

t-e-A-injective module について

重永和男

Kazuo Shigenaga *

Abstract

Using a essentially-A-injectivity, Oshiro extended relative injective modules.

In this paper, we define the concept of a t-e-A-injective module which is, in a some sense, essentially-A-injective module from a torsion theoretic point of view. The following is our main theorem.

Theorem

The following statements are equivalent for a family of modules $\{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$.

- (1) $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ is t-e-A-injective.
- (2) $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ is t-e-A-injective for any countable subset I of Λ .
- (3) M_α is t-e-A-injective for any $\alpha \in \Lambda$, and for every

$\{M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \dots\} \subseteq \{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ and $a \in A$, with next condition (*), we choose

any $m_i \in M_{\alpha_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), then the ascending sequence $\bigcap_{i \geq 1} m_i^\circ \leq \bigcap_{i \geq 2} m_i^\circ \leq \dots$

becomes stationary.

(*) $m_i^\circ \geq a^\circ$ ($i = 1, 2, \dots$), $\varphi_i : aR \rightarrow m_i R$ (canonical homomorphism)

and $aR / \bigcap_{i=1}^\infty \ker \varphi_i \in T(t)$.

キーワード：入射加群、 トーション

1. 準備

この論文では R は環で単位元を持つものとし、module は right R -module を扱い unitary とする。 $(T(t), F(t))$ は hereditary torsion theory をあらわし、

任意の module M と その 任意の essential submodule N に対して M/N は torsion module とする。その他の未定義用語については [1], [2], [3], [4] による。

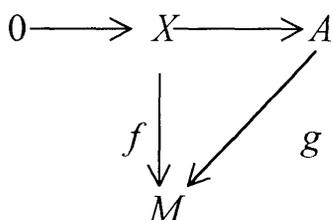
(1998年9月24日受理)

* 宇部工業高等専門学校数学教室

2. t-e-A-injective modules

定義 1.

M, A を R -module とする。 M が t-e-A-injective とは A の任意の submodule X と任意の R -homomorphism $f: X \rightarrow M$ に対して $X/\ker f \in T(t)$ ならば次の diagram が可換となるような R -homomorphism $g: A \rightarrow M$ が存在する。



(注意 1) M が t-e-A-injective ならば M は essentially-A-injective である。

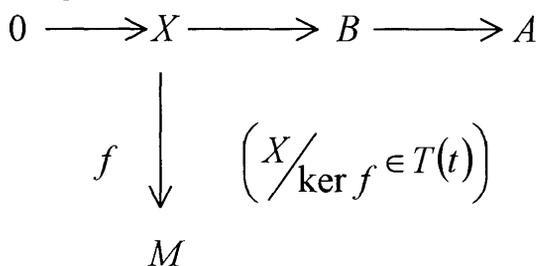
(注意 2) $A \in F(t)$ のときは M が t-e-A-injective と M が essentially A-injective は同じ意味になる。

命題 2

M が t-e-A-injective ならば A の任意の submodule B について M は t-e-B-injective か つ t-e- A/B -injective である。

証明

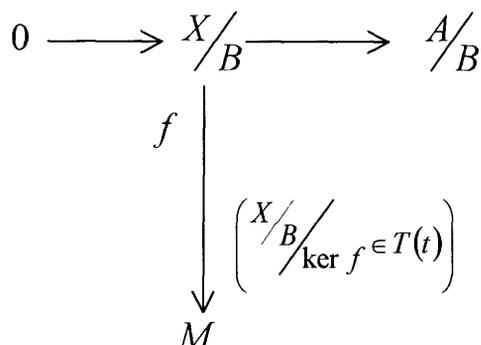
B を A の任意の submodule とする。つぎの diagram を考える。



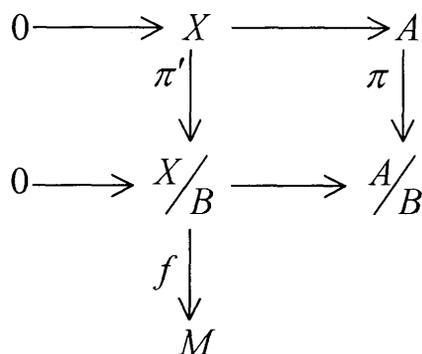
M が t-e-A-injective より $g|_X = f$ となる R -homomorphism $g: A \rightarrow M$ が存在する。

