天秤使用による個数検査において一度に測定できる最大個数（第2報）

伏　谷　　　猛

The Maximum Number of the Light and Small Manufactured Goods, in the Inspection of Number Using the Balance.

Takeshi FUSHITANI

Abstract

The purpose of this paper is to study the maximum number N of the light and small manufactured goods, which we may weigh at a time in the inspection of number making use of the balance.

The following formula is obtained

$$N \leqq \frac{1}{8}\left\{(2n+1)^2\left(\frac{\theta}{K}\right)^2-4n-1\right\}$$

where $\theta=\mu/\sigma$, μ : the population mean, σ : the standard deviation of the population, K : the normal deviate cutting off β per cent in each tail, n : the upper limit of the error.

1. まえがき

前報[1]において計数誤差の出る確率を一定値以下に押さえる条件の下で，天秤を使って一度に計数できる部品数の最大値を求めた．しかし実際場面では数個以内の誤差は問題にならないことも多いし，計数に手間取るよりも能率向上がより一層望まれる．従って本報では計数誤差が n 個を越える場合の確率を一値以下にするというように条件をゆるくした場合を考察した．その結果は最大許容個数 N が相当大きくなり，十分実用性をもつことを確認した．

2. 仮定および定式化

前と同じく個々の部品の重さは正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定する．ただし部品の重さそのものは品質管理されていない場合が多いが，そのときは製品の各ロット毎に上の正規分布を考えるものとする．いま前もって正確に計数した N 個の部品を天秤の一方の皿（以後 S 側という）にのせ，他の方の皿（S'側）に何個かの部品をのせる．この個数は未知であるが M 個とする．そこで両方の重さがよくバランスした時，「$M=N$」として M の値を推定していくのである．

このとき $M-N=k$ ならば計数誤差は $|k|$ である．個数既知の N 個の部品の重さを $X_1, \cdots, X_N$, $S=X_1+\cdots+N_N$ 個数未知の M 個部品の重さを $Y_1, \cdots, Y_M$, $S'=Y_1+\cdots+Y_M$ とするとき $D(k)=S-S'$ は正規分布 $N(-k\mu, \,[2N+k]\,\sigma^2)$ に従う確率変数である．$D(k)$ は天秤の S 側への傾きを表わすので

(i) $D(k)>0$ のとき

天秤は S 側へ傾くので仮に部品1個（重さ Y_{M+1}）を S' 側へ追加してみると，重さの差は $D(k+1)=D(k)-Y_{M+1}$ となるので $D(k+1)\leqq -D(k)$ ならばバランスは更に悪くなるので1個追加するを中止する．

すなわち $2D(k)-Y_{M+1}\leqq 0$ (1) ならば $M=N$ という判断をして終る．このとき計数誤差は $|k|$ である．

一方　　$2D(k)-Y_{M+1}>0$ (2)

のときは S' へ1個追加し，$D(k+1)$ の正負により次の段階の (i) (ii) (iii) へ進む．

(ii) $D(k)<0$ のとき

S' 側から1個の部品（すなわち $Y_1, \cdots, Y_M$ の中のどれか）を取り除いてみる．（重さ Y_i）このとき重さの差は $D(k-1)=D(k)+Y_i$ となるので $D(k-1)\geqq$

＊ 宇部工業高等専門学校数学教室

$|D(k)|$ 従って $2D(k)+Y_i \geqq 0$ (3) ならば天秤のバランスはさらに悪化するので Y_i をを S へもどしてM=Nと判断する．このとき（i）と同じく計数誤差は $|k|$ である．

