

並列形二重倒立振子の安定化と運動表示について

小田 秀男* 藤井 昭広** 内富 昭三*

On the Stability and the Display of Movement of a Parallel-type Double Inverted Pendulum

Hideo Oda* Akihiro Fujii** Syozo Uchitomi*

Abstract: This paper describes the simulation and the animation of movement of a parallel-type double inverted pendulum by pole assignment method. In practical device, parallel-type double inverted pendulum is difficult to make. However, the simulation and the animation are easy and useful to discuss about the stability and the action.

1 まえがき

先に、直列形二重倒立振子の運動をパソコンによってシミュレーションし、その挙動の数値解および、アニメーション表示に良好な結果を得た¹⁾。

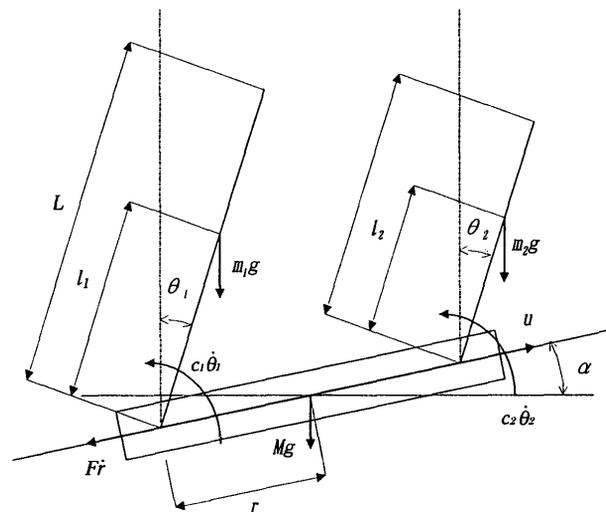
本報では、並列形二重倒立振子²⁾について、直列形と同様な手法で、シミュレーションを行い、安定領域が求められたので、その領域内外でのアニメーション表示について報告する。

また、台車に傾斜を与えた場合の挙動についても良好な結果³⁾を得たので、その一部を付記している。

2 数式モデル⁴⁾

図1は並列形二重倒立振子のモデル図である。この系について、ラグランジュの運動方程式を求めるのは、直列形二重倒立振子の場合¹⁾と同様に考えて求められる。

今、図1の基本モデル図で各記号を図の様に定めると、



M : 台車の質量 [Kg]

m_1, m_2 : 振子の質量 [Kg]

θ_1, θ_2 : 振子の角度 [rad]

l_1, l_2 : 振子の支点から重心までの距離 [m]

g : 重力加速度 [m/s^2]

r : 台車の基準値からの変位 [m]

u : 制御力 [N]

図 1 並列形二重倒立振子のモデル図

(1998年9月24日 受理)

* 宇部工業高等専門学校電気工学科

** 九州工業大学工学部電気工学科

台車について

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 \\ U_0 &= Mgr \sin \alpha \\ D_0 &= \frac{1}{2} F \dot{r}^2 \end{aligned}$$

(1. 1)

第一振子について

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[\left\{ \frac{d}{dt} (r \cos \alpha + l_1 \sin \theta_1) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (r \sin \alpha + l_1 \cos \theta_1) \right\}^2 \right] \\ U_1 &= m_1 g (r \sin \alpha + l_1 \cos \theta_1) \\ D_1 &= \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

(1. 2)

第二振子について

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\left\{ \frac{d}{dt} (r \cos \alpha + l_2 \sin \theta_2) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (r \sin \alpha + l_2 \cos \theta_2) \right\}^2 \right] \\ U_2 &= m_2 g (r \sin \alpha + l_2 \cos \theta_2) \\ D_2 &= \frac{1}{2} c_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

(1. 3)

となる。

(1. 1), (1. 2), (1. 3) 式を基本式¹⁾に代入

すると、

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_1 \left\{ (\dot{r} \cos \alpha + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (\dot{r} \sin \alpha - l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left\{ (\dot{r} \cos \alpha + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (\dot{r} \sin \alpha - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right\} \end{aligned}$$

(1. 4)

$$U = U_0 + U_1 + U_2$$

$$= Mgr \sin \alpha + m_1 g (r \sin \alpha + l_1 \cos \theta_1) + m_2 g (r \sin \alpha + l_2 \cos \theta_2)$$

(1. 5)

$$D = D_0 + D_1 + D_2$$

$$= \frac{1}{2} F \dot{r}^2 + \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{\theta}_2^2$$

