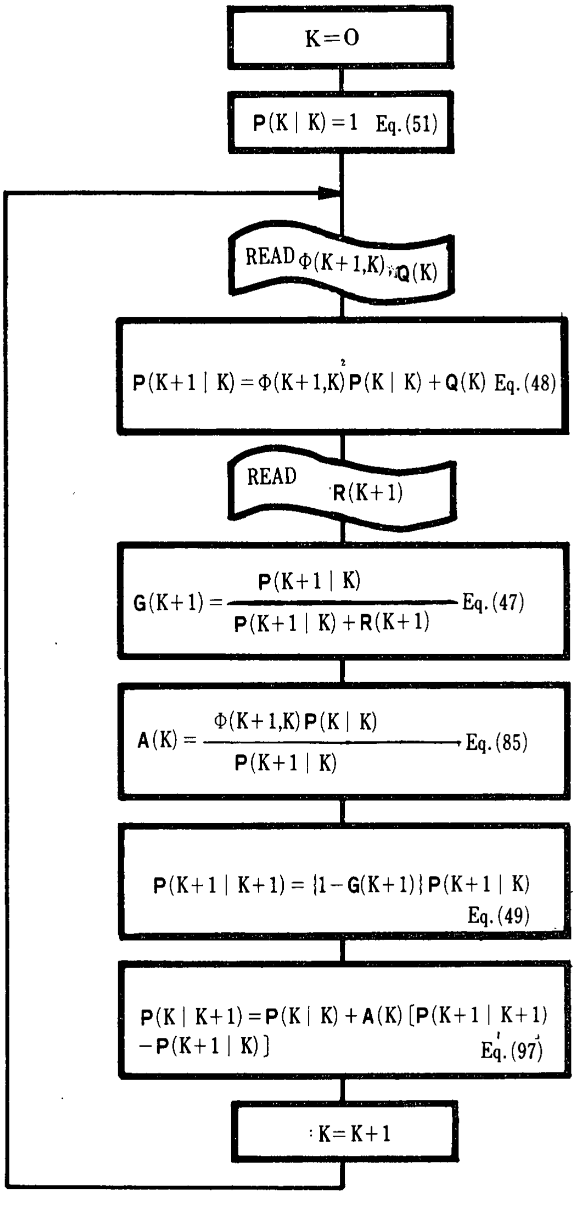

Fig.9. Flow-chart of Computation

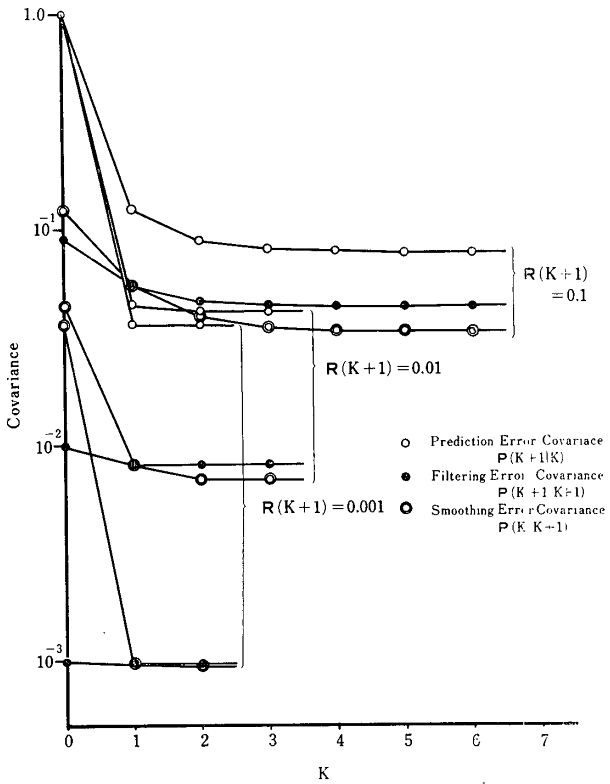

Fig.10. Results of Recursive Computation of kalman Filter

Tabel. 1 および Fig. 9 より，R(k+1) が 0.001 の場合には k=2 で定常になり，0.01 の場合には k=7 で定常となる．定常状態に達するステップ数は R(k+1) が大なるにしたがって多くなり，R(k+1) が 1.0以上になると（すなわち，入力信号電力より，量子化雑音電力の方が大なる場合であり，このような状況はあまり実際的ではないが）35段目ではまだ定常に達しない．

