

# 固有振動数からみた波動歯車装置のねじり剛性について

杉本 信行\*, 石田 武\*\*, 原田 隆\*

## Torsional Rigidity of Strain Wave Gearing observed from its Natural Frequency

Nobuyuki SUGIMOTO, Takeshi ISHIDA and Takashi HARADA

**Abstract:** The torsional rigidity of strain wave gearing has been studied experimentally using a twisting test until recently. This method used a twisting test belongs to the field of statics. But the method used in this study that the torsional rigidity of the gearing is considered from its natural frequency belongs to the field of kinetics.

The natural frequency of torsion of the gearing was measured at a state in which a high speed shaft of the gearing was fixed and a low speed shaft, that was attached a disc of inertia, was free. It is known that the natural frequency " $f_n$ " of the single degree of freedom system is shown as following  $f_n = \sqrt{k_d/J} / (2\pi)$ . Where " $k_d$ " is the torsional rigidity, and " $J$ " is the moment of inertia. If  $f_n$  and  $J$  are known,  $k_d$  is calculated from this equation. This paper describes the relationship between  $k_d$  which is obtained from the natural frequency of the gearing and  $k_s$  obtained from the twisting test.

### 1. 緒 言

波動歯車装置は薄肉の金属円筒に歯切りされた柔軟な歯車の弾性変形を巧みに応用した、従来の歯車とは全く異なる非常にユニークな噛みあい機構を有した歯車減速装置であり、1959年アメリカ合衆国のC.W.Musser<sup>(1)</sup>の発案によるものである。したがって、紀元前に誕生したと言われる歯車の歴史<sup>(2)</sup>と比較すれば非常に浅く、今後解決すべき多くの課題も有しているが、構成部品がわずかに3点という小形軽量であり、しかも一段で50から320という高い減速比が得られること、また一般の歯車装置に比べて歯のかみあい部のバックラッシュが非常に小さく、回転伝達精度が高いなど、多くの特長を有していることから、現在精密な位置決め精度を必要とする産業用ロボットやNC工作機械などの減速機として、広く用いられている。

ところが、位置決め精度がさらに厳しく追及される昨今では、波動歯車装置を含むロボットの動力伝達系において発生する波動歯車装置に起因したねじり振動により、ロボットの製品価値を著しく損なうなどの問題が生じるようになってきた。それゆえ、振動の発生原因の究明や振動予測・高剛性化を図るために、波動歯車装置のねじり剛性の解明が急務となっている。

そこで、波動歯車装置のねじり剛性を定量的に算出する方法の確立を目指して、著者らはまずねじり試験という静力学的な立場から、波動歯車装置のねじり剛性に関する実験的考察を行ってきた。その結果、波動歯車装置のねじれ特性は、ヒステリシスループとなることや、硬性ばね特性を示すこと、また一般の歯車のねじり剛性の算出方法とは全く異なった観点から、波動歯車装置のねじり剛性を考える必要のあることを明らかにした<sup>(3),(4)</sup>。

本研究では、これまで行ってきた研究手法を変え、動力学的立場から波動歯車装置のねじり剛性を算出しようとするものである。すなわち、波動歯車装置をねじりのばね要素と考え、その高速軸の回転を固定し、低速軸に負荷慣性体としての円板を取り付け、1自由度ねじり振動系を構築し、そのねじり固有振動数から波動歯車装置のねじり剛性の算出を試みた。また、波動歯車装置が硬性ばね特性を示すというこれまでの研究で得られた知見と、固有振動数から求めたねじり剛性との関係についても考察を行ったので、これらのことについて報告する。

### 2. 実験方法

**2・1 供試波動歯車装置の諸元** 研究対象とした最も一般的なカップ形波動歯車装置の構造モデルを図1に示す。この波動歯車装置の大きさは外径135mm、軸方向の長さ約100mmであり、現在生産されている波動歯車装置の中では、大きさ・伝達トルクともに中位に属

1998年9月24日受理

\* 宇部工業高等専門学校 制御情報工学科

\*\* 山口大学工学部 機械工学科

している。減速機として用いる場合、通常だ円形状をしたウェーブジェネレータ (WG) ①を高速軸とし、サーキュラースプライン (CS) ②を固定して、フレキシブルスプライン (FS) ③を低速軸として用いられる。