(1. 6)

(1. 4), (1. 5), (1. 6) 式をラグランジュの運動方程式に代入すると、

台車の位置に関して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ (m_1 + m_2 + M) \dot{r} + m_1 l_1 \cos(\theta_1 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_2 \right\} \\ + (m_1 + m_2 + M) g \sin \alpha + F \dot{r} = u \end{aligned}$$

(1. 7)

よって

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + M) \ddot{r} + m_1 l_1 \cos(\theta_1 + \alpha) \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 + \alpha) \cdot \ddot{\theta}_2 \\ = -F \dot{r} + m_1 l_1 \sin(\theta_1 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ + u - (m_1 + m_2 + M) g \sin \alpha \end{aligned}$$

(1. 8)

第一振子に関して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ J_1 \dot{\theta}_1 + m_1 l_1 \cos(\theta_1 + \alpha) \cdot \dot{r} + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \right\} \\ + m_1 l_1 \sin(\theta_1 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_1 \dot{r} - m_1 l_1 g \sin \theta_1 + c_1 \dot{\theta}_1 = 0 \end{aligned}$$

(1. 9)

よって

$$m_1 l_1 \cos(\theta_1 + \alpha) \cdot \ddot{r} + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_1 = -c_1 \dot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \sin \theta_1$$

(1. 10)

第二振子について

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ J_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 + \alpha) \cdot \dot{r} + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \right\} \\ + m_2 l_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \cdot \dot{\theta}_2 \dot{r} - m_2 l_2 g \sin \theta_2 + c_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{aligned}$$

(1. 11)

よって

$$m_2 l_2 \cos(\theta_2 + \alpha) \cdot \ddot{r} + (J_2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta}_2 = -c_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2$$

(1. 12)

ここで、

$\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$ として、 $\cos \theta \cong 1, \sin \theta \cong \theta$ と

近似し、 $\dot{\theta}^2, \dot{r}\dot{\theta}, \dot{r}\dot{\theta}$ の項を無視して、線形

近似をすると、

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + M) \ddot{r} + m_1 l_1 \cos \alpha \cdot \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \alpha \cdot \ddot{\theta}_2 \\ = -F \dot{r} + u - (m_1 + m_2 + M) g \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$m_1 l_1 \cos \alpha \cdot \ddot{r} + (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_1 = m_1 l_1 g \theta_1 - c_1 \dot{\theta}_1 \quad (1.14)$$

$$m_2 l_2 \cos \alpha \cdot \ddot{r} + (J_2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta}_2 = m_2 l_2 g \theta_2 - c_2 \dot{\theta}_2 \quad (1.15)$$

これを行列で表わすと

$$\begin{aligned} L_1 \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2 + M) g \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

ただし

$$L_1 = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + M & m_1 l_1 \cos \alpha & m_2 l_2 \cos \alpha \\ m_1 l_1 \cos \alpha & J_1 + m_1 l_1^2 & 0 \\ m_2 l_2 \cos \alpha & 0 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

今、状態変数 \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad \text{ただし } x_0 = \begin{bmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

と定義して、行列を用いて表わすと、

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_3 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

よって、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u + \mathbf{w} \quad (1.20)$$

ただし

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & E_3 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = L_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 l_1 g & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = L_1^{-1} \begin{bmatrix} -F & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = L_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = L_1^{-1} \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2 + M) g \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

一方、出力として、 r, θ_1, θ_2 、とすると、出力方程式は

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (1.22)$$

ただし、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.23)

以上、(1.20) 式、(1.22) 式から、並列形二重形倒立振子の数式モデルが得られた。

3 シミュレーションの実行結果

直列形二重倒立振子の場合と同様な考えかたで、シミュレーションを行う。極を以下のように設定した時の、それぞれのシミュレーションの結果を示す。

なお、c) は定値外乱として、レールに傾斜として、 $z = 0.09\text{rad.}$ を与えた場合である。

3.1 極の設定

極、 λ を a), b), c) のように設定した場合につき、それぞれ求めた。

a) 虚軸から離れている場合

$$\lambda_1, \lambda_2 = -15 \pm j5$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -5 \pm j0$$

$$\lambda_5, \lambda_6 = -4 \pm j0$$

b) 虚軸に近い場合

$$\lambda_1, \lambda_2 = -5 \pm j5$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -5 \pm j0$$

