直列形二重倒立振子の安定化と運動表示について

On the Stability and the Display of Movement of a Series-type Double Inverted Pendulum

小田 秀男[*]　波田 尚哉[**]　藤井 昭広[***]　内冨 昭三[*]

Abstract: This paper describes the simulation method and the stability of movement of a series-type double inverted pendulum by pole assignment method.
For understanding the movement and the phase of two pendulums, it is useful for us to display the dynamic picture of them.

1 まえがき

倒立振子装置は、近年、色々の形式の物が開発製作されている[1]。棒を１本ないし２本連結して立て、下端を水平方向に駆動し、鉛直に一直線になるような装置であるが、それは、現代制御理論の有効性を検証するための実験的な好例として、認識されているためである。

筆者らも、学生実験あるいは実習用として装置の試作を進めているが、その試作運転にあたっては、シミュレーションの結果を積極的に利用する事が不可欠と考えられる。このための、ＣＡＤソフトとして、ＭＡＴＬＡＢ[2]を用いている。

しかし、このソフトはどちらかと云えば平面的な表現方法が強く、学生実験などの見地からすれば、若干直感的な表現不足が感じられる。

そこで、パソコンにより倒立振子の運動をシミュレーションし、その動作を観測出来るよう動画表示ソフトを開発し、数値計算結果のアニメイション表示を試みた。

その結果、一本のみについては、既に良好な結果を得たので[3]、今回は二本直列形について報告する。

* 宇部工業高等専門学校電気工学科
** 豊橋技術科学大学工学部
*** 九州工業大学工学部電気工学科

2 数式モデル[4]

図１は直列形二重倒立振子のモデル図であり、この系についてラグランジュの運動方程式を求める。台車、第一振子、第二振子についての運動エネルギー、位置エネルギー、損失エネルギーをそれぞれ

$T_0, U_0, D_0, T_1, U_1, D_1, T_2, U_2, D_2$　とすると

（1） 台車について

$$T_0 = \frac{1}{2} M \dot{r}^2$$
$$U_0 = M g r \sin\alpha$$
$$D_0 = \frac{1}{2} F \dot{r}^2 \qquad (2.1)$$

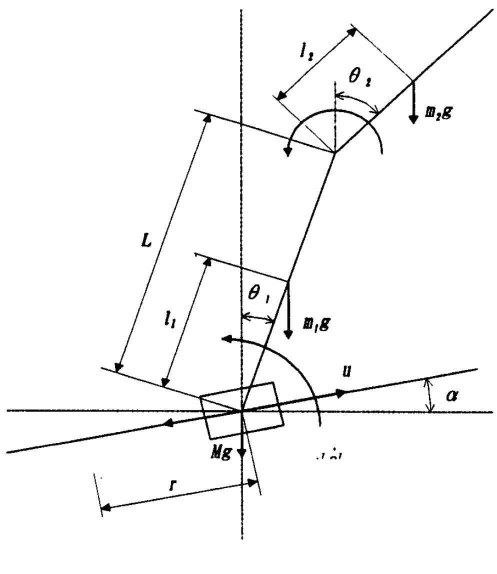


図 1 直列形二重倒立振子のモデル図

(2)　第一振子について

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_1\left\{\frac{d}{dt}\left(r\cos\alpha + l_1\sin\theta_1\right)\right\}^2 + \frac{1}{2}m_1\left\{\frac{d}{dt}\left(r\sin\alpha + l_1\cos\theta_1\right)\right\}^2$$

$$U_1 = m_1 g\left(r\sin\alpha + l_1\cos\theta_1\right)$$
$$D_1 = \frac{1}{2}c_1\dot\theta_1^2 \tag{2.2}$$

(3)　第二振子について

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\dot\theta_2^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{\frac{d}{dt}\left(r\cos\alpha + L\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2\right)\right\}^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{\frac{d}{dt}\left(r\sin\alpha + L\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right)\right\}^2$$

$$U_2 = m_2 g\left(r\sin\alpha + L\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right)$$
$$D_2 = \frac{1}{2}c_2\left(\dot\theta_2 - \dot\theta_1\right)^2 \tag{2.3}$$

の式が成り立つ。

(4)　二重倒立振子系の運動エネルギーT、位置エネルギーU、損失エネルギーDはそれぞれ

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_1 + T_2 \\ U &= U_0 + U_1 + U_2 \\ D &= D_0 + D_1 + D_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