本研究ではインボリュート歯形を有する通常の波動歯車装置と、高剛性を目指して開発された I H 歯形<sup>9)</sup>を有する波動歯車装置の 2 種類について、それぞれの固有振動数からねじり剛性を求めることとした。前者の波動歯車装置を以後タイプ 1、後者をタイプ 2 の波動歯車装置と呼ぶことにする。これら研究に供した 2 種類の波動歯車装置の要目を表 1 に示す。いずれのタイプの波動歯車装置も表 1 からわかるように、CS の歯数は FS の歯数より 2 枚多くなっており、WG の長軸上にある FS の歯のみが CS の歯とかみあうことになる。

**2・2 ねじり振動実験装置** 図 2 はねじり振動実験装置の写真で、1000 × 500 × 80mm の鋼製基板の上に、波動歯車装置の高速軸の回転を拘束するとともに、低速軸側には軸受を介して、ロボットの負荷慣性体とみなした直径 1200mm、厚さ約 20 mm、質量約 180kg の鋼製円板が取り付けられている。したがって、波動歯車装置をねじりのばね要素、低速軸側の円板を慣性体とみなした 1 自由度の振動系が形成できることになる。

なお、FS の底部を取り付けた低速軸には、直径 170 mm、長さ 280 mm の中実軸を用いているので、波動歯車装置のねじり剛性に比べ、ほぼ剛体とみなすことがで

きる。また、本ねじり振動実験装置は、波動歯車装置以外のものでも取り付け可能なように、ジグ円板を介して低速軸に供試体を取り付けられるようになっている。

図 2 に示した慣性円板の接線鉛直方向にひもの一端を取り付け、他端に質量 20kg の重錘を静かに吊り下げた状態から、そのひもを切断することで、本振動系にねじり振動を発生させることにした。このときの振動波形は、図 3 に示すように、慣性円板の円周方向の振動変位を非接触変位計を用いて測定した。また測定した振動波形を FFT で周波数分析して固有振動数を求めた。

このようなねじり振動系に対し、波動歯車装置が硬性ばね特性を有していることを考慮して、負荷トルクが大きさがねじり固有振動数に与える影響を調べることにした。それゆえ、大きさが種々異なるトルクを負荷するた

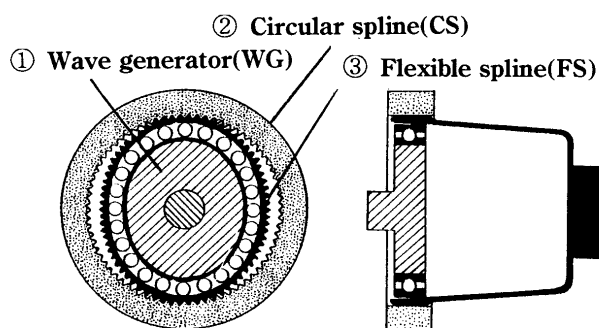


図 1 波動歯車装置の構造モデル

表 1 供試波動歯車装置の主な要目

波動歯車装置の種類		タイプ 1	タイプ 2
定格トルク	N·m (at 2000 rpm)	294	294
減速比		128	120
歯形		インボリュート	I H
モジュール	mm	0.397	0.423
歯数	CS	258	242
	FS	256	240

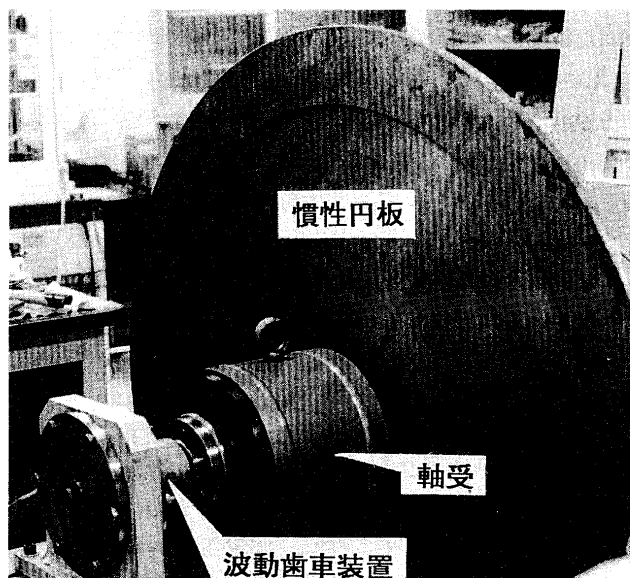


図 2 ねじり振動実験装置



図 3 ねじり振動の測定方法

めに、図4に示す要領で慣性円板周上の一点に質量20kgの小円板を取り付け、その取り付け位置を鉛直線上から始めて水平線方向へ $10^\circ$ ずつ変えていきながら、その都度固有振動数を求めた。この小円板の取り付け角度 $\theta$ と、波動歯車装置に負荷されるトルク $T$ の関係を次式に示す。