$$\lambda_5, \lambda_6 = -4 \pm j0$$

c) 定値外乱がある場合

$$\lambda_1, \lambda_2 = -5 \pm j5$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -5 \pm j0$$

$$\lambda_5, \lambda_6 = -4 \pm j0$$

3.2 実行結果

A) 極の配置と時間応答結果

台車の位置、振子の角度、制御力のシミュレ

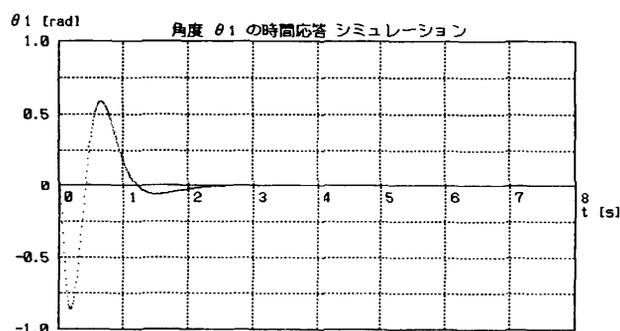
ーション結果を図 2 から図 7 にそれぞれ示す。

a) 虚軸から離れている場合



何かキーを押して下さい

① 台車の位置



何かキーを押して下さい

② 第 1 振子の傾き



何かキーを押して下さい

③ 第 2 振子の傾き



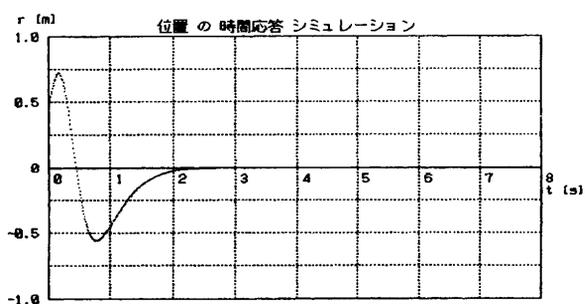
何かキーを押して下さい

④ 制御力

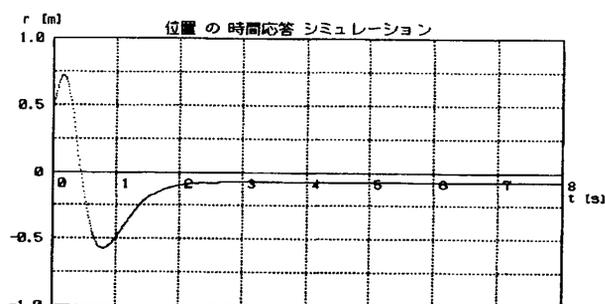
図 2 シミュレーション結果

b) 虚軸に近い場合

c) 定置外乱のある場合



何かキーを押して下さい
① 台車の位置



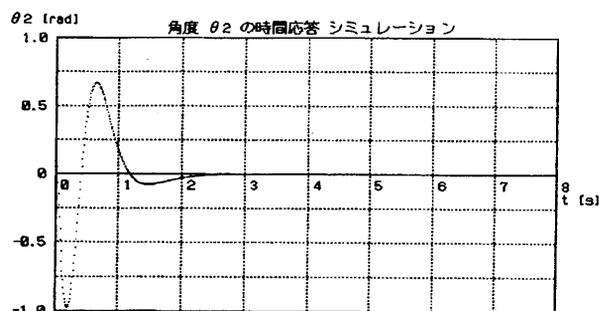
何かキーを押して下さい
① 台車の位置