次にフィルターゲイン G(k+1) について考察すれ

ば，量子化雑音分散が，0.001 の場合には，定常時における$G(k+1)$ の値は，約0.93であり，観測を行なうことが推定を実行するに十分役立つことを示しているが，$R(k+1)$ が大なるにしたがって，雑音の含まれる割合が多くなるので，観測の有用性が次第に低下し，$R(k+1)=100.0$の場合には，$G(k+1)$ の値は $k=35$ で約0.0084となって観測情報が推定を実行するに役立たないこと示している．

また $A(k)$ についてみると，この値は $R(k+1)$ が大なるにつれ増加する．たとえば $R(k+1)$ が非常に小さいときは(47)式より $G(k+1)\fallingdotseq 1$ であるので，$R(k+1 \mid k+1)\fallingdotseq 0$，したがって，k が大なる定常時においては(85)式の $A(k)$ は 0 となる．

つまり Fig. 8において

$$\hat{w}(k \mid k+1)\fallingdotseq \hat{w}(k \mid k) \qquad (98)$$

となりこのような状況においては，$\hat{w}(k+1 \mid k+1)-\hat{w}(k+1 \mid k)$ が $\hat{w}(k \mid k+1)$ の生成に役立たないことを意味している．

しかし $R(k+1)$ が非常に大なるときは，$G(k+1)\fallingdotseq 0$ となり(45)式において

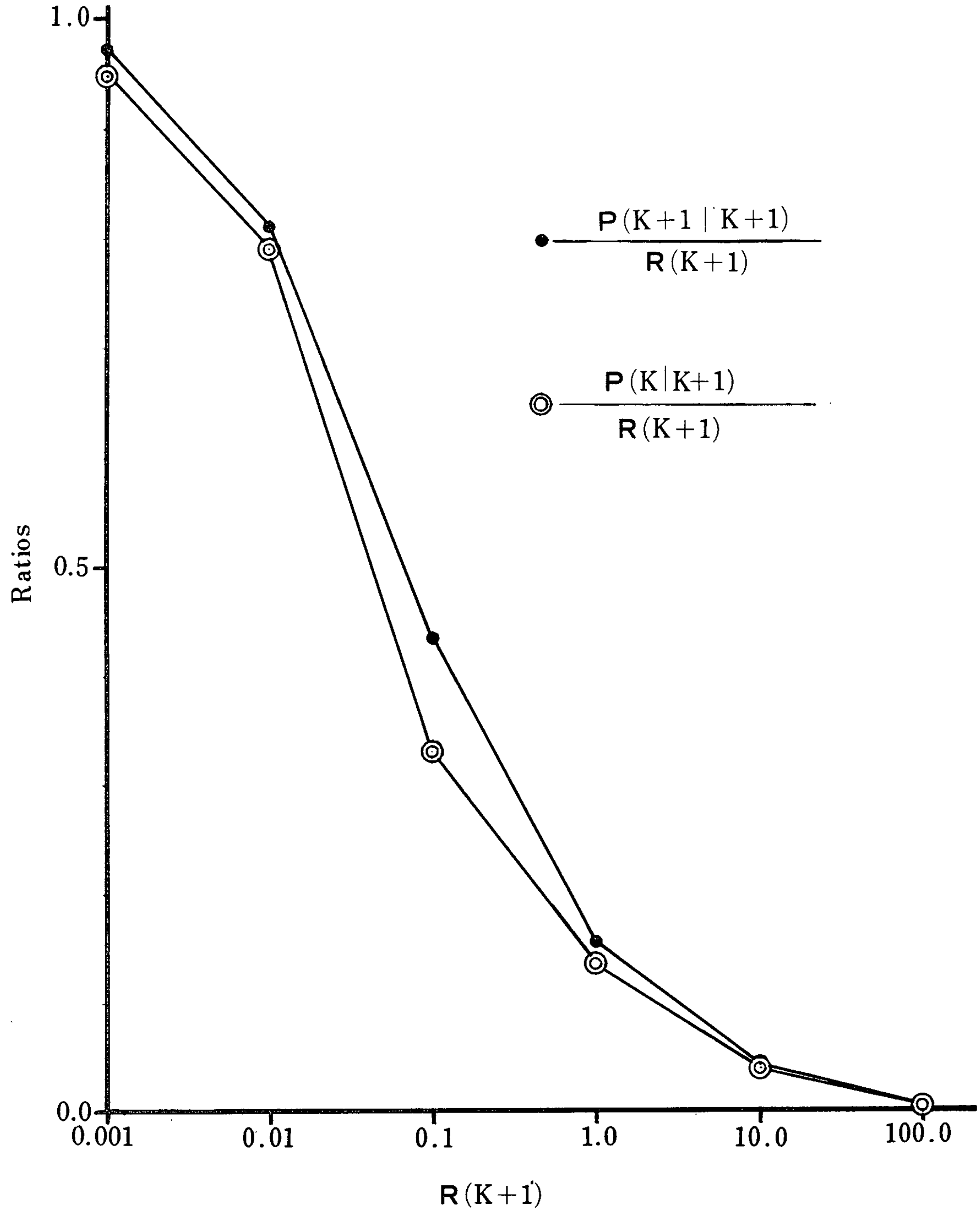

Fig. 11. Ratio of Filtering Smoothing Error Covariance Par Quantizing Noise $R(k+1)$

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k+1) \doteqdot \boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)\hat{\mathbf{w}}(k \mid k) = \hat{\mathbf{w}}(k+1 \mid k) \qquad (99)$$