$$T = r mg \sin \theta \quad \dots\dots (1)$$

式(1)中、 $r$ は慣性円板の中心からトルク負荷用小円板の取り付け位置までの半径で545mm、 $m$ は小円板の質量、 $g$ は重力加速度である。式(1)において $\theta = 0^\circ$ すなわち、小円板を慣性円板の鉛直線上に取り付けたときは、負荷トルクは $0 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、 $\theta = 90^\circ$ のとき最大トルク $107 \text{ N}\cdot\text{m}$ を得る。本来はトルク負荷用小円板の質量 $m$ をもっと大きくして、波動歯車装置の定格トルク $300 \text{ N}\cdot\text{m}$ 程度までトルクを負荷したいところであるが、小円板の取り付け上の制約のために、 $m = 20 \text{ kg}$ とした。

このように、小円板の取り付け位置を変えることで負荷トルクの大きさは変わるが、慣性円板とトルク負荷用小円板を含む慣性モーメントの大きさは変化しないので、同一の慣性モーメントのもとで負荷トルクの大きさと固有振動数の関係を容易に考察することが可能となる。なお、負荷トルクを与えるための小円板や低速軸を含む慣性円板の慣性モーメント $J$ を計算で求めると、 $J = 30.9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ であった。

**2・3 固有振動数とねじり剛性との関係** 本研究で求めようとする波動歯車装置のねじり剛性を $k_d$ 、円板の慣性モーメントを $J$ とすると、1自由度ねじり振動系の固有振動数 $f_n$ は次式で表される。

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_d}{J}} \quad \dots\dots (2)$$

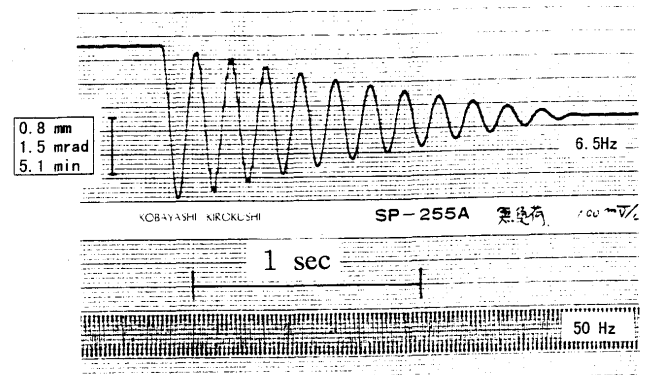
式(2)において、あらかじめ計算しておいた円板の慣性モーメント $J$ 、ならびに本実験で測定したねじり固有

振動数 $f_n$ を代入することで、波動歯車装置のねじり剛性 $k_d$ を算出することができる。なお、波動歯車装置自体の慣性モーメントは、慣性円板の $J$ に比べて非常に小さいので無視した。

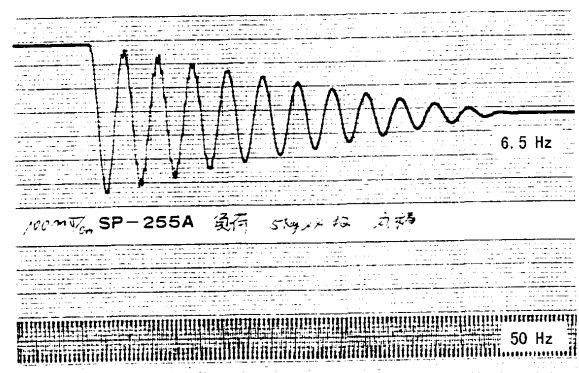
### 3. 実験結果と考察

**3・1 丸棒の固有振動数とねじり剛性** 測定した固有振動数から、非線形ばね特性を有する波動歯車装置のねじり剛性を求めることに先立ち、理論上ねじり剛性が明らかで、線形ばね特性を有する公称直径35mm、長さ200mmの丸棒を本ねじり振動実験装置に取り付け、まずそのねじり振動波形を求めてみた。なお、丸棒の材質はS45Cである。