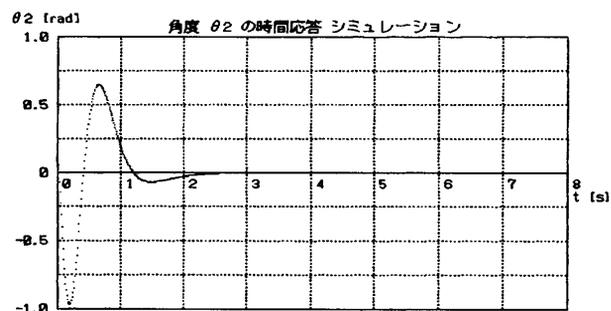
何かキーを押して下さい
② 第1振子の傾き



何かキーを押して下さい
② 第1振子の傾き



何かキーを押して下さい
③ 第2振子の傾き



何かキーを押して下さい
③ 第2振子の傾き



何かキーを押して下さい
④ 制御力



何かキーを押して下さい
④ 制御力

図 3 シミュレーション結果

図 4 シミュレーション結果

B) 極の配置と動画表示

a) 虚軸から離れている場合

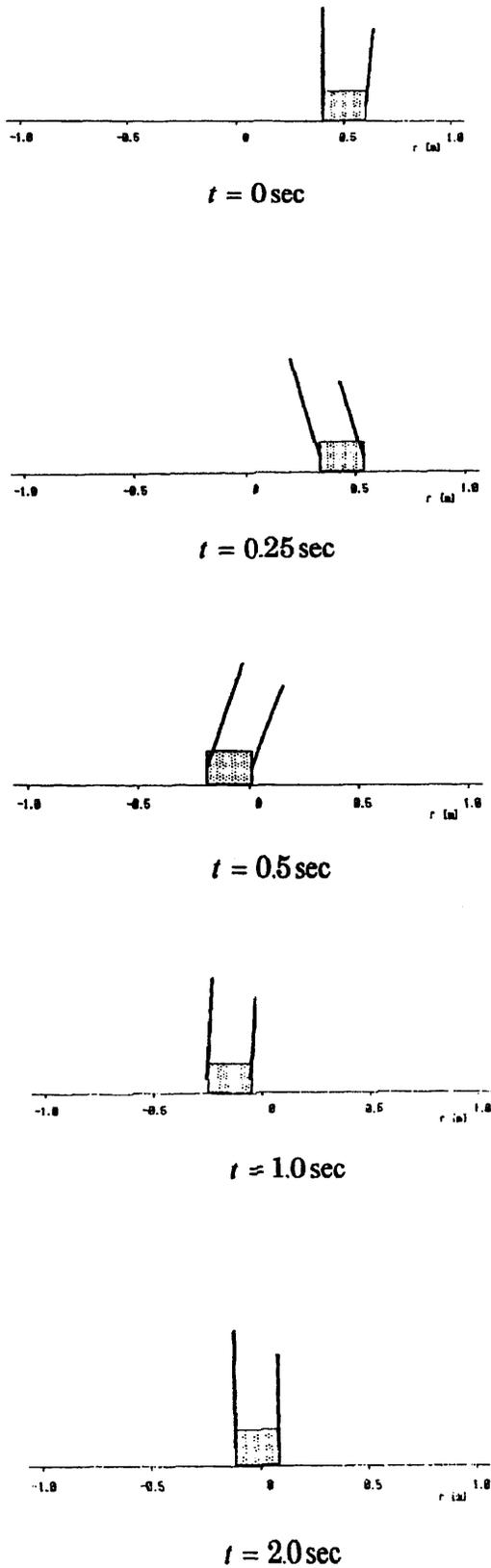


図 5 アニメーション結果

b) 虚軸に近い場合

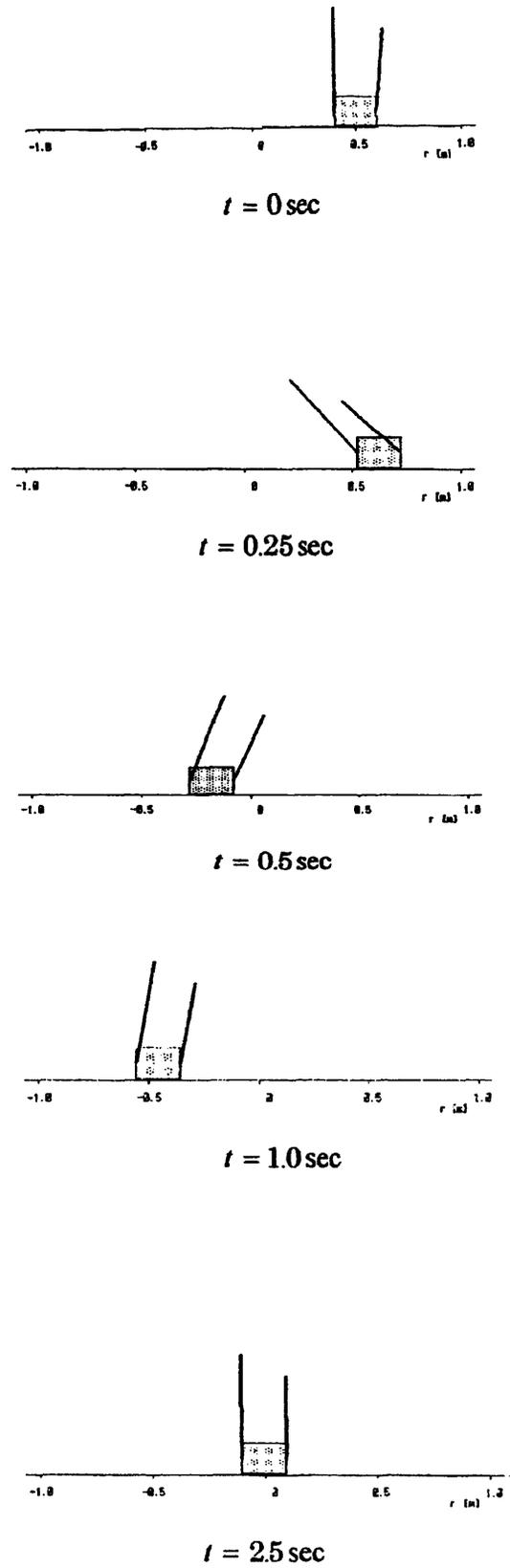
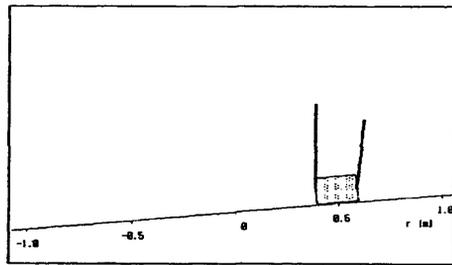
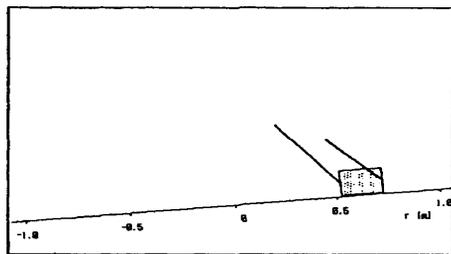
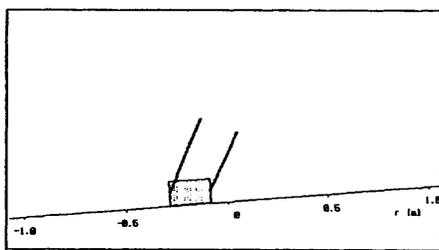
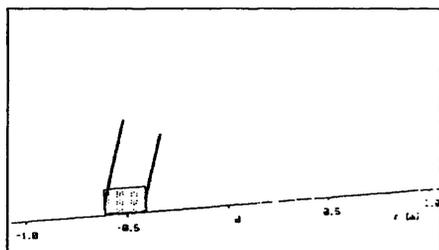
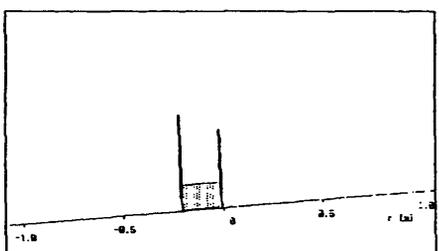


図 6 アニメーション結果

c) 定置外乱のある場合