となって，A(k) への入力が微小となるので，A(k) の値は大きくなる．

最後に各推定誤差分散について考察を行なう．

Fig. 8において，DPCM系本来の復調出力は，$\mathbf{w}(k+1)+\boldsymbol{\delta}(k+1)$ であるから，原信号に対しての誤差は $\boldsymbol{\delta}(k+1)$ のみであり，誤差分散は $\mathbf{R}(k+1)$ である．

したがって，復調出力をさらに濾波，または平滑した場合の優劣を比較するには，単に $\mathbf{R}(k+1)$ に対する $\mathbf{P}(k+1 \mid k+1)$，または $\mathbf{P}(k \mid k+1)$ の値の比較を行なえば良い．

定常時における各推定誤差分散に対する量子化雑音分散の比，すなわち $\mathbf{P}(k+1 \mid k+1)/\mathbf{R}(k+1)$，$\mathbf{P}(k \mid k+1)/\mathbf{R}(k+1)$ を Fig.11に示す．なお，$\mathbf{R}(k+1)=1.0$，10.0，100.0に対しては $k=35$ における値を用いた．

Table. 1，および Fig.11からわかるように，DPCM系復調出力をさらに濾波，または平滑する効果は，$\mathbf{R}(k+1)$ が非常に小さいときには，ほとんど意味をなさないが，$\mathbf{R}(k+1)$ が大なるにしたがって，非常に顕著となる．

また，濾波，または平滑を行なう効果は，$k=0$ においては，濾波の方が優れているが，他の場合はいずれの $\mathbf{R}(k+1)$ の値に対しても平滑出力の方が優れている．

しかし，平滑を採用するのは $\mathbf{R}(k+1)$ が0.1程度の場合に行なうべきで，$\mathbf{R}(k+1)$ が1.0以上になると，平滑を採用すれば，機器の構成が複雑になるだけで，濾波に対する，それほどの優位性は認められないので，この場合にはむしろ濾波出力を用いるべきである．