となり、台車には、力uが働いていることから、ラグランジュの運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial D}{\partial \dot r} &= u \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot\theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot\theta_2} &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

が成り立つ。

(2.1)、(2.2)、(2.3) 式を (2.4) 式の各式に代入すと、

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\Big[&\left(m_1+m_2+M\right)\dot r^2 + \left(J_1+m_1l_1^2+m_2L^2\right)\dot\theta_1^2 + \left(J_2+m_2l_2^2\right)\dot\theta_2^2 \\ &+ 2\left\{\left(m_1l_1+m_2L\right)\cos\left(\theta_1+\alpha\right)\right\}\dot r\dot\theta_1 + 2m_2l_2 - \cos\left(\theta_2+\alpha\right)\dot r\dot\theta_2 \\ &+ 2m_2l_2L\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\dot\theta_1\dot\theta_2\Big] \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$U = \left(m1+m2+M\right)g\sin\alpha\cdot r + \left(m_1l_1+m_2L\right)g\cos\theta_1 + m_2l_2 g\cos\theta_2 \tag{2.7}$$

$$D = \frac{1}{2}F\dot r^2 + \frac{1}{2}\left(c_1+c_2\right)\dot\theta_1^2 - c_2\dot\theta_1\dot\theta_2 + \frac{1}{2}c_2\dot\theta_2 \tag{2.8}$$

よつて (2.5) に代入し、行列を用いて表すと、

$$K_0\begin{bmatrix}\ddot r \\ \ddot\theta_1 \\ \ddot\theta_2\end{bmatrix} = K_1\begin{bmatrix}\dot r \\ \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2\end{bmatrix} + K_2 + K_3u + K_4 \tag{2.9}$$

ただしK_0, K_1　は3行の行列　K_2, K_3, K_4 は3行の列ベクトルで

$$K_0 = \begin{bmatrix} m_1+m_2+M & (m_1l_1+m_2l_2)\cos(\theta_1+\alpha) & m_2l_2\cos(\theta_2+\alpha) \\ (m_1l_1+m_2L)\cos(\theta_1+\alpha) & J_1+m_1l_1^2+m_2L^2 & m_2l_2L\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2l_2\cos(\theta_2+\alpha) & m_2l_2L\cos(\theta_1-\theta_2) & J_2+m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -F & (m_1l_1+m_2L)\sin(\theta_1+\alpha)\cdot\dot\theta_1 & m_2l_2\sin(\theta_2+\alpha)\cdot\dot\theta_2 \\ 0 & -(c_1+c_2) & -m_2l_2L\sin(\theta_1-\theta_2)\cdot\dot\theta_2+c_2 \\ 0 & m_2l_2L\sin(\theta_1-\theta_2)\cdot\dot\theta_2+c_2 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (m_1l_1+m_2L)g\sin\theta_1 \\ m_2l_2g\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -(m_1+m_2+M)g\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

のように与えられる。

今、状態変数を

$$s=\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2\\ \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_0\\ \dot s_0\end{bmatrix}\qquad \text{ただし}\quad s_0=\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\tag{2.11}$$

と定義すると、(2.9) 式から二重倒立振子系の非線型状態方程式は、

$$\dot s=\begin{bmatrix} \dot s_0\\ K_0^{-1}\left(K_1\dot s_0+K_2+K_3u+K_4\right)\end{bmatrix}\tag{2.12}$$

となる。

ところで、二重倒立振子系については、その制御目的から倒立状態近傍での挙動を表す状態方程式を知れば十分である。そこで、(2.12) 式で、静止状態を表す $s=0$ において1次近似すると、二重倒立振子系の状態方程式として、次の線形化した状態方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \ddot r\\ \ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & E'_3\\ A'_{21} & A'_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2\\ \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ B'_2\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 0\\ w'_2\end{bmatrix}\tag{2.13}$$

