

# 値域がある種の多角形から変形してできた領域（主として無限領域で一部カットの入った多角形）である単葉関数の係数評価

水 野 恭 之\*

Coefficient Estimate of Univalent Functions whose Ranges are Deformed Regions — Infinite Strip Mainly and a Polygon with a Cut as a Part of Them — from Certain Classes of Polygons.

Yasuyuki MIZUNO

## Summary

In this manuscript some investigations and their extensions are stated relationally from the 'On the Coefficient of Univalent Functions whose Ranges are Polygonal' in the other bulletin, which is found in the last part of this thesis.

Assuming some rules, we consider some simply-connected regions above-mentioned within the reach of satisfying rules. We state Coefficient Estimate in Taylor's Expansion of Univalent Functions which map conformally  $|Z| < 1$  onto the above region and concrete examples for regions in question.

本稿は後録した参考文献の中の2)に関連し、これに継いで若干の考察や拡張をしたものである。必要な部分は再録して、本稿単独に筋が通るようにしておいた。

### 【1】

$$\begin{cases} 0 < \lambda_l < 1 \\ \sum_{l=1}^m \lambda_l = m + \rho - 1 \quad (0 \leq \rho < 1) \end{cases}$$

を満足する  $m$  個の角

$$\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \dots, \lambda_m\pi$$

と

$$-\rho\pi$$

の合計  $m+1$  個の角を内角にもつ (Fig. 1) (斜線で示した内部) のような単連結無限領域を  $D_1$  とする。

いま、単位円の内部  $|Z| < 1$  を  $D_1$  に等角にうつす関数を  $W=f(Z)$  とすれば

$$(1) \quad \frac{dW}{dZ} = K(Z-Z_0)^{-(1+\rho)} \prod_{l=1}^m (Z-Z_l)^{\lambda_l-1}$$

と表わせる。

ただし、 $K$  は複素定数で

$$Z_l = e^{i\theta_l}$$

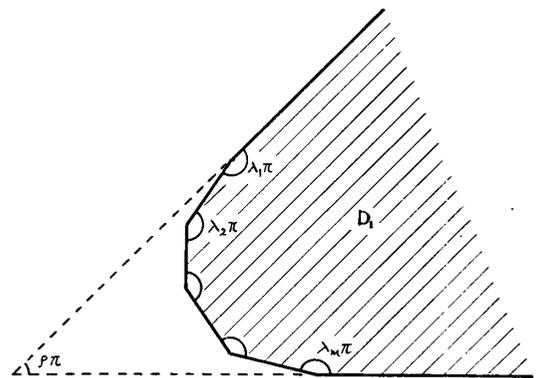


Fig. 1

( $l=0, 1, 2, \dots, m; 0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < 2\pi$ ) である。

ここで

$$Z_l^{-1} = \varepsilon_l \quad (l=0, 1, 2, \dots, m)$$

$$\lambda_l - 1 = \delta_l \quad (l=1, 2, \dots, m)$$

とおけば、(1) は

$$(2) \quad \frac{dW}{dZ} = C(1-\varepsilon_0 Z)^{-(1+\rho)} \prod_{l=1}^m (1-\varepsilon_l Z)^{\delta_l} = C \prod_{l=0}^m (1-\varepsilon_l Z)^{\delta_l}$$

\* 宇部工業高等専門学校数学教室

と変形できる.

$C$  は矢張り複素定数,  $\delta_0 = -(1+\rho)$  であって

$$\sum_{l=0}^m \delta_l = -(1+\rho) + \sum_{l=1}^m \delta_l = -1-\rho + (m+\rho-1-m) = -2$$

を満足する.

ここで, (2) の一番右にある

$$(1-\varepsilon_l Z)^{\delta_l} \quad (l=0, 1, 2, \dots, m)$$

は  $Z=0$  で 1 となる分枝をとることにしておく. これから先も. ことわらなくてもこれにならって適当な分枝をとって考える.

さて, まずつぎの定理が成り立つ.

〔定理〕

$W=f(Z)$  が上述の関数として, そのテイラー展開を

$$W=f(Z) = A + C(Z + A_2 Z^2 + \dots + A_n Z^n + \dots) : |Z| < 1$$

とするならば, 係数  $A_n$  は

$$|A_n| < 1 \quad (n=2, 3, \dots)$$

を満足する.