図5はその丸棒をねじりばね要素と考えた1自由度振動系の振動波形をペンレコーダで描いたもので、横軸は時間、縦軸は振動変位である。グラフの下段には、時間軸に相当する50Hzの正弦波も合わせて描いている。図5(a)はトルク $T = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ の場合、また図5(b)はトルクを負荷した場合の一例として最大トルク $T = 107 \text{ N}\cdot\text{m}$ を負荷したときの振動波形である。これらの振動波形をFFTで周波数分析すると、無負荷時、負荷時ともに6.5Hzであった。



(a) 無負荷時



(b) 負荷時

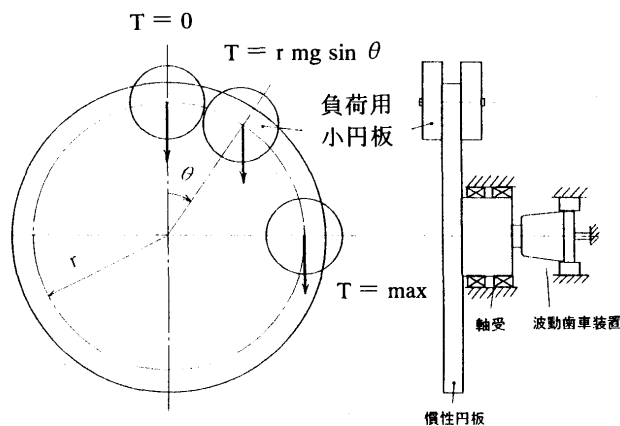


図4 慣性モーメントを一定にしたトルクの負荷方法

図5 丸棒をばね要素と考えた振動系の振動波形

一方、図6は現有のねじり試験機<sup>(6)</sup>を使って得られた丸棒のトルク-ねじれ角線図である。丸棒の一端を固定し、他端にトルクを0 N・m から徐々に 100N・m まで負荷し、そこから反対向きのトルクを負荷して-100N・m とした後に、0 N・m に戻すまでの間、負荷トルクとねじれ角の関係を描いたもので、横軸に負荷トルク N・m、縦軸にねじれ角 mrad (rad × 10<sup>-3</sup>) をとって示している。図6より、丸棒のねじれ特性はトルクの増加時と減少時ともに同じ経路となり、しかも原点を通る直線となることが確認できる。

ねじり試験による丸棒のねじり剛性  $k_s$  は、図6に示したグラフの傾きから求めることができるが、その傾きが一定の線形ばね特性を示していることから、丸棒をばね要素と考えた振動系の固有振動数は、負荷トルクの影響を受けないことが、図6から裏付けられる。

本実験で求めた丸棒のねじり固有振動数を式(2)に代入することで、ねじり剛性  $k_d$  が求められる。さらに弾性理論<sup>(7)</sup>を使って計算でも求めてみた。各方法によって求めた丸棒のねじり剛性をまとめて表2に示す。

表2より、ねじれ特性から算出したねじり剛性  $k_s$  より、固有振動数から算出したねじり剛性  $k_d$  の方がやや小さいが、7%程度以内で一致していることから、本実験装置や解析方法が妥当であることが確かめられた。

