たたみ込み積分の離散計算のイメージ

松浦利治*

The Diagram of Discrete Convolution Calculation

Toshiharu MATSUURA*

Abstract : The Diagram of Discrete Convolution Calculation is illustrated. The procedure of the Discrete Convolution Calculation seems to be very similar to that of multiplication calculation. Both procedures are composed of multiplication, summation and shift operations.

Key words : Convolution, Discrete Convolution Calculation, multiplication calculation, Diagram of Discrete Convolution Calculation

1．はじめに

自動制御等の分野で出てくる「たたみ込み積分」は何を計算しているのか、一見わかりにくいが、よくみると次のことがみえてくる。

（１）要素となる小さな積の和（重ね合わせ）である。これは線形の表現であると解釈できる。

（２）離散化してみると、その計算過程は要素の積、和、シフトとからなる。これは普通の筆算の掛算の手順と大差がないともみえる。

ここでは上記（２）に沿った考察をする。すなわちたたみ込み積分（相乗積分、合成積）の意味内容にはあまり深入りせず、その離散計算方法（カラクリ）について考察する。

2．たたみ込み計算のカラクリの図解の提案

たたみ込み計算のカラクリの図解を提案する。 t＜0で 0 である関数 f(t)、w(t)において、たたみ込み積分

$$h(t)=\int_{0}^{t} w(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

（自動制御の分野でのこの式の意味は、制御系の要素の出力応答の現在の値 h(t)は、現在より時間τ前の入力信号 f(t－τ)に w(τ)なる重みを掛けて現在時点まで積分したものとして表される 1)、ということである。）

を離散化し、

$$h[k] =\sum_{i=0}^{k} w[i]\, f[k-i]\varDelta\tau \qquad (2)$$

ただし k=0,1,2,⋯,n

とする。

ここで w(t)を系の重み関数と考え、離散化した各時点 i での値を w[i]とする。入力関数 f(t)が入力され、離散化した各時点 k での値を f[k]とする。結果として出力関数 h(t)の、離散化した各時点 k での値 h[k]が、以下に述べるカラクリによって逐次得られる。

この計算過程を図１に示す。ただし一定値の単位時間幅⊿τはΣw f の計算後掛けるものとし、ここでは直接の考察の対象としない。なおΣw[i] f[k－i] の計算をここでは離散たたみ込み計算ということにする。

3．離散たたみ込み計算の詳細

t＝n⊿τとし、以下便宜的に単位時間幅⊿τ＝１と考えるものとする。

――――――――――――――――――

（2002 年 12 月 4 日受理）

* 宇部工業高等専門学校経営情報学科

$$h[k] = \sum_{i=0}^{k} w[i]\, f[k-i],\ k=0,1,2,\cdots,n$$

、について考察する。

離散たたみ込み計算とは、次の計算を順次することであるとする。

k=0：　h[0] =w[0] f[0]

k=1：　h[1] =w[0] f[1]＋w[1] f[0]

k=2：　h[2] =w[0] f[2]＋w[1] f[1]＋w[2] f[0]

…

k=n：　h[n] =w[0] f[n]＋w[1] f[n－1]＋w[2] f[n－2]＋…＋w[n－1] f[1]＋w[n] f[0]　(3)

これらの計算の方法を示したものが図１である。工夫点は次の通りである。

（１）f [0],f[1], f[2],…,f[n]のデータを逆順に（入力順に）配列に入れる

（２）時刻 k が進むごとに上記配列を（時間の進む方向に）シフトしていく

この計算方法の利点は、時刻が進み、時刻 k での計算をするとその時刻 k での値が確定することである。すなわちさらに時刻が進んだ後からその値を修正することがない。例えば掛算の筆算で上位桁から計算していくと、下位の桁からの繰り上がりで上位桁の数値の修正が生じ得るが、この離散たたみ込み計算では、そのようなことはない。

４．考察―――離散たたみ込み計算と掛算の筆算との対比

離散たたみ込み計算と掛算の筆算ともに要素の積、和、シフトからなる。

「積と和とシフトからなる」という点だけを見れば、掛算の筆算も同様である。掛算の筆算の手順を図２に示す。

離散たたみ込み計算と掛算の筆算との対応関係を表１に示す。なおたたみ込み積分は、下記離散たたみ込み計算の結果に単位時間幅⊿ｔを掛けるものと考える。

表１．離散たたみ込み計算と掛算の筆算との対比

	離散たたみ込み計算	掛算筆算
積の要素	各時刻の関数値	１桁の数（九九の要素）
和	上記の要素積の和	上記の各要素積をシフトさせながら加算。 その各加算結果をシフトさせながら加算。
シフト	時刻の進行とともに決まる積和の範囲	掛ける数または掛けられる数をシフト