ここで $g' = g|_B$ とすると $g'|_X = f$ で $g': B \rightarrow M$ によって M は t-e-B-injective である。

次に M が t-e- A/B -injective になることについて、下の diagram において



次の diagram を考える。(π, π' は canonical homomorphism)



$$\ker f = X'/B \text{ とおくと } \frac{X/B}{\ker f} \cong \frac{X}{X'} \text{ で}$$

$X/X' \in T(t)$ となる。 $X/\ker(f \circ \pi') = X/X'$ より

$X/\ker(f \circ \pi') \in T(t)$. したがって $g|_X = f \circ \pi'$

なる $g: A \rightarrow M$ が存在する。このとき

$h: A/B \rightarrow M$ を次のように定義する。

$h(a+B) = g(a)$. この h は f の拡張になる。

こうして M は t-e- A/B -injective になる。

命題 3

次は同値である。

- (1) M が t-e-A-injective.
- (2) 任意の $a \in A$ に対して M は t-e- a -R-injective である。

証明

(1) \Rightarrow (2) は命題 2 による。

(2) \Rightarrow (1) について、次の diagram において

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\
 & & \downarrow f & & \\
 & & M & &
 \end{array}
 \quad \left(X/\ker f \in T(t) \right)$$

(X は A の essential submodule としてよい)

次の集合 Ω を考える

$$\Omega = \{ (B_\alpha, \varphi_\alpha) \mid X \leq B_\alpha \leq A, \varphi_\alpha : B_\alpha \rightarrow M,$$

$$\varphi_\alpha|_X = \varphi, B_\alpha/\ker \varphi_\alpha \in T(t) \}$$

$\Omega \neq \emptyset$ で Ω の任意の chain には upper bound が存在することを示す。 Ω の任意の chain

$$(X, \varphi) \subseteq (B_1, \varphi_1) \subseteq (B_2, \varphi_2) \subseteq \dots \subseteq (B_n, \varphi_n) \subseteq \dots$$

に対して $B_0 = \bigcup B_i$ とし $\varphi_0 : \bigcup B_i \rightarrow M$ を次のように定義する。

任意の $x \in \bigcup B_i$ に対して x を含む B_i が存在する

から $\varphi_0(x) = \varphi_i(x)$ 。こうして (B_0, φ_0) を作る。

$$B_i/\ker \varphi_i \in T(t) \text{ だから } \Sigma \oplus (B_i/\ker \varphi_i) \in T(t).$$

Epimorphic image として

$$\bigcup B_i/\ker \varphi_0 = B_0/\ker \varphi_0 \in T(t).$$

よって、 (B_0, φ_0) は Ω の元で上の chain の upper bound である。ツォルンのレンマより極大元が存在する。それを今、改めて (B_0, φ_0) とする。

このとき $B_0 = A$ を次のように示せる。もし $B_0 \neq A$ とすると次の元 a をとることが出来る。

$$a \neq 0, a \in A - B_0 \text{ で } K = \{ r \in R \mid ar \in B_0 \}$$

とおくと $K \neq 0$ がわかり $aK \leq B_0$ となる。このとき $p = \varphi_0|_{aK}$ とおくと $p : aK \rightarrow M$ で

$$aK/\ker p \in T(t). \text{ さて、つぎの diagram で}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & aK & \longrightarrow & aR \\
 & & \downarrow p & & \\
 & & M & &
 \end{array}
 \quad \left(aK/\ker p \in T(t) \right)$$

M が t-e- aR -injective より $g|_{aK} = p$ となる R -homomorphism $g : aR \rightarrow M$ が存在する。

$\bar{g} : B_0 + aR \rightarrow M$ を次のように定義。

$$\bar{g}(b_0 + ar) = \varphi_0(b_0) + g(ar) \quad (b_0 \in B_0, ar \in aR)$$

$$\bar{g}|_{B_0} = \varphi_0 \quad \text{かつ} \quad B_0 + aR/\ker \bar{g} \in T(t)$$

このとき $(B_0, \varphi_0) < (B_0 + aR, \bar{g})$ となり

(B_0, φ_0) の極大性に反する。ゆえに $B_0 = A$ である。

命題 4 次は同値である。

(1) $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は t-e-A-injective.

