正規分布もベキ法則も同じ形の斉次1階線形微分方程式の解である

松浦利治*

Both Normal Distribution and Power-law are the solutions of first order, homogeneous and linear differential equations of a same type with a different parameter value.

Toshiharu MATSUURA

Abstract : Both Normal Distribution and Power-law are often observed in natural and social fields. Normal Distribution is symmetric but Power-law is asymmetric. Unexpectedly both Normal Distribution and Power-law are the solutions of first order, homogeneous and linear differential equations of a same type with a different parameter value.

Key words : Power-law, Normal Distribution, Zipf, Pareto, linear differential equation

1. はじめに

正規分布やベキ(冪)法則は、社会、自然いずれでも多く見られる現象である。ベキ(冪)法則はZipf(ジップ)の法則やPareto(パレート)の法則を包含する。正規分布は平均値の周りに対称的に分布するのに対し、ベキ法則は上には上があるというような一方に大きい広がりをもつゆがんだ分布であり、正規分布とベキ法則は相反する現象を表現していると考えられる。ここではこれらが満たす微分方程式について考察する。

2. ベキ法則とは

(1) Zipfの法則 1)2)

英語の単語の出現頻度とその順位との積はすべての単語についてほぼ一定である。

広義には次のようなものがある。日本の都市を人口の順に並べると、人口と順位との積はどの都市についてもほぼ一定である。地震の大きさとその発生頻度との積はほぼ一定である。

(2) Paretoの法則 3)

一国において、ある所得水準以上の所得を有する人の人数は、その所得水準の負のベキ(冪)乗に比例する。

広義には次のようなものがある。８０－２０の法則：あるグループにおいて、成果の80%はその構成員の20%が生み出したものである。

そしてParetoの法則はZipfの法則を包含することが知られている。

(3) ベキ(冪)法則 4)

確率密度が独立変数の負のベキ乗に比例する分布をいう。即ち確率密度関数を p(x)とすると、p(x)～x^(－a)。

(2004年11月18日受理)

* 宇部工業高等専門学校経営情報学科

ただし a>=1。

ベキ法則は Pareto の法則を包含することが知られている。よってベキ法則は Zipf の法則もパレートの法則も包含する。

3．斉次1階線形微分方程式からの正規分布とベキ法則の導出

p(x)を確率密度関数とする。次の斉次1階線形微分方程式を考える。

dp(x)/dx+b*x^n*p(x)=0 (1)

ここで*は掛算、^はベキ乗を表し、b、n は定数とする。

(1)より dp(x)/p(x)=－b*x^n dx

∫(1/p(x)) dp(x)=－b*∫x^n dx+Const. (2)

ここで A= exp(Const.)として

n≠－1のとき log p(x)=－b*x^(n+1)/(n+1)+Const.

∴ p(x)=A*exp(－b*x^(n+1)/(n+1)) (3)

n=－1のとき log p(x)=－b*log x + log A

=log A*x^(－b)

∴ p(x)=A*x^(－b) (4)

ここで A は規格化の定数であるが、ここでは x>0 を考察の対象としているので

$$\int_0^{+\infty} p(x)dx=1 \quad (5)$$

を満たす定数である。

(3)において n=1 とすると

p(x)=A*exp(－b*x^2/2)

b=1 とすると、－∞<x<+∞における規格化の条件から A=1/√(2*π)となることが知られている。

∴ p(x)= exp(－x^2/2) /√(2*π) (6)

これは平均0、分散1^2 の正規分布の確率密度関数である。

(3)において n=0 とすると

p(x)=A*exp(－b*x) (7)

これは指数分布の確率密度関数である。

(4)は n=－1 のときで、ベキ法則の確率密度関数を表している。

まとめると、(1)において確率密度関数 p(x)は

n=1 のとき平均0、分散1^2の標準正規分布、

n=0 のとき指数分布、

n=－1 のときベキ法則、

を表す。

4．今後の課題

(1) 斉次1階線形微分方程式(1)の物理的意味。

(2) 方程式(1)のパラメタ b、n の物理的意味。

5．おわりに

正規分布もベキ法則も、同じ形でパラメタ値が異なる斉次1階線形微分方程式の解であることがわかった。

参考文献

1) 武者利光：ゆらぎの世界、pp.60-63、東京、講談社ブルーバックス、1980年

2) 寺本英、広田良吾、武者利光、山口昌哉：無限・カオス・ゆらぎ、pp.92-116、東京、培風館、1985年

3) 日立ディジタル平凡社：世界百科大事典（CD－ROM)、“パレート法則”の項目、東京、1998年

4) Lada A. Adamic : "Zipf, Power-laws, and Pareto － a ranking tutorial", http://www.hpl.hp.com/research/idl/papers/ranking/ranking.html