(証明)

$$(1-Z)^{\delta_l} \quad (l=0, 1, 2, \dots, m)$$

は係数が正である  $Z$  のべき級数に展開できるので,

$\sum_{l=0}^m \delta_l = -2$  に注意すれば

$$(3) \quad \frac{1}{C} \frac{dW}{dZ} = \prod_{l=0}^m (1-\varepsilon_l Z)^{\delta_l} = 1 + 2A_2 Z + 3A_3 Z^2 + \dots + nA_n Z^{n-1} + \dots$$

の  $Z^n$  の係数は

$$\frac{1}{(1-Z)^2} = 1 + 2Z + 3Z^2 + \dots + nZ^{n-1} + \dots$$

の  $Z^n$  の係数によってマジョレイトされる.

したがって

$$|nA_n| < n$$

よって

$$|A_n| < 1 \quad (n=2, 3, \dots)$$

〔例 1〕

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{5}{6}, m=3, \rho=0$$

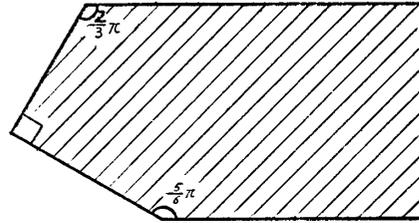


Fig. 2

〔例 2〕

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{3}{4}, \lambda_3 = \frac{5}{6}, m=3, \rho = \frac{1}{4}$$

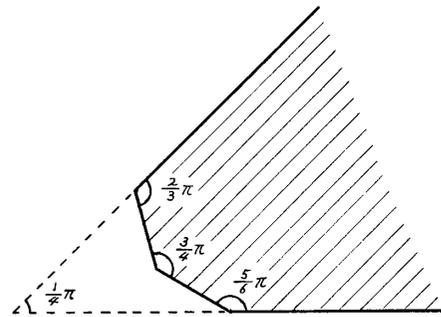


Fig. 3

〔2〕

$(1+p_r)\pi$  の角と  $(1-p_r)\pi$  の角が同数の  $\mu_r$  個ずつあって, かつ, この  $2\mu_r$  個の角だけを考えれば, この順で交互に並ぶ規則をもった合計  $2\sum_{r=1}^{\nu} \mu_r$  個の角

ただし,  $p_r$  ( $r=1, 2, 3, \dots, \nu$ ) および  $\nu$  は

$$\begin{cases} p_i \neq p_j & (i \neq j) \\ -1 < p_r < 1 \\ \sum_{r=1}^{\nu} |p_r| \leq 1 \end{cases}$$

を満足するものとする.

前の〔1〕で設定した型の角一組と上の型の角一組

の合計  $(m+1) + 2\sum_{r=1}^{\nu} \mu_r$  個の角を適当に組合せ,

これらの角を内角としてもつ単連結無限領域 ( $D_1$  のような内部) を  $D_2$  とする.

いま, 単位円の内部  $|Z| < 1$  を  $D_2$  に等角にうつす関数を  $W=f(Z)$  として前定理同様の条件を設定するならば

$$|A_n| < n \quad (n=2, 3, \dots)$$

が成り立つ.

(証明)

〔1〕のとき (2) を得たのと同様にして, 今度は

$$(4) \quad \frac{dW}{dZ} = C \prod_{l=0}^m (1 - \varepsilon_l Z)^{\delta l} \prod_{r=1}^{\nu} \left( \prod_{k=1}^{\mu_r} \frac{1 - \varepsilon_{r,2k} Z}{1 - \varepsilon_{r,2k-1} Z} \right)^{-p_r} \text{ とすれば}$$

と表わされる。

ただし、 $(1+p_r)\pi$ ,  $(1-p_r)\pi$  に対応する  $\varepsilon_k = Z_k^{-1}$  をそれぞれ

$$\varepsilon_{r,2k-1}, \varepsilon_{r,2k} \quad (k=1, 2, 3, \dots, \mu_r)$$

としてある。

**補助定理**

$\zeta_K: (K=1, 2, \dots, 2N)$   
 を  
 $\zeta_K = e^{i\theta_K} \quad (0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{2N} < 2\pi)$   
 なる単位円周上の点とすると  
 $G(Z) = \prod_{K=1}^N \frac{Z - \zeta_{2K}}{Z - \zeta_{2K-1}}$   
 によって表わされる関数  $G(Z)$  は、 $|Z| < 1$  において、原点を通る直線を境界とする半平面上の値をとる。

によれば、ある  $\theta$  があって

$$\theta < \arg \prod_{r=1}^{\nu} \left( \prod_{k=1}^{\mu_r} \frac{1 - \varepsilon_{r,2k} Z}{1 - \varepsilon_{r,2k-1} Z} \right)^{-p_r} < \theta + \pi \sum_{r=1}^{\nu} |p_r|$$