 $t = 0 \text{ sec}$  $t = 0.25 \text{ sec}$  $t = 0.5 \text{ sec}$  $t = 1.0 \text{ sec}$  $t = 2.0 \text{ sec}$

4 あとがき

直列形二重倒立振子の場合と同様に、並列についても、そのシミュレーションと動画表示を得ることができた。観測の結果、直列形では、第一振子と第二振子の関係が、挙動にあまり大きな影響を与えないのに対し、並列形では、両者の関係が挙動に大きな影響を与える。これは、振子系の物理パラメータによって特性がある程度決まってしまうため、極の設定の変化によって、挙動はあまり左右されないようである。このことは、定置外乱（台車の傾斜）を台車に与えた場合にも同様で、定常値に偏差を示した。

本シミュレーション手法により、パラメータを自由に変化させることが可能となり、倒立の動作を観測できるなど、工学的にも有効性が期待できる。

参考文献

- 1) 小田、波田、藤井、内富、直列形二重倒立振子の安定化と運動表示について、宇部高専研究報告、44号、23-32 (1998)
- 2) 川谷、山口：並列型2重倒立振子系の解析とその安定化、計測自動制御学会論文集、vol. 29, No. 5, 572-580 (1993)
- 3) 藤井、小田、内富、倒立振子のシミュレーションと表示に関する研究 (2)、1997年宇部高専電気工学科卒業論文集
- 4) 梶原：制御系CAD コロナ社 (1998)

図 7 シミュレーション結果