よって、

$$\dot s=A's+B'u+w'\tag{2.14}$$

ただし

$$A'=\begin{bmatrix} 0 & E'_3\\ A'_{21} & A'_{22}\end{bmatrix}$$

$$B'=\begin{bmatrix} 0\\ B'_2\end{bmatrix}$$

$$w'=\begin{bmatrix} 0\\ w'_2\end{bmatrix}$$

$$A'_{21}=L_1^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & (m_1l_1+m_2L)g & 0\\ 0 & 0 & m_2l_2g\end{bmatrix}$$

$$A'_{22}=L_1^{-1}\begin{bmatrix} -F & 0 & 0\\ 0 & -c_1-c_2 & c_2\\ 0 & c_2 & -c_2\end{bmatrix}$$

$$B'_2=L_1^{-1}K_3$$

$$w'_2=L_1^{-1}K_4$$

$$L_1=\begin{bmatrix} m_1+m_2+M & (m_1l_1+m_2L)\cos\alpha & m_2l_2\cos\alpha\\ (m_1l_1+m_2L)\cos\alpha & J_1+m_1l_1^2+m_2L^2 & m_2l_2L\\ m_2l_2\cos\alpha & m_2l_2L & J_2+m_2l_2^2\end{bmatrix}\tag{2.15}$$

そして、さらに新しい状態 x を

$$x=\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2-\theta_1\\ \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2-\dot\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0\\ \dot x_0\end{bmatrix}\qquad \text{ただし}\quad x_0=\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2-\theta_1\end{bmatrix}\tag{2.16}$$

と選び

$$x=\begin{bmatrix} N & 0\\ 0 & N\end{bmatrix}s\qquad \text{ただし}\quad N=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\tag{2.17}$$

座標変換すると、次のような数式モデルを得る。

$$\begin{bmatrix} \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2-\dot\theta_1\\ \ddot r\\ \ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2-\ddot\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & E_3\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ \theta_1\\ \theta_2-\theta_1\\ \dot r\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2-\dot\theta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ B_2\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 0\\ w_2\end{bmatrix}\tag{2.18}$$

よって、

$$\dot{x} = Ax + Bu + w \tag{2.19}$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_3 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = NA'_{21}N^{-1}$$

$$A_{22} = NA'_{22}N^{-1}$$

$$B_2 = NB'_2$$

$$w_2 = Nw'_2 \tag{2.20}$$

一方、出力として　r, θ_1, $\theta_2-\theta_1$ とすると、出力方程式は

$$y = C\,x \tag{2.21}$$

ただし

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

以上、(2.19) 式 (2.21) 式から、直列形二重倒立振子の数式モデルが得られた 。

3　シミュレーションの方法

二重倒立振子系の運動方程式から得られた式から、その時間的な応答を知るには状態方程式を時間について解けばよい。

ここで、一階の微分方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \tag{3.1}$$

を初期条件

$t = t_0$　　のとき　　$x_i = a_i$　　$(i = 1, 2, \cdots, n)$

のもとで解く。いま

$$F_i(x_1, \cdots, x_n, t) = \int f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt \tag{3.2}$$

とすると

$$x_i(t) = F_i(x_1, \cdots, x_n, t) + c_i$$

$$x_i(t_0) = F_i(a_1, \cdots, a_n, t_0) + c_i = a_i \quad \text{より}$$

$$c_i = a_i - F_i(a_1, \cdots, a_n, t_0)$$

$$\begin{aligned} \therefore\ x_i(t) &= F_i(x_1, \cdots, x_n, t) - F_i(a_1, \cdots, a_n, t_0) + a_i \\ &= \int_{t_0}^{t} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt + a_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

$t = t_k$ のとき

$$x_i(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt + a_i \tag{3.4}$$

$t = t_{k+1}$　のとき

$$\begin{aligned} x_i(t_{k+1}) &= \int_{t_0}^{t_{k+1}} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt + a_i \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt + \int_{t_0}^{t_k} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt + a_i \\ &= x_i(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

よって, (3.5)式の第二項を数値計算により近似計算すれば、微分方程式を解くことができる。

本研究では、４次のルンゲクッタ法 [5] を用いて計算を行った。(3.6)式にその式を示す。

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(x_1, \cdots, x_n, t)\,dt \fallingdotseq \frac{1}{6}\left(u_{1i} + 2 \times u_{2i} + 2 \times u_{3i} + u_{4i}\right) \tag{3.6}$$