こうしてみると、離散たたみ込み計算は掛算筆算のある種の拡張とも考えられる。

５．今後の課題

（１）時系列解析での移動平均法の式は、(離散) たたみ込み積分の式に似ている。たたみ込み積分、時系列解析での移動平均法、さらには相関分析との関係の追究。

（２）ラプラス変換はたたみ込み積分を代数計算に簡単化する。確率の分野での積率母関数の式はラプラス変換の式に似ている。積率母関数とラプラス変換との関係の追究。

引用文献

1)　鈴木隆：自動制御理論演習、p.39、東京、学献社、1969 年 7 月

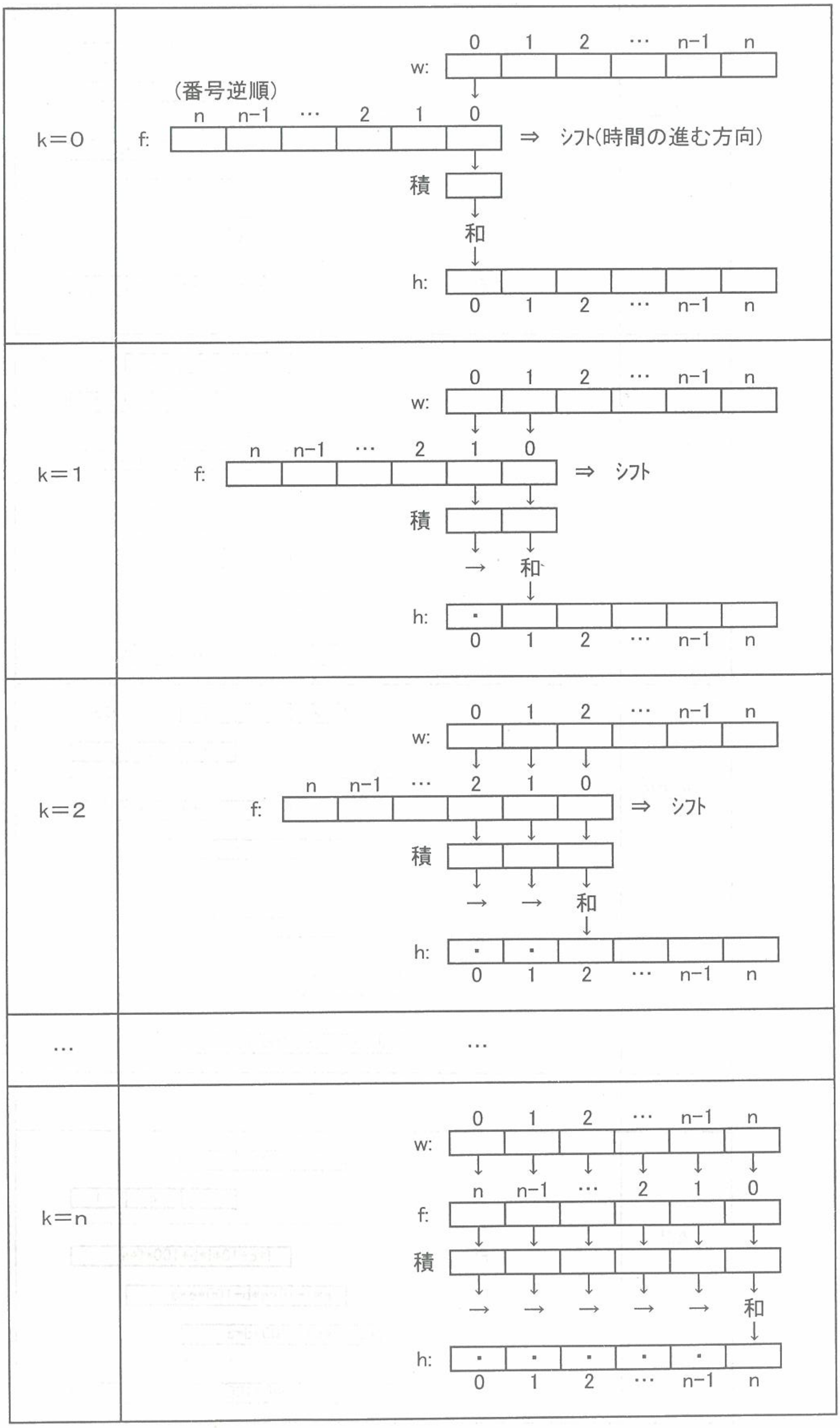

図1．　離散たたみ込み計算の手順

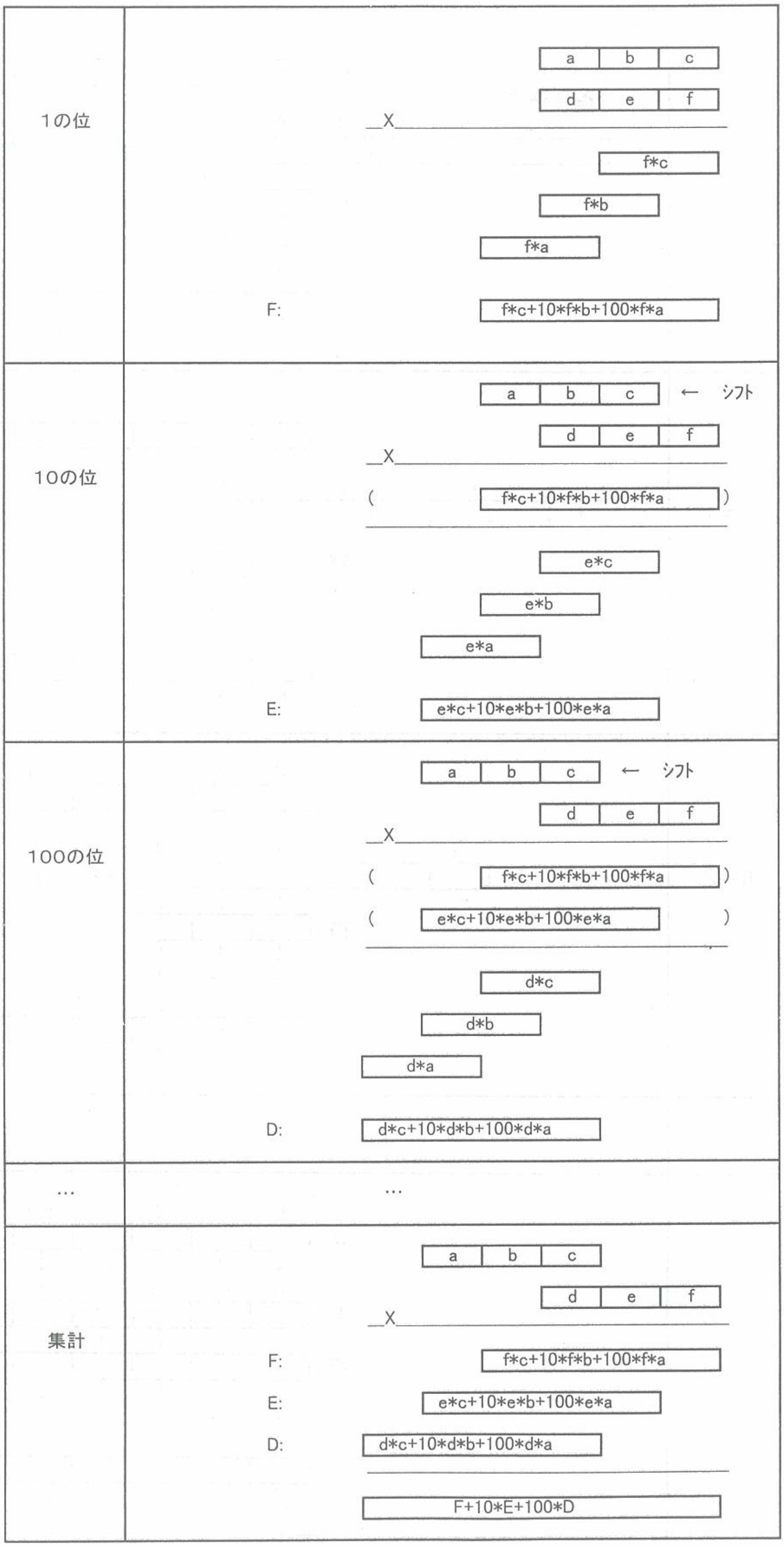
1の位
a b c
d e f
X
f*c
f*b
f*a
F:
f*c+10*f*b+100*f*a
10の位
a b c ← シフト
d e f
X
(f*c+10*f*b+100*f*a)
e*c
e*b
e*a
E:
e*c+10*e*b+100*e*a
100の位
a b c ← シフト
d e f
X
(f*c+10*f*b+100*f*a)
(e*c+10*e*b+100*e*a)
d*c
d*b
d*a
D:
d*c+10*d*b+100*d*a
…
…
集計
a b c
d e f
X
F:
f*c+10*f*b+100*f*a
E:
e*c+10*e*b+100*e*a
D:
d*c+10*d*b+100*d*a
F+10*E+100*D

図2.　掛算の筆算の手順