t-e-A-injective module について

重永和男
Kazuo Shigenaga *

Abstract

Using a essentially-A-injectivity, Oshiro extended relative injective modules.

In this paper, we define the concept of a t-e-A-injective module which is, in a some sense, essentially-A-injective module from a torsion theoretic point of view. The following is our main theorem.

Theorem

The following statements are equivalent for a family of modules $\{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$.

(1) $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ is t-e-A-injective.

(2) $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ is t-e-A-injective for any countable subset I of Λ.

(3) M_α is t-e-A-injective for any $\alpha \in \Lambda$, and for every

$\{M_{\alpha_i}, M_{\alpha_2} \cdots\} \subseteq \{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ and $a \in A$, with next condition (*), we choose any $m_i \in M_{\alpha_i}$ $(i = 1,2,3\cdots)$, then the ascending sequence $\bigcap_{i\geq 1} m_i^\circ \leq \bigcap_{i\geq 2} m_i^\circ \leq \cdots$ becomes stationary.

(*) $m_i^\circ \geq a^\circ$ $(i = 1,2,\cdots)$, $\varphi_i : aR \to m_i R$ (canonical homomorphism)

and $aR / \bigcap_{i=1}^{\infty} \ker\varphi_i \in T(t)$.

キーワード：入射加群、　トーション

1. 準備

この論文ではRは環で単位元を持つものとし、module は right R-module を扱い unitary とする。$(T(t), F(t))$ は hereditary torsion theory をあらわし、任意の module M と その 任意の essential submodule N に対してM/Nは torsion module とする。その他の未定義用語については[1],[2],[3],[4] による。

（1998年９月２４日受理）

＊宇部工業高等専門学校数学教室

2. t-e-A-injective modules

定義 1.

M, A を R-module とする。M が t-e-A-injective とは A の任意の submodule X と任意の R-homomorphism $f: X \to M$ に対して $X/_{\ker f} \in T(t)$ ならば次の diagram が可換となるような R-homomorphism $g: A \to M$ が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

（注意１）M が t-e-A-injective ならば M は essentially-A-injective である。
（注意２）$A \in F(t)$ のときは M が t-e-A-injective と M が essentially A-injective は同じ意味になる。

命題 2

M が t-e-A-injective ならば A の任意の submodule B について M は t-e-B-injective かつ t-e-$A/_B$-injective である。

証明

B を A の任意の submodule とする。つぎの diagram を考える。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] & A \\
 & M & \left(X/_{\ker f} \in T(t)\right) &
\end{tikzcd}
$$

M が t-e-A-injective より $g|_X = f$ となる R-homomorphism $g: A \to M$ が存在する。

ここで $g' = g|_B$ とすると $g'|_X = f$ で $g': B \to M$.よって M は t-e-B-injective.である。

次に M が t-e-$A/_B$-injective になることについて、下の diagram において

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X/_B \arrow[r] \arrow[d, "f"', "\left(X/_B / _{\ker f} \in T(t)\right)"] & A/_B \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

次の diagram を考える。(π ,π' は canonical homomorphism)

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & A \arrow[d, "\pi"'] \\
0 \arrow[r] & X/_B \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A/_B \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

$\ker f = X'/_B$ とおくと $\dfrac{X/_B}{\ker f} \cong \dfrac{X}{X'}$ で $X/_{X'} \in T(t)$ となる。$X/_{\ker(f \circ \pi')} = X/_{X'}$ より $X/_{\ker(f \circ \pi')} \in T(t)$. したがって $g|_X = f \circ \pi'$ なる $g: A \to M$ が存在する。このとき $h: A/_B \to M$ を次のように定義する。

$h(a+B)=g(a)$. この h は f の拡張になる。

こうして M は t-e-A/B-injective になる。

命題 3

次は同値である。

（1）M が t-e-A-injective.

（2）任意の $a\in A$ に対して M は t-e-a R-injective である。

証明

（1）⇒（2）は命題 2 による。

（2）⇒（1）について、次の diagram において

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \\ & M & \left(X/\ker f \in T(t) \right) \end{tikzcd}$$

（X は A の essential submodule としてよい）

次の集合 Ω を考える

$$\Omega=\{(B_\alpha,\varphi_\alpha) \mid X\le B_\alpha\le A, \varphi_\alpha: B_\alpha\to M, \varphi_\alpha|_X=\varphi, B_\alpha/\ker\varphi_\alpha\in T(t)\}$$

$\Omega\neq\phi$ で Ω の任意の chain には upper bound が存在することを示す。Ω の任意の chain

$$(X,\varphi)\subseteq(B_1,\varphi_1)\subseteq(B_2,\varphi_2)\subseteq\cdots\subseteq(B_n,\varphi_n)\subseteq\cdots$$

に対して $B_0=\bigcup B_i$ とし $\varphi_0:\bigcup B_i\to M$ を次のように定義する。

任意の $x\in\bigcup B_i$ に対して x を含む B_i が存在するから $\varphi_0(x)=\varphi_i(x)$。こうして (B_0,φ_0) を作る。