ただし

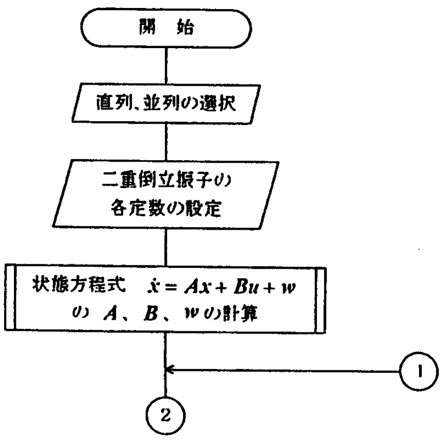
$$u_{1i} = f_i(x_1(t_k), x_2(t_k), \cdots, x_n(t_k), t_k)\Delta t$$
$$u_{2i} = f_i\left(x_1(t_k) + \frac{u_{11}}{2}, x_2(t_k) + \frac{u_{12}}{2}, \cdots, x_n(t_k) + \frac{u_{1n}}{2}, t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$
$$u_{3i} = f_i\left(x_1(t_k) + \frac{u_{21}}{2}, x_2(t_k) + \frac{u_{22}}{2}, \cdots, x_n(t_k) + \frac{u_{2n}}{2}, t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$
$$u_{4i} = f_i(x_1(t_k) + u_{31}, x_2(t_k) + u_{32}, \cdots, x_n(t_k) + u_{3n}, t_k + \Delta t)\Delta t$$
$\Delta t = t_{k+1} - t_k$ はきざみ幅

(3.7)

4　シミュレーションのアルゴリズム

プログラムは図2のような手順で作成した。

(1) 二重倒立振子系の各定数を設定。
　(振子の質量、長さ 等)
(2) 状態方程式の行列　A, B, w の計算。
　(2.19) 式において、(2.15)、(2.17)、(2.20) から求める。
(3) 極配置法によるフイードバック係数の算出。
(4) ルンゲクッタ法により状態方程式を解く。
　(3.5)、(3.6)、(3.7)式から時間応答を求める。
(5)　(4) より数値解を表示。
(6)　(4) より数値をグラフ表示。
(7)　(4) より動画表示。