**3・2 波動歯車装置 (タイプ1) の固有振動数とねじり剛性** 図7はインボリュート歯形を有する通常の波動歯車装置の高速軸の回転を固定し、低速軸に慣性円板を取り付け、その波動歯車装置をねじりのばね要素と考

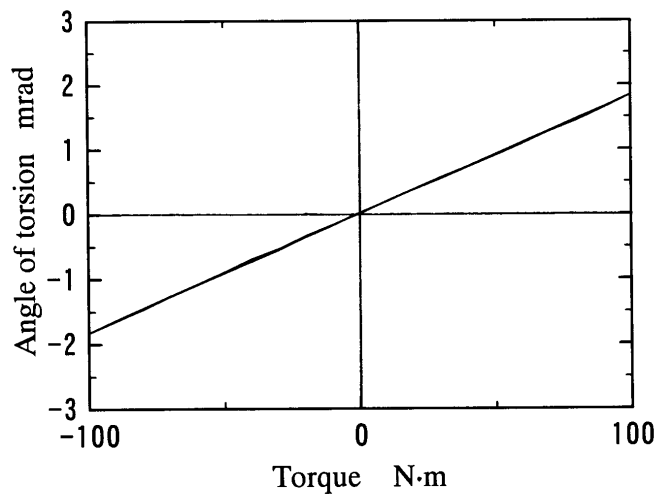


図6 丸棒のトルク-ねじれ角線図

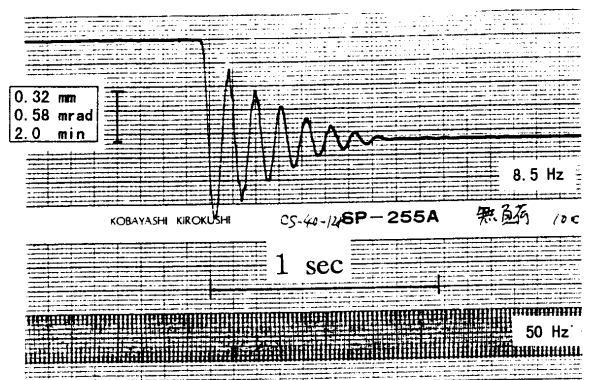
表2 丸棒のねじり剛性

ねじり試験によるねじり剛性 $k_s$		55.4
固有振動数によるねじり剛性 $k_d$	N・m/mrad	51.5
弾性理論によるねじり剛性 $k_t$		57.8

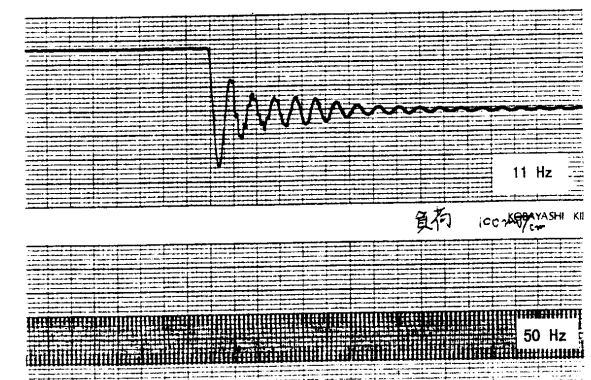
えた1自由度ねじり振動系の振動波形の測定結果であり、図7(a)はトルクを全く負荷しなかった  $T=0$  N・m の場合、図7(b)はトルクを負荷したときの一例として、 $T=107$  N・m の場合の振動波形を示した。

これらの振動波形をFFTで周波数分析して固有振動数を求めると、図7(a)の波形では 8.5Hz であることに対し、図7(b)の波形では 11.0Hz と、無負荷時に比べて負荷時の固有振動数の方が約 1.3 倍高くなっていることが認められた。また、振動を生じさせるために与えた初期変位が同じであるにもかかわらず、負荷時の振動振幅は無負荷時の振幅の2/3程度に小さくなっており、図5に示した丸棒の振動波形の場合とは様相が異なっている。そこで、いろいろな負荷トルクの大きさに対する波動歯車装置の固有振動数の変化を図8に示す。

図8は図4に示したトルクを負荷する要領で、トルク  $T=0$  N・m から 107N・m の間を 10 段階変化させながら、トルクの大きさが固有振動数に与える影響を示した図で、横軸に負荷したトルクの大きさを、縦軸に固有振動数をとって両者の関係を示している。図8より、 $T=50$  N・m 程度以内では固有振動数は 8.5Hz と一定であるが、50N・m を越えた付近から 9.0Hz、10.0Hz と急激に固有振動数が上昇していることがわかる。すなわち、負荷トルクを大きくしていくにつれて、固有振動数が上昇するという傾向があり、丸棒を使った同様の実験からは見られなかった現象である。