$B_i/\ker\varphi_i\in T(t)$ だから $\Sigma\oplus\left(B_i/\ker\varphi_i\right)\in T(t)$。

Epimorphic image として

$\bigcup B_i/\ker\varphi_0=B_0/\ker\varphi_0\in T(t)$。

よって、(B_0,φ_0) は Ω の元で上の chain の upper bound である。ツォルンのレンマより極大元が存在する。それを今、改めて (B_0,φ_0) とする。このとき $B_0=A$ を次のように示せる。もし $B_0\neq A$ とすると次の元 a をとることが出来る。

$a\neq 0$，$a\in A-B_0$ で $K=\{r\in R \mid aR\in B_0\}$

とおくと $K\neq 0$ がわかり $aK\le B_0$ となる。このとき $p=\varphi_0|_{aK}$ とおくと $p:aK\to M$ で $aK/\ker p\in T(t)$. さて、つぎの diagram で

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & aK \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & aR \\ & M & \left(aK/\ker p \in T(t) \right) \end{tikzcd}$$

M が t-e-aR-injective より $g|_{aK}=p$ となる R-homomorphism $g:aR\to M$ が存在する。

$\bar g:B_0+aR\to M$ を次のように定義。

$$\bar g(b_0+ar)=\varphi_0(b_0)+g(ar)\ \ (b_0\in B_0,\ ar\in aR)$$

$$\bar g|_{B_0}=\varphi_0 \quad \text{かつ} \quad B_0+aR/\ker\bar g\in T(t)$$

このとき $(B_0,\varphi_0)<(B_0+aR,\bar g)$ となり

(B_0, φ_0)の極大性に反する。ゆえに$B_0 = A$.

命題 4 次は同値である。

（1） $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ は t-e-A-injective.

（2） 任意のΛの元αに対してM_αは t-e-A-injective.

証明 （1）⇒（2）について、任意の元$\alpha \in \Lambda$、任意の submodule $X \leq A$, と任意の R-homomorphism $f : X \to M_\alpha$ において $X/\ker f \in T(t)$ とする。$\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M_\alpha$ は projection とし、$\ell_\alpha : M_\alpha \to \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ は injection とする。

$\ell_\alpha \circ f : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ で $\ker \ell_\alpha \circ f = \ker f$. ゆえに $X/\ker f = X/\ker \ell_\alpha \circ f \in T(t)$.

いま、$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ が t-e-A-injective より $g|_X = \ell_\alpha \circ f$ となるような R-homomorphism $g : A \to \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ が存在する。ここで$h = \pi_\alpha \circ g$ とおくと$h : A \to M_\alpha$の R-homomorphism となり $h|_X = f$ となる。したがってM_αは t-e-A-injective である。

（2）⇒（1）について、$M = \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ とし任意の submodule $X \leq A$, 任意の R-homomorphism $f : X \to M$ で $X/\ker f \in T(t)$ とする。

$\ker f \leq \ker \pi_\alpha \circ f$ で

$X/\ker f \to X/\ker \pi_\alpha \circ f \to 0$ （ exact ）.

$X/\ker f \in T(t)$ より $X/\ker \pi_\alpha \circ f \in T(t)$.

したがって R-homomorphism $g_\alpha : A \to M_\alpha$ が存在して $g_\alpha|_X = \pi_\alpha \circ f$. そこで R-homomorphism $h : A \to M$ をつぎのように定義する。即ち$h(a) = (g_\alpha(a))$. このとき 任意の元$x \in X$に対して$h(x) = f(x)$となるので Mは t-e-A-injective である。

定理 5 module の族$\{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$に対して次は同値である。

（1） $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ は t-e-A-injective.

（2） $\bigoplus_{i\in I} M_\alpha$ は t-e-A-injective. (I はΛの任意の countable subset.)

（3） 任意の元$\alpha \in \Lambda$に対してM_αは t-e-A-injective で任意の $\{M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \cdots\} \subseteq \{M_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ と $a \in A$ 対して次の条件（＊）をみたすような任意の $\{m_i \in M_{\alpha_i} | i = 1,2,3,\cdots\}$ をとるとき ascending chain $\bigcap_{i\geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i\geq 2} m_i^0 \leq \cdots$ は定常的となる。

（＊） $m_i^0 \geq a^0$ $(i = 1,2,3,\cdots)$ で $\varphi_i : aR \to m_i R$ (canonical homomorphism) とおくとき

$\left. aR \middle/ \bigcap_{i=1}^{\infty} \ker \varphi_i \right. \in T(t)$.