が成り立つ。

ここで

$$\sum_{r=1}^{\nu} |p_r| \leq 1$$

の条件を用いると

$$\Psi(Z) = \prod_{r=1}^{\nu} \left( \prod_{k=1}^{\mu_r} \frac{1 - \varepsilon_{r,2k} Z}{1 - \varepsilon_{r,2k-1} Z} \right)^{-p_r}$$

は原点を通る直線を境界とする半平面上の値をとり、その値域には点1が含まれている。

したがって、 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$  なる  $\varphi$  を適当にえらぶと

$$|Z| < 1 \text{ において } \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \Psi(Z)) > 0$$

ゆえに

$$(5) \quad \Psi(Z) = 1 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n + \dots$$

$$|a_n| \leq 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

すなわち  $\Psi(Z)$  のテイラー展開 (5) の係数は

$$\frac{1+Z}{1-Z} = 1 + 2Z + 2Z^2 + \dots + 2Z^n + \dots$$

の係数によってマジョレイトされる。

[1] の証明と合せ考えると、今度の

$$\frac{1}{C} \frac{dW}{dZ} = 1 + 2A_2 Z + 3A_3 Z^2 + \dots + nA_n Z^{n-1} + \dots$$

の係数は

$$\frac{1}{(1-Z)^2} \frac{1+Z}{1-Z} = 1 + 2^2 Z + 3^2 Z^2 + \dots + n^2 Z^{n-1} + \dots$$

の係数によってマジョレイトされる。

よって

$$|nA_n| < n^2$$

ゆえに

$$|A_n| < n \quad (n=2, 3, \dots)$$

[例3]

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, m=2, \rho=0$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}, \mu_1 = 4$$

$$p_2 = \frac{1}{2}, \mu_2 = 4$$

$$\nu = 2$$

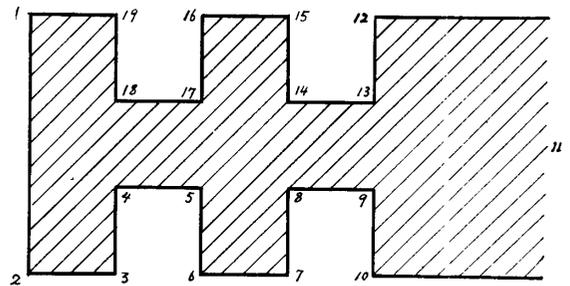


Fig. 4

Table 1.

頂点の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\delta l$ (or $p_r, -p_r$ )	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
組合せ	[1]	[1]	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	[1]	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$

[例4]

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}, m=2, \rho = \frac{1}{3}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}, \mu_1 = 5$$

$$\nu = 2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}, \mu_2 = 5$$

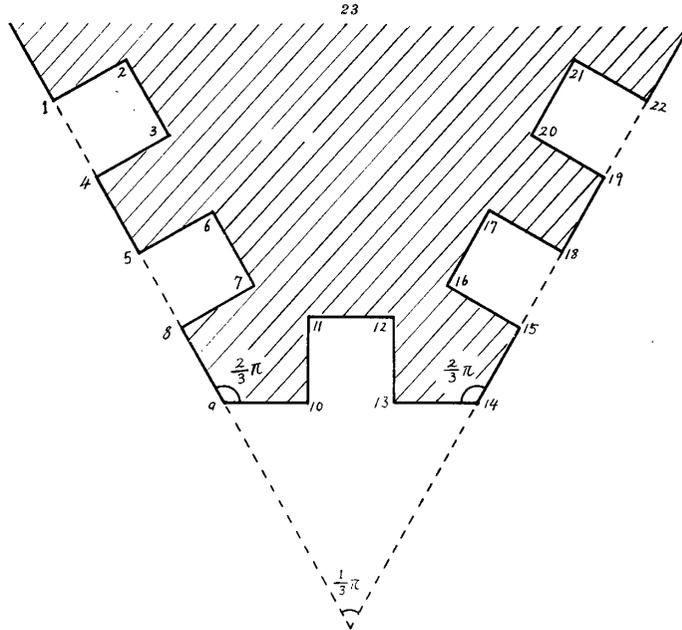


Fig. 5

Table 2.