(a) 無負荷時



(b) 負荷時

図7 波動歯車装置 (タイプ1) の振動波形

一方、図9はタイプ1の波動歯車装置のトルク-ねじれ角線図であり、横軸にトルク、縦軸にねじれ角をとって両者の関係を示している。波動歯車装置のねじれ特性は、図6に示した丸棒のねじれ特性とは異なり、トルクを負荷して行くにつれてねじれ角の増加の割合が徐々に鈍くなっていく、いわゆる硬性ばね特性を示すことが特徴である。また、増加時のトルクに対するねじれ特性と、減少時のトルクに対するねじれ特性が、図9のグラフの横に示した矢印のように異なり、これらの現象は反対向きのトルクを負荷した場合にも同様に認められ、トルク-ねじれ角線図はヒステリシスループを描く。それゆえ、本実験で負荷したトルクの範囲内において、トルクの増加時のねじれ特性と減少時のねじれ特性の平均をとってできる曲線について、トルク $T$ とねじれ角 $\theta$ の関係をグラフの特徴から3次式で近似すると、次式を得た。

$$T = 16.0 \theta^3 + 54.4 \theta \quad \dots\dots (3)$$

ただし、ねじれ角 $\theta$ の単位は mrad、トルク $T$ は $N \cdot m$ で表しており、 $0 \leq \theta \leq 1.3$  mrad の範囲で適用される近似式である。

式(3)を $\theta$ で微分すると、ねじり剛性 $k_s$ を求めることができる。すなわち、

$$k_s = \frac{dT}{d\theta} = 48.0 \theta^2 + 54.4 \quad \dots\dots (4)$$

以上のようにして得られるねじり試験から算出したねじり剛性 $k_s$ 、ならびに種々の負荷トルクに対して測定された固有振動数から算出したねじり剛性 $k_d$ と、ねじれ角 $\theta$ の関係を図10に示す。図10において、●は固有振動数から求めたねじり剛性、実線は式(4)で表されるねじり試験から求めたねじり剛性であり、横軸にねじれ角、縦軸にねじり剛性をとって両者の関係を示している。

図10より、ねじれ角 $\theta$ が0.6mrad程度以下、負荷したトルクでいえば40 $N \cdot m$ 程度以下の低負荷領域では、固有振動数から求めたねじり剛性 $k_d$ は、式(4)で表されるねじれ特性から求めたねじり剛性 $k_s$ よりも大きい。例えばねじれ角 $\theta = 0$ のとき、 $k_d = 88.1 N \cdot m / mrad$ であることに對し、 $k_s = 54.4 N \cdot m / mrad$ であり、 $k_d$ は $k_s$ の1.6倍程度大きく算出されが、ねじれ角 $\theta$ が0.7mrad程度以上となる負荷領域では、 $k_d$ 、 $k_s$ ともに大きさや硬性ばね特性となる傾向は比較的良好一致していることが考察される。

低負荷領域で $k_d$ が $k_s$ に比べて大きくなる理由としては、負荷トルク $T = 0$ で振動していても、ねじり振動によって波動歯車装置はねじられており、それゆえ振動中の平均のねじり剛性は、ねじれ角 $\theta = 0$ のときのねじり剛性よりも当然大きくなるためと思われる。このことは、図7に示した振動波形の振幅が初期段階では波動歯車装置のねじれ角に換算して0.7mrad程度あることから推察できる。

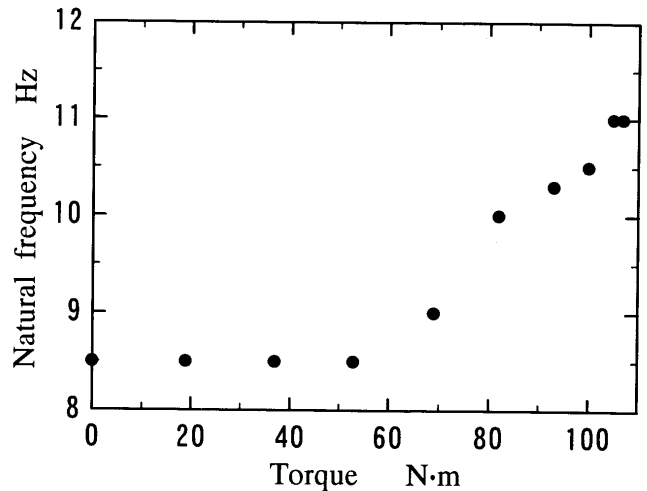


図8 負荷トルクに対する固有振動数の変化  
(タイプ1の波動歯車装置の場合)