証明.　（1）⇒（2）は命題　4より。(2) ⇒（3）．任意のαについてM_αが t-e-A-injective（命題 4)。　（3）の仮定を満たすようにし ascending chain $\bigcap_{i\geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i\geq 2} m_i^0 \leq \cdots$をとる。N を自然数の集合として$y=(m_i)\in \prod_{i\in N} M_{\alpha_i}$に対し R-homomorphism $f: aR \to \prod_{i\in N} M_{\alpha_i}$を次のように定義する。$f(ar)=yr=(m_i)r$　この R-homomorphism について$I=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i\geq j} m_i^0\right)$とするとき$aI\leq aR$である。このとき$f$を　aIに制限して$\bar{f}$　をつくる、即ち、$\bar{f}=f|_{aI}$　: $aI \to \bigoplus_{i\in N} M_{\alpha_i}$となる。さらに$\ker \bar{f}=\bigcap_{i\in N}\ker\varphi_i$が示せるので　$\left. aI \middle/ \ker \bar{f} \right. \in T(t)$がえられる。$\bigoplus_{i\in N} M_{\alpha_i}$　は　t-e-aR-injective　だから　R-homomorphism　$g: aR \to \bigoplus_{i\in N} M_{\alpha_i}$が存在して次の diagram が可換となる。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & aI & \longrightarrow & aR \\ & & {\scriptstyle \bar{f}}\downarrow & & \\ & & \bigoplus_{i\in N} M_{\alpha_i} & & \end{array}$$

いまΛの finite subset F に対して$yI\leq \bigoplus_{i\in F} M_{\alpha_i}$となることがわかる。そこで $F=\{1,2,3,\cdots k-1\}$とする。$yI\leq M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_{k-1}$とかくと任意の$i\geq k$に対して$m_i I=0$.　こうして、$\bigcap_{i\geq 1} m_i^0 \leq \bigcap_{i\geq 2} m_i^0 \leq \cdots$は定常的になる。

（3）⇒（1）について、$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$が t-e-A-injective でないとする。そこであるAの元aに対して$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$は t-e-$aR$-injective でない。よって$R$の submodule Kが存在して次の diagram を考えるとき R-homomorphism　$f: aK \to \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$は$aR$へ拡張できない。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & aK & \longrightarrow & aR \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \left(\left. aK \middle/ \ker f \right. \in T(t)\right) \\ & & \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha & & \end{array}$$

さらにこのときaKはaRの essential submodule と仮定してよい。また 任意の finite subset $F\leq\Lambda$に対して$\bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$は t-e-$aR$-injective である。だから$f(aK)$は$\bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$には含まれない。また$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$は t-e-$aR$-injective だから$aR\to\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$への R-homomorphism g が存在して次の diagram が可換になる。このとき

$g(a)=m\in\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$　, $m=(m_\alpha)$　$(m_\alpha\in M_\alpha)$,

$a^0\leq m^0=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha^0$である。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & aK & \longrightarrow & aR \\ & & \Big\downarrow f & & \\ & & \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha & & \\ & & \Big\downarrow & & \\ & & \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha & & \end{array}$$

さて、任意の $k\in K$ に対して $S_k=\{\alpha\in\Lambda \mid m_\alpha k\neq 0\}$ とおくとき任意の S_k は Λ の finite subset となる。しかし任意の finite subset $F\subseteq\Lambda$ に対して $mK=f(aK)$ は $\bigoplus_{\alpha\in F}M_\alpha$ に含まれない。だから $I=\bigcup_{k\in K}S_k$ とおくと I は Λ の infinite subset. そのとき $\{k_i\in K \mid i\in N\}$ がつくれてこの任意の k_i に対してある $\alpha_i\in S_{k_i}$ が存在してその $\alpha_i\notin\bigcup_{j=1}^{i-1}S_{k_j}$ となる。今、$m\in\prod_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ であるが m の M_{α_i} 成分を m_i とおくと $m_ik_i\neq 0$, $m_jk_i=0$ $(j=1,2,\cdots i-1)$。

このとき $a^\circ\le\bigcap_{\alpha\in\Lambda}m_\alpha^\circ\le\bigcap_{i\in N}m_i^\circ$ かつ $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\ker\varphi_\alpha\le\bigcap_{i\in N}\ker\varphi_i\le aR$。

$$aR\Big/\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\ker\varphi_\alpha \to aR\Big/\bigcap_{i\in N}\ker\varphi_i\to 0$$ は exact.

しかも $aR\Big/\bigcap_{i\in N}\ker\varphi_i\in T(t)$ となる。しかし $\bigcap_{i\ge1}m_i^\circ\le\bigcap_{i\ge2}m_i^\circ\le\cdots$ は狭義の増加となる。これは矛盾。

References

[1] F. Anderson, K.Fuller *Rings and Categories of Modules* Springer GTM 1973.

[2] J. Golan , *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 29.

[3] K. Hanada , J.Kado and K.Oshiro *On Direct sums of Extendig Modules and internal exchange property* , to appear.

[4] S.H.Mohamed, B.J.Muller, *Continuous and Discrete Modules*. London Math.Soc. 147, 1990.