4. むすび

本文における考察の結論として

(1) テレビジョン信号の平均値，および自己相関関数が与えられれば，同じ第一次および第二次モーメントをもつ，ガウスーマルコフモデルを作ることができ，テレビジョン信号は，このモデルより生成される信号であるとみなすことができる．

(2) また，サンプリング周期として，*Nyquist* 間隔を採用した場合，$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)$ の値は隣接絵素間相関に一致し，モデルの入力である正規性白色雑音の分散は，信号の自己分散から隣接絵素間相関の自乗を引いたものになる．

(3) 例として，自己相関関数 $\phi(\tau)=\exp(-1.8\times10^{-1}|\tau|)$[22] をもつ，帯域幅5〔MHz〕の標準テレビジョン信号の場合には，$\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ k)$ は約0.98216，また入力雑音の分散は約 3.536×10^{-2} となる．

(4) 実際に(3)の例について局部復調器に *Kalman* フィルタを用いた予測量子化系の設計を電子計算機で実行した結果量子化雑音の分散が，0.001の場合には $k=2$ で定常になり，定常状態に達するステップ数は量子化雑音の分散が大なるにしたがって多くなり，この分散が1より大になれば，35ステップまで計算した結果では，まだ定常になっていない．

(5) フイルタゲインは量子化雑音の分散が0.001のとき，約0.93であり，この値は分散が大なるにしたがって小さくなり，観測することが予測値を発生させるに役立たなくなることを示している．

(6) 次に，復調出力を濾波，および平滑する効果は，量子化雑音の分散が非常に小さいときは，この効果がほとんどなく，復調出力をそのまま取り出す方が有利である．しかし，分散が大なるにしたがって急激にその効果が現われる．特に分散が1より大なるとき著しい．

(7) また，濾波，平滑のいずれかを採用するについては量子化雑音分散が，1より小さいとき平滑の方がかなり効果があり，特に分散が0.1においては著しい．

しかし，分散が大なると平滑を行なうことによる量子化雑音低減効果は薄れ，むしろ平滑器の付加により機器の構成が複雑になるだけであるから，濾波されたものを出力とする方が有利である．

以上，例としては，主に定常なテレビジョン信号について行なったが，非定常な例も本文の議論が何の修正もなしに適用できる．

さらに，平滑については一段最適平滑 $\hat{\mathbf{w}}(k \mid k+1)$ についてのみ考察を行なったが，この理論はN段最適平滑 $\mathbf{w}(k \mid k+N)$ $(N>1)$ の場合に容易に拡張でき，現在数値計算を実行中であるので，その量子化雑音低減効果を報告する予定である．

また，本文においては，*J. A. Irwin. J. B. O'Neal Jr*[21]と同じく，量子化雑音と入力信号とは独立であると仮定したが，実際には，量子化雑音は量子化器入力と相関がある．つまり，DPCM系においては観測雑音は推定誤差系列と相関がある．

この点については現在検討中であり上の問題と併せて近い機会に報告する予定である.

最後に日頃御指導頂く山口大学工学部平田威彦助教授，および有益な御指示を頂く本校嶺勝敏助教授に深謝する.