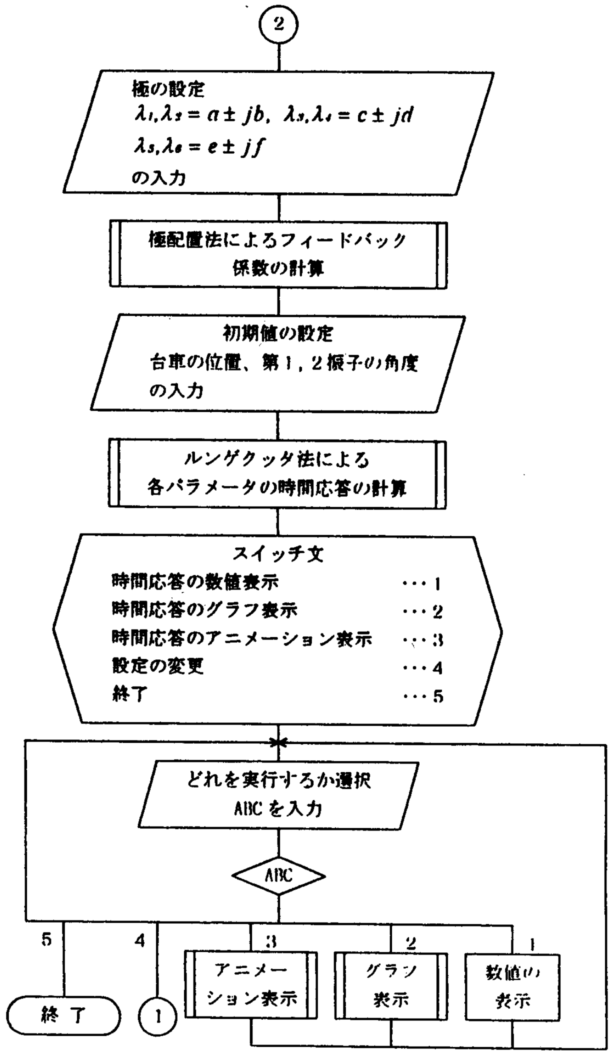


図2 全体の流れ図

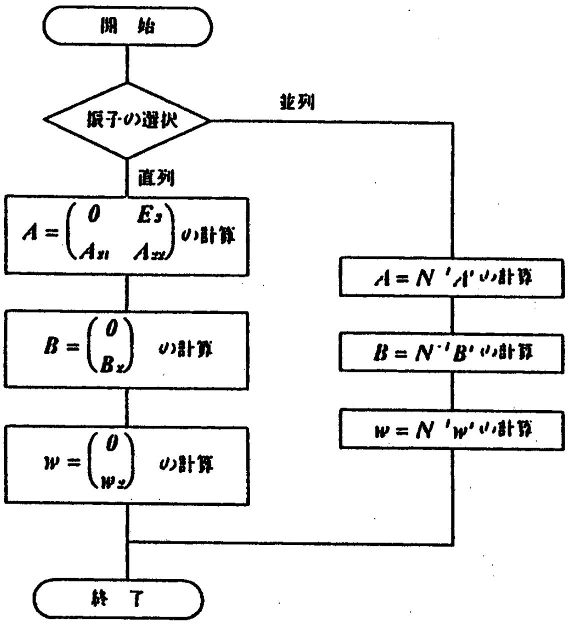


図3 状態方程式の計算

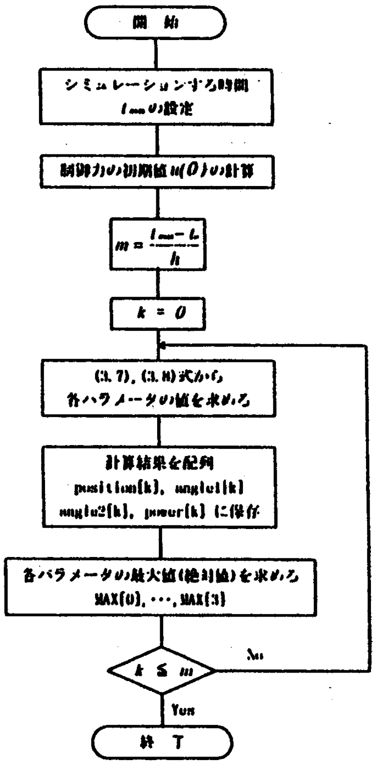


図5 ルンゲクッタ法によるパラメータの計算

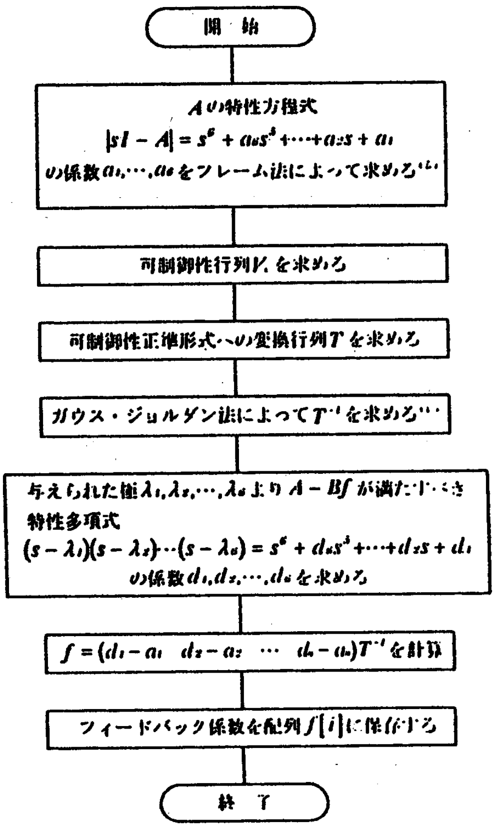


図4 極配置法によるフィードバック係数の計算

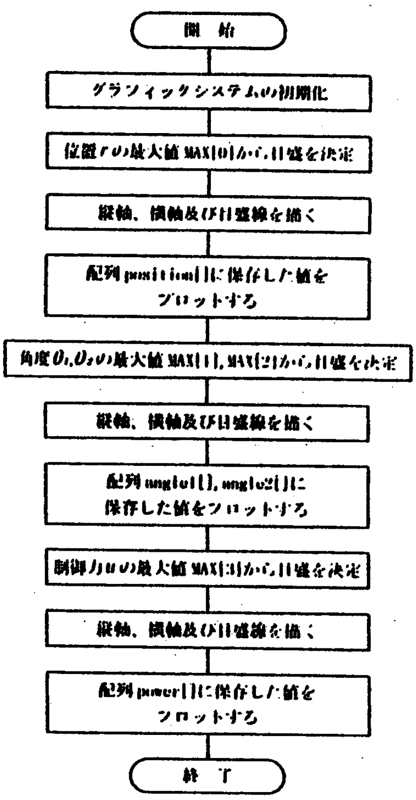


図6 グラフ表示

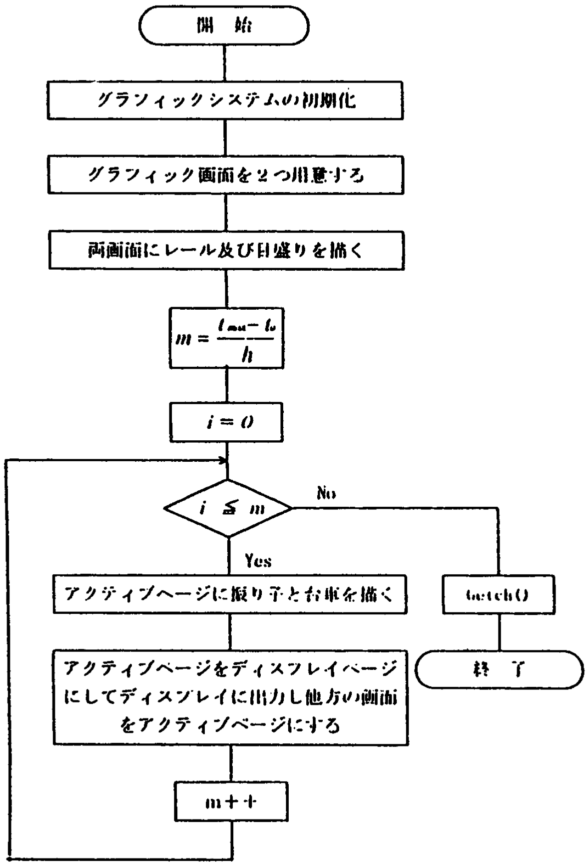


図7アニメーションの表示

5 シミュレーションの実行

5−1 プログラムの実行方法

作成したプログラムは、直列形二重倒立振子系に対して状態フィードバック制御したときの時間応答をシミュレーションするものである。この系の振子、質量などの各定数はプログラムの中で設定しているので、極および初期値を入力すればよい。そうすると、シミュレーション結果の表示は、数値表示、グラフの表示、そして、動画表示の3つから、選んでそれぞれを表示することが出来る。以下にその表示を示す。

1） 系の設定した各定数が画面に表示される。

二重倒立振子のシミュレーション	
第1振子の質量	0.103 kg
第2振子の質	0.070 kg
第1振子の重心までの距離	0.350 m
第2振子の重心までの距離	0.177 m
第1振子の慣性モーメント	0.003000 kg·m^2
第2振子の慣性モーメント	0.001527 kg·m^2
第1振子の摩擦	0.001920 kg·m^2/s
第2振子の摩擦係	0.000893 kg·m^2/s
