正規分布でも、独立変数の値が大きくなると バラツキも大きくなるときは、ベキ法則で近似できる

松浦利治*

Normal Distribution, which the variance increases with increasing independent variable value, can be approximated to Power-law

Toshiharu MATSUURA

Abstract : Both Normal Distribution and Power-law are often observed in natural and social fields. Normal Distribution is symmetric but Power-law is asymmetric. But if the standard deviation of the Normal Distribution is proportional to the value of the independent variable or its power, the Normal Distribution can be approximated to Power-law. Normal Distribution, which the variance increases with increasing independent variable value, can be approximated to Power-law.

Key words : Power-law, Normal Distribution, approximation, variance, increasing

1．はじめに

正規分布やベキ(冪)法則 1)は、社会、自然いずれでも多く見られる現象である。正規分布は平均値の周りに対称的に分布するのに対し、ベキ法則は上には上があるというような一方に大きい広がりをもつゆがんだ分布であり、正規分布とベキ法則は相反する現象を表現していると考えられる。しかしここでは正規分布が、ある特別な場合にベキ法則になるのではないかとの仮説を立て、考察することにする。その特別な場合とは、正規分布のバラツキが一定ではなく、その値が独立変数とともに大きくなるような場合である。

(2004 年 11 月 18 日受理)

* 宇部工業高等専門学校経営情報学科

2．正規分布からのベキ(冪)法則の導出（標準偏差が独立変数に比例する場合）

平均μ、分散σ^2 の正規分布の確率密度関数

p(x)= exp(−((x − μ)/ σ)^2/2)/(σ *√(2* π))　(1)

において(ここで*は掛算を、^はベキ乗を表す)、独立変数 x が大きいところではバラツキが x に比例する場合を考える。そこでは標準偏差σが x に比例するものとする。即ち

σ =a*x　(2)

a は比例係数である。

(2)を(1)に代入すると

p(x)= exp(−((x − μ)/(a*x))^2/2)/(a*x*√(2* π))　(3)

指数部において

(x − μ)/(a*x)=(1/a)*(1 − μ/x)　(4)

は、x>0 で十分大きいところでは、μ/x≒0 となるので

(x − μ)/(a*x)≒1/a　(5)

(5)を(3)に代入すると、xが十分大きいところでは

p(x)≒exp(−(1/a)^2/2)/(a*x*√(2*π))

=(exp(−(1/a)^2/2)/(a*√(2*π)))/x

=K/x (6)

ただし K= exp(−(1/a)^2/2)/(a*√(2*π)) (7)

即ち(6)式はZipfの法則、ベキ法則を表している。

3．正規分布からのベキ法則の導出の一般化（標準偏差が独立変数のベキ乗に比例する場合）

平均μ、分散σ^2の正規分布の確率密度関数

p(x)= exp(−((x−μ)/σ)^2)/2)/(σ*√(2*π)) (A1)

において、独立変数xが大きいところではバラツキがxのベキ乗に比例する場合を考える。そこでは標準偏差σがx^nに比例するものとする。ただしn>1とする。即ち

σ=a*x^n (A2)

aは比例係数である。

(A2)を(A1)に代入すると

p(x)= exp(−((x−μ)/(a*x^n))^2/2)/(a*x^n *√(2*π))

(A3)

x>0で十分大きいところでは、指数部において

(x−μ)/(a*x^n)≒0 (A4)

(A4)を(A3)に代入すると、xが十分大きいところでは

p(x)≒exp(0)/(a*x^n*√(2*π))

=(1/(a*√(2*π)))/x^n

=K/x^n (A5)

ただし K=1/(a*√(2*π)) (A6)

即ち(A5)式はベキ法則を表している。

4．おわりに

正規分布において、その標準偏差が独立変数に比例する場合、ベキ法則で近似できることを示した。さらに一般化して、正規分布において、その標準偏差が独立変数のベキ乗に比例する場合、ベキ法則で近似できることを示した。

即ち、正規分布でも、独立変数の値が大きくなるとバラツキも大きくなるときは、ベキ法則で近似できることがわかった。

参考文献

1) 松浦利治：正規分布もベキ法則も同じ形の斉次1階線形微分方程式の解である、宇部工業高等専門学校研究報告第51号、pp.25-26、平成17年3月