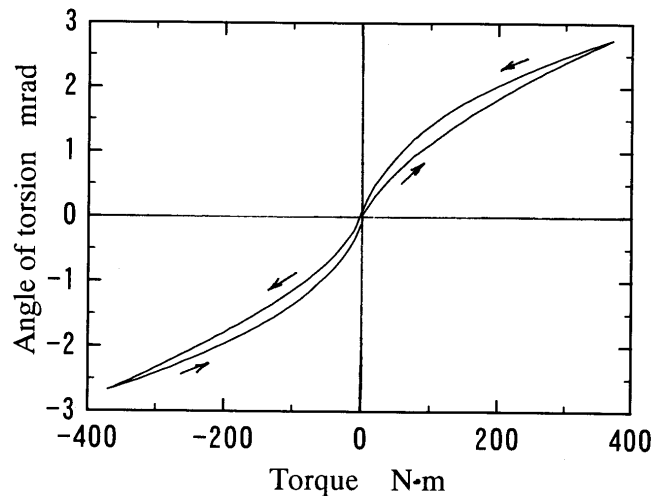


図9 波動歯車装置のトルク-ねじれ角線図  
(タイプ1の波動歯車装置の場合)

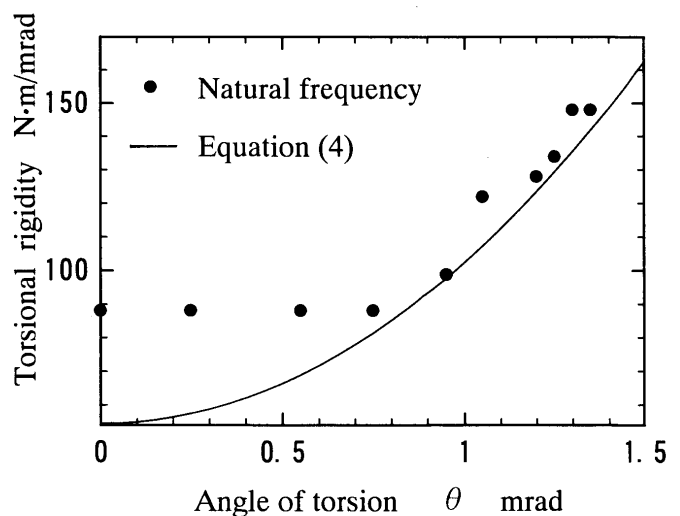


図10 ねじり剛性とねじれ角の関係  
(タイプ1の波動歯車装置の場合)

### 3・3 波動歯車装置（タイプ2）の固有振動数とねじり剛性

図 11 は IH 歯形を有する高剛性波動歯車装置に対して、タイプ1の波動歯車装置の場合と同様、いろいろなトルクを負荷した場合の固有振動数の測定結果を示したもので、図 8 と同様に横軸にトルク、縦軸に固有振動数をとって、両者の関係を示している。

タイプ2の波動歯車装置では、トルクを増加していても、無負荷時 10.8Hz であった固有振動数は上昇せず、トルク  $T = 105\text{N}\cdot\text{m}$  以上を負荷したところで、11.0Hz とわずかに上昇する程度であった。このように、トルクを負荷しても固有振動数がほとんど変化しないことが、タイプ1の波動歯車装置の場合と比べて大きな相違点である。この理由を、図 12 に関連して考察する。

図 12 はタイプ2の波動歯車装置のトルク-ねじれ角線図である。図 9 に示したタイプ1の波動歯車装置のねじれ特性と比べると、トルクの変化に対するねじれ角の変化の割合がほぼ一定であり、ヒステリシスの存在を除

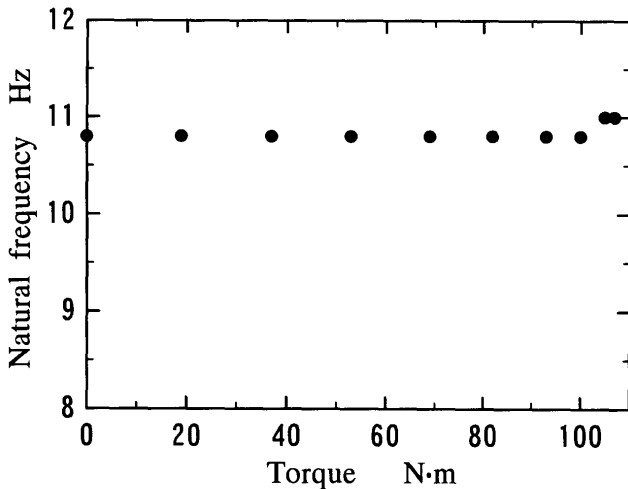


図 11 負荷トルクに対する固有振動数の変化  
(タイプ2の波動歯車装置の場合)