一方　$2D(k)+Y_i<0$ (4) ならば S' 側より1個を除き，$D(k-1)$ の正負により，次の躍階の (i) (ii) (iii) へ進む．

(iii) $D(k)=0$ ならば，S' 側の中の1側を他のものに替えてみて，(i) または (ii) の場合へ移る．

3. 計数誤差がnより大となる確率

2.の考察より，計数誤差 $|k|>n$ (n＝0，1，…) となるのは (2)において $k=n$, (4)において $k=-n$ の場合であるから

$$P\{|k|>n\}=P\{2D(n)-Y_{M+1}>0\}+P\{2D(-n)+Y_i<0\} \qquad (5)$$

である．

ところで

$$2D(k)-Y_{M+1}=2X_1+\cdots+2X_N-2Y_1-\cdots-2Y_M-Y_{M+1}$$

$$2D(k)+Y_i=2X_1+\cdots+2X_N-2Y_1-\cdots-2Y_{i-1}-Y_i-2Y_{i+1}-\cdots-2Y_M$$

はそれぞれ正規分布

$N(-[2k+1]\mu,\ [8N+4k+1]\sigma^2)$,

$N([-2k+1]\mu,\ [8N+4k-3]\sigma^2)$ に従うので

$k=n$, $k=-n$ のときは，

$2D(n)-Y_{M+1}$は

$N(-[2n+1]\mu,\ [8N+4n+1]\sigma^2)$

$2D(n)+Y_i$ は

$N([2n+1]\mu,\ [8N-4n-3]\sigma^2)$

に従う．これらを規格化すると

$$U=\frac{2D(n)-Y_{M+1}+(2n+1)\mu}{\sqrt{8N+4n+1}\,\sigma},$$

$$V=\frac{2D(n)+Y_i-(2n+1)\mu}{\sqrt{8N-4n-3}\,\sigma}$$

は標準正規分布 $N(0.1)$ に従う．

$$P\{|k|>n\}=P\{U>u_0\}+P\{V<-v_0\}=\{1-\Phi(u_0)\}+\{1-\Phi(v_0)\} \qquad (6)$$

ただし $\theta=\frac{\mu}{\sigma}$, $\Phi(u)$：累積標準正規分布関数,

$$u_0=\frac{(2n+1)\theta}{\sqrt{8N+4n+1}},\quad v_0=\frac{(2n+1)\theta}{\sqrt{8N-4n-3}}$$

(6)において，一般に（第一項）＞（第二項）であり，かつその差は微小であるので近似的には

$$P\{|k|>n\}\doteqdot 2\{1-\Phi(u_0)\} \qquad (7)$$

となり，しかも近似度は十分高い．（次表参照）

表1 $P\{|k|>n\}$ の値

($\theta=5$, $N=10$)

n	0	1	2	3
(6)より	.574	.102	.005	.000
(7)より	.578	104	.008	.000

4. 最大検査個数

ここで計数誤差 $|k|$ が n より大となる確率をある一定値 β 以下に押えて，しかも一度にできるだけ多くの個数を計数するために

$$P\{|k|>n\}\leqq\beta$$

を満たす条件のもとで N の最大値を求める．すなわち

(6)より $\{1-\Phi(u_0)\}+\{1-\Phi(v_0)\}\leqq\beta$　　(8)

(7)より近似的には

$$2\{1-\Phi(u_0)\}\leqq\beta \qquad (9)$$

まず(9)式より考察すると

$$\Phi(u_0)\geqq 1-\frac{\beta}{2}$$

従って　$u_0\geqq K$　　ただし $\Phi(K)=1-\frac{\beta}{2}$

これより

$$N\leqq\frac{1}{8}\left\{(2n+1)^2\left(\frac{\theta}{K}\right)^2-4n-1\right\} \qquad (10)$$

特に $n=0$ のとき $N\leqq\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\theta}{K}\right)^2-1\right\}$　　(11)

$n=1$ のとき $N\leqq\frac{1}{8}\left\{9\left(\frac{\theta}{K}\right)^2-5\right\}$　　(12)

つぎに(8)は θ, n を与えたとき試行錯誤的に N の最大値を求めていくほかないが，そのときにも(10)による近似値が目安になった．

特に $n=0$ のとき

$$\left\{1-\Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{8N+1}}\right)\right\}+\left\{1-\Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{8N-3}}\right)\right\}\leqq\beta \qquad (13)$$

$n=1$ のとき

$$\left\{1-\Phi\left(\frac{3\theta}{\sqrt{8N+5}}\right)\right\}+\left\{1-\Phi\left(\frac{3\theta}{\sqrt{8N-7}}\right)\right\}\leqq\beta \qquad (14)$$

5. 計　算　例

次表において，近似式(11)または(12)よりの計算値と(13)または(14)よりの値は小数点以下の違いが大部分であった．従って実際には(9)式による近似計算で十分間にあうといえる．（注．前報告の表では，一部計算において丸めの誤差が大きくはいったため不正確になったので，今回それも訂正しておきました．）

表2　最大検査個数

条件	$P(k\neq 0)\leqq\beta$			$P(\lvert k\rvert>1)\leqq\beta$		
θ	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$
5	0 0.3	0 0.6	1 1.0	4 3.6	7 6.7	10 9.7
10	2 1.7	3 3.1	4 4.4	17 16.3	29 28.9	42 40.9
15	4 4.1	7 7.2	10 10.3	38 37.5	65 65.3	93 92.9
20	7 7.4	13 12.9	18 18.3	67 67.2	116 116.5	167 165.6
25	12 11.6	20 20.2	29 28.7	105 105.3	182 182.4	259 259.1
30	17 16.8	29 29.2	41 41.4	152 151.9	266 266.3	374 373.5
40	30 30.0	52 51.9	74 73.7	270 270.6	468 467.9	665 664.5
50	47 47.1	81 81.2	115 115.3	423 423.2	732 731.5	1039 1038.7

（上段は　(13)(14)式より，　下段は　(11)(12)式よりの計算値）

6．むすび

以上によって明らかになったことは，$\lvert k\rvert>1$となる確率をβ以下にするというように検査の条件をゆるめると，許容検査個数は飛躍的に増えるので計数能率は大きくなり，しかもその時に誤りは1個以内に確率$1-\beta$で保証され実用性十分である．

参考文献

1）伏谷：宇部高専研究報告（第10号）（1970．1）．
2）正規分布表（コロナ社新数表シリーズ3）（昭和36年）．

（昭和45年3月3日受理）