(2) 任意の Λ の元 α に対して M_α は t-e-A-injective.

証明 (1) \Rightarrow (2) について、任意の元 $\alpha \in \Lambda$ 、任意の submodule $X \leq A$ 、と任意の R -homomorphism $f: X \rightarrow M_\alpha$ において

$X/\ker f \in T(t)$ とする。 $\pi_\alpha: \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ は

projection とし、 $l_\alpha: M_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は injection

とする。

$l_\alpha \circ f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ で $\ker l_\alpha \circ f = \ker f$. ゆえ

に $X/\ker f = X/\ker l_\alpha \circ f \in T(t)$.

いま、 $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ が t-e-A-injective より

$g|_X = l_\alpha \circ f$ となるような R -homomorphism

$g: A \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ が存在する。ここで $h = \pi_\alpha \circ g$

とおくと $h: A \rightarrow M_\alpha$ の R -homomorphism となり

より $h|_X = f$ となる。したがって M_α は t-e-A-

injective である。

(2) \Rightarrow (1) について、 $M = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ とし任意

の submodule $X \leq A$ 、任意の R -

homomorphism $f: X \rightarrow M$ で $X/\ker f \in T(t)$

とする。

$\ker f \leq \ker \pi_\alpha \circ f$ で

$X/\ker f \rightarrow X/\ker \pi_\alpha \circ f \rightarrow 0$ (exact)

$X/\ker f \in T(t)$ より $X/\ker \pi_\alpha \circ f \in T(t)$

したがって R -homomorphism $g_\alpha: A \rightarrow M_\alpha$ が

存在して $g_\alpha|_X = \pi_\alpha \circ f$. そこで R -

homomorphism $h: A \rightarrow M$ をつぎのように定

義する。即ち $h(a) = (g_\alpha(a))$. このとき 任意の

元 $x \in X$ に対して $h(x) = f(x)$ となるので M は

t-e-A-injective である。

定理 5 module の族 $\{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ に対し

て次は同値である。

(1) $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は t-e-A-injective.

(2) $\bigoplus_{i \in I} M_{\alpha_i}$ は t-e-A-injective. (I は Λ の任意の countable subset.)

(3) 任意の元 $\alpha \in \Lambda$ に対して M_α は t-e-A-

injective で任意の

$\{M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \dots\} \subseteq \{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ と $a \in A$ 対

して次の条件 (*) をみたすような任意の

$\{m_i \in M_{\alpha_i} | i = 1, 2, 3, \dots\}$ をとるとき

ascending chain $\bigcap_{i \geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i \geq 2} m_i^0 \leq \dots$ は定

常的となる。

(*) $m_i^0 \geq a^0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) で $\varphi_i: aR \rightarrow m_i R$

(canonical homomorphism) とおくととき

$$aR / \bigcap_{i=1}^{\infty} \ker \varphi_i \in T(t).$$

証明. (1) ⇒ (2) は命題 4 より.

(2) ⇒ (3). 任意の α について M_α が t-e-A-injective (命題 4). (3) の仮定を満たすようにし ascending chain $\bigcap_{i \geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i \geq 2} m_i^0 \leq \dots$ をとる.

N を自然数の集合として $y = (m_i) \in \prod_{i \in N} M_{\alpha_i}$ に対し R -homomorphism $f: aR \rightarrow \prod_{i \in N} M_{\alpha_i}$ を次のように定義する.

$f(ar) = yr = (m_i)r$ この R -homomorphism について $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i \geq j} m_i^0 \right)$ とする

とき $aI \leq aR$ である. このとき f を aI に制限して \bar{f} をつくる、即ち、 $\bar{f} = f|_{aI} : aI \rightarrow \bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i}$ となる.

さらに $\ker f = \bigcap_{i \in N} \ker \varphi_i$ が示せるので $aI / \ker \bar{f} \in T(t)$ がえられる.

\bar{f} をつくる、即ち、 $\bar{f} = f|_{aI} : aI \rightarrow \bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i}$ となる.

さらに $\ker f = \bigcap_{i \in N} \ker \varphi_i$ が示せるので $aI / \ker \bar{f} \in T(t)$ がえられる.

示せるので $aI / \ker \bar{f} \in T(t)$ がえられる.