頂点の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$\delta_l$ (or $p_r, -p_r$ )	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	
組合せ	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$[1] P_1$	$P_2$	$[1] P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$	$[1]$													

【3】

最後にカットの入った多角形を付加する。

$$\begin{cases} 0 < \lambda_l < 1 \\ \sum_{l=1}^m \lambda_l = m - 3 \end{cases}$$

を満足する  $m$  個の角

$$\lambda_1 \pi, \lambda_2 \pi, \dots, \lambda_m \pi$$

と

$$2\pi$$

の合計  $(m+1)$  個の角を内角にもっていると考えられる (Fig. 6) のような、カットの入った多角形の内部で与えられる領域を  $D_3$  とする。

いま、単位円の内部  $|Z| < 1$  を  $D_3$  に等角にうつす関数を  $W=f(Z)$  とすれば、これまでと同様の表現において

$$|A_n| < n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

がいえる。

(証明)

これまでと同様の手順で

$$(6) \quad \frac{dW}{dZ} = C (1 - \varepsilon Z) \prod_{l=1}^m (1 - \varepsilon_l Z)^{\delta_l}$$

とかくことができる。

ところで、

$$\sum_{l=1}^m \delta_l = \sum_{l=1}^m (\lambda_l - 1) = (m - 3) - m = -3$$

よって

$$1 + \sum_{l=1}^m \delta_l = -2 + \{1 + (-1)\}$$

であることに留意すれば、(6) の右辺を適当にアレンジすることによって

$$(7) \quad \frac{1}{C} \frac{dW}{dZ} = \prod_{\alpha=1}^{\lambda} (1 - \varepsilon_{\alpha}^* Z)^{\delta_{\alpha}^*} (1 - \varepsilon Z) \cdot \prod_{\beta=1}^{\tau} (1 - \varepsilon_{\beta}^* Z)^{\delta_{\beta}^*}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} \delta_{\alpha}^* = -2, \quad \sum_{\beta=1}^{\tau} \delta_{\beta}^* = -1$$

と変形できる。

ここで

$$\begin{aligned} \phi(Z) &= (1 - \varepsilon Z) \prod_{\beta=1}^{\tau} (1 - \varepsilon_{\beta}^* Z)^{\delta_{\beta}^*} \\ &= \prod_{\beta=1}^{\tau} \left\{ (1 - \varepsilon Z)^{-\delta_{\beta}^*} (1 - \varepsilon_{\beta}^* Z)^{\delta_{\beta}^*} \right\} \end{aligned}$$

としてみれば、前と同様にある  $\theta'$  があって

$$\theta' < \arg \phi(Z) < \theta' - \pi \sum_{\beta=1}^{\tau} \delta_{\beta}^* = \theta' + \pi$$

がいえるから、その後の証明は〔1〕と〔2〕の場合にならって同様に結論づけることができる。

〔例5〕

$$\begin{aligned} \delta_1^* &= -\frac{1}{3}, \quad \delta_2^* = -\frac{1}{3}, \quad \delta_3^* = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{6}, \quad \delta_4^* = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

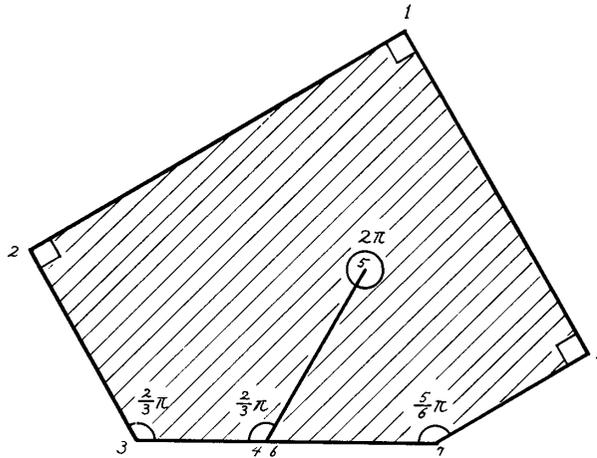


Fig. 6

Table 3.

頂点の番号	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta_i$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$

あ と が き

この方法を適当にモディファイして少しテクニックを用いれば、一気に拡張できそうであることを大体見通している。しかし、その限界などについて今少し考慮の余地があるので、本稿ではそのことについてまでは述べなかった。

参 考 文 献

- 1) T. KAKEHASHI: On a Certain Class of Univalent Functions (Proc. Japan Acad., 43 (1966))
- 2) 田村, 水野: 値域が多角形である単葉関数の係数について (山口大学教育学部研究論叢 第18巻第2部)
- 3) 井上 正雄: 関数論
- 4) Z. NEHARI: Conformal Mapping
- 5) 井上 正雄: 応用函数論

(昭和44年4月5日受理)