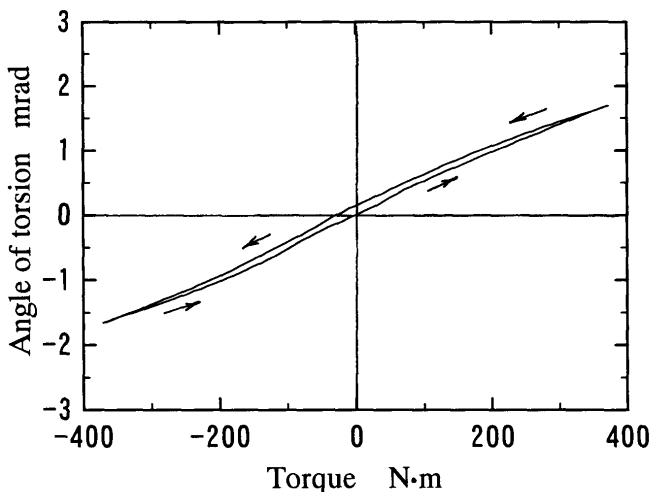


図 12 波動歯車装置のトルク-ねじれ角線図  
(タイプ2の波動歯車装置の場合)

けば、線形ばね特性を有する図 6 に示した丸棒のねじれ特性に近い。それゆえ、トルクを負荷した状態であっても波動歯車装置のねじり剛性はほとんど変化せず、負荷時の固有振動数が高くならなかったものと考察される。

タイプ2の波動歯車装置に関して、固有振動数から求めたねじり剛性は、 $k_d = 142\text{N}\cdot\text{m}/\text{mrad}$  となる。また、図 12 に示したねじれ特性のうち、 $T = 100\text{N}\cdot\text{m}$  以下の特性を直線と見なし、その傾きからねじり剛性を求めると、 $k_s = 174\text{N}\cdot\text{m}/\text{mrad}$  であった。 $k_d$  は  $k_s$  の 82 % 程度と小さく算出されるものの、トルクに対してねじり剛性が変化しないという傾向は一致している。

なお、低負荷領域において、固有振動数から考察したタイプ2の波動歯車装置のねじり剛性は、タイプ1に比べ 1.6 倍程度高かった。また、タイプ2の波動歯車装置は、線形に近いねじれ特性を有しているため、制御面では優れていることになる。

## 4. 結 言

波動歯車装置をねじりばね要素と考え、その高速軸を固定し、低速軸側に慣性円板を取り付けた 1 自由度振動系の固有振動数を利用するという動力学的手法、ならびにねじり試験によるねじれ特性という静力学的手法の両手法から、波動歯車装置のねじり剛性を求め、両者を比較検討した結果、次のような結論を得た。

- (1) タイプ1の波動歯車装置において、低負荷領域では固有振動数から求めたねじり剛性は、ねじれ特性から求めたねじり剛性よりやや高めに算出されるが、中負荷領域以上では両者ともに、大きさ、硬性ばね特性となる傾向は比較的良好に一致する。
- (2) タイプ2の波動歯車装置のねじれ特性は、線形に近い特性を示す。それゆえ、負荷トルクの影響を固有振動数はほとんど受けず、固有振動数から求めたねじり剛性もほぼ線形特性を示す。

## 参考文献

- (1) Musser C.W., The harmonic drive, Machine Design, 14 (1960), 160.
- (2) 会田俊夫, 歯車の技術史, 開発社, 改訂 4 版 (1981)
- (3) 杉本・他 5 名, 波動歯車装置のねじり剛性に関する実験的考察, 日本機械学会論文集 (C 偏), 56-530 (1990), 2732.
- (4) 杉本・他 4 名, 波動歯車装置のねじり剛性の数値解析, 日本機械学会論文集 (C 偏), 59-563 (1993), 2239.
- (5) 清沢芳秀, ハーモニックドライブの現状と将来, 設計工学, Vol.28 (1), 1993, 9.
- (6) 杉本・橘, 精密ねじり試験システムの設計製作とその評価, 宇部工業高等専門学校研究報告, 36 (1990), 21.
- (7) 湯浅亀一, 材料力学 (上巻), コロナ社 (1969), 244.