$\bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i}$ は t-e-aR-injective だから R -homomorphism $g: aR \rightarrow \bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i}$ が存在して次の diagram が可換となる.

homomorphism $g: aR \rightarrow \bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i}$ が存在して次の diagram が可換となる.

の diagram が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & aI & \longrightarrow & aR \\ & & \downarrow \bar{f} & & \\ & & \bigoplus_{i \in N} M_{\alpha_i} & & \end{array}$$

いま Λ の finite subset F に対して $yI \leq \bigoplus_{i \in F} M_{\alpha_i}$

となるのがわかる. そこで $F = \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$

とする. $yI \leq M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{k-1}$ とかくと任意の $i \geq k$ に対して $m_i I = 0$. こうして、

任意の $i \geq k$ に対して $m_i I = 0$. こうして、

$$\bigcap_{i \geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i \geq 2} m_i^0 \leq \dots \text{は定常的になる.}$$

(3) ⇒ (1) について、 $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ が t-e-A-injective

でないとする. そこである A の元 a に対して

$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は t-e-aR-injective でない. よって R の submodule K が存在して次の diagram を考える

とき R -homomorphism $f: aK \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は aR

へ拡張できない.

へ拡張できない.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & aK & \longrightarrow & aR \\ & & \downarrow f & & \\ & & \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha & & \end{array} \quad \left(aK / \ker f \in T(t) \right)$$

さらにこのとき aK は aR の essential submodule と仮定してよい. また 任意の

finite subset $F \leq \Lambda$ に対して $\bigoplus_{\alpha \in F} M_\alpha$ は t-e-aR-injective である.

だから $f(aK)$ は $\bigoplus_{\alpha \in F} M_\alpha$ には含まれない.

また $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ は t-e-aR-injective だから $aR \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ への R -homomorphism g が存在して

次の diagram が可換になる. このとき

て次の diagram が可換になる. このとき

$$g(a) = m \in \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha, \quad m = (m_\alpha) \quad (m_\alpha \in M_\alpha),$$

$$a^0 \leq m^0 = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} m_\alpha^0 \text{ である.}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \longrightarrow aK \longrightarrow aR \\
 \downarrow f \\
 \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha} \\
 \downarrow \\
 \prod_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}
 \end{array}$$

さて、任意の $k \in K$ に対して $S_k = \{\alpha \in \Lambda \mid m_{\alpha} k \neq 0\}$ とおくと任意の S_k は Λ の finite subset となる。しかし任意の finite subset $F \subseteq \Lambda$ に対して $mK = f(aK)$ は $\bigoplus_{\alpha \in F} M_{\alpha}$ に含まれない。だから $I = \bigcup_{k \in K} S_k$ とおくと I は Λ の infinite subset. そのとき $\{k_i \in K \mid i \in N\}$ がつくれてこの任意の k_i に対してある $\alpha_i \in S_{k_i}$ が存在してその $\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} S_{k_j}$ となる。今、 $m \in \prod_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$ であるが m の M_{α_i} 成分を m_i とおく

と $m_i k_i \neq 0$, $m_j k_i = 0$ ($j = 1, 2, \dots, i-1$)。

このとき $a^{\circ} \leq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} m_{\alpha}^{\circ} \leq \bigcap_{i \in N} m_i^{\circ}$ かつ

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker \varphi_{\alpha} \leq \bigcap_{i \in N} \ker \varphi_i \leq aR.$$

$$aR / \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker \varphi_{\alpha} \rightarrow aR / \bigcap_{i \in N} \ker \varphi_i \rightarrow 0 \text{ は exact.}$$

しかも $aR / \bigcap_{i \in N} \ker \varphi_i \in T(t)$ となる。しかし

$$\bigcap_{i \geq 1} m_i^{\circ} \leq \bigcap_{i \geq 2} m_i^{\circ} \leq \dots \text{は狭義の増加となる。これは}$$

矛盾。

References

- [1] F. Anderson, K.Fuller *Rings and Categories of Modules* Springer GTM 1973.
- [2] J. Golan , *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 29.
- [3] K. Hanada , J.Kado and K.Oshiro *On Direct sums of Extending Modules and internal exchange property*, to appear.
- [4] S.H.Mohamed, B.J.Muller, *Continuous and Discrete Modules*. London Math.Soc. 147, 1990.