参 考 文 献

1) 例えば，似鳥一彦：“△PCM の統計的解析” 信学誌，48，2，pp. 192 (昭40—2).
2) P. F. Panter, W. Dite : “Quantization Distortion in Pulse-Count Modulation with Non-Uniform Spacing of Lavels”, Proc. IRE, pp. 44 (1951—1).
3) J. B. O'Neal Jr. : “A Bound on Signal-to-Quantizing Noise Ratios for Digital Encoding Systems”, Proc. IEEE, 55, 3, pp.287 (1967—3)
4) J. B. O'Neal Jr. : “Predictive quantizing system (Differential Pulse Code Modulation) for the Transmission of Television Signals”, Bell Sys. Tech. Jour. pp. 689 (1966—5, 6).
5) N. Wiener : *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* the M. I. T. Press (1949)
6) N. Levinson : “A Heuristic Exposition of Wiener's Mathematical Theory of Prediction and Filtering”, Jour. Math. Phy. 25, 6, pp. 110, (1947—6).
7) A. Papoulis : *Probabilitv, Random Variables and, Stochastic Processes*, McGraw Hill, (1965).
8) H. W. Bode, C. E. Shannon : “A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory”, Proc. IRE, pp. 417 (1950—4).
9) S. Darlington : “Linear Least-Square Smoothing and Prediction with Applications”, Bell Sys. Tech. Jour. pp. 1222 (1958—9).
10) 藤本 勉：“一次元最適線型予測による画像信号の冗長度低減について”，宇部高専研報，9，p. 23 (昭44—8).
11) 藤本 勉：“テレビジョン信号の走査線間相関の周期性について”，宇部高専研報，11，p. 5 (昭45—8).
12) R. C. Booton : “An Optimization Theory for Time-Varying Linear Systems with Nonstationary Statistical Inputs”, Proc. IRE, pp. 977 (1952—4).
13) R. C. Davis : “On the Theory of Prediction of Nonstationary Stochastic Processes”, Jour. Appl. Phy. 23, 9, pp. 1047, (1952—9).
14) R. E. Kalman : “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”, Trans. ASME, Ser. D Jour. Basic Engrg., 83, pp. 95 (1960—3).
15) R. E. Kalman, R. S. Bucy : “New Results in Linear Filtering and Prediction Theory”, Trans. ASME, Ser. D, Jour. Basic Engrg., 83, pp. 95 (1961—5).
16) R. E. Kalman : “New Methods and Results in Linear Filtering Theory” RIAS Tech. Rpt. (1961—1).
17) J. S. Meditch : *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control* McGraw Hill (1969).
18) P. B. Liebelt : *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison Wiely (1967).
19) R. C. K. Lee : *Optimal Estimation, Identification and Control*, the M. I. T. Press (1964).
20) J. C. Martin : “A Simple Development of the Wiener-Hopf Equations and the Derived Kalman Filter”, IEEE Trans. Aero. Elect. Sys AES-5, 6, pp. 980 (1969—11).
21) J. D. Irwin, J. B. O'Neal Jr. : “The Design of Optimum DPCM (Differential Pulse Code Modulation) Encoding Systems Via the Kalman Predictor”, Preprints Papers Joint Auto. Cont. Conf. p. 130 (1968).
22) A. R. Billings, K. E. Forward : “Video-Correlator Using Thin Hilm Hall Multipliers” Proc. Inst. Elect. Engrs., 112, 4, pp. 689 (1965—4)
23) 桐原昭雄，藤本 勉：“画像信号の統計的性質について” 山口大学工学部研報，20，1，p. 99，(昭44—9).
24) 辻 節三：最適制御概論”，養賢堂 (昭42).
25) H. E. Rauch : “Solutions to the Linear Smoothing Problems”, IEEE trans. Auto. Cont., AC-8, pp. 371 (1963—10).

26) J. S. Meditch : "On Optimal Linear Smoothing Theory", Inform. and Cont., **10**, pp. 598 (1967).

27) S. Sherman : "Non-Mean Square Error Criteria", IRE Trans. Inform. Th. IT-4, p. 125 (1958).

28) E. Parzen : *Stochastic Processes* Holden-Day (1962).

29) H. E. Rauch : "Linear Estimation of Sampled Stochastic Processes with Random Parameters", Tech. Rpt., Stanford Elect. Lab., No. 2108—1 (1962—4).

30) Y.C.Ho, R.C.K. Lee : "A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control", IEEE Trans. Auto. Cont. AC-9, 4, pp. 333 (1964—10).

31) H. Cox : On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic System", IEEE Trans. Auto. Cont. AC-9, 1, pp. 5 (1964—1).

(昭和45年4月4日受理)