台車の質量	0.574 kg
台車の摩擦係数	2.810 kg·m^2/s
第1振子の長さ	0.379 m
第2振子の長さ	0.300 m
レールの傾き	0.000 rad

2） 極を入力する。ただし、極は共役複素とする。

```
極の配置を決めて下さい
  λ1=a+jb , λ2=a-jb を入力して下さい
a=-5
b=2
  λ3=c+jd , λ4=c-jd を入力して下さい
c=-4
d=3
  λ5=e+jf , λ6=e-jf を入力して下さ
e=-3
f=0
```

3） 台車の位置及び振子の角度の初期値を入力する。

```
初期値を入力してください
台車の位置は ?
 r=0.5
第1振子の角度θ1は ?
 θ1=0.1
第2振子の角度θ2は ?
 θ2=0
```

4）方程式$\dot{x} = Ax + Bu + w$ のA，B，W の計算結果を表示する。更にリターンキーーを押すと極配置法によって計算されたフィードバック係数が示される。（各数値は省略）

5）シミュレーションの表示方法を選択する

シミュレーションを選択して下さい	
時間応答の数値表示	—— 1
時間応答のグラフ表示	—— 2
アニメーション	—— 3
設定を変える	—— 4
終了する	—— 5
どのシミュレーションにしますか？	

5－2　極の配置と時間応答

二重倒立振子系の各定数および初期条件は以下のように設定した。

二重倒立振子系の各定数	
第1振子の質量	0.103 kg
第2振子の質量	0.070 kg
第1振子の重心までの距離	0.225
第2振子の重心までの距離	0.177 m
第1振子の慣性モーメント	0.001738 kgm^2
第2振子の慣性モーメント	0.000731kgm^2
第1振子の摩擦係数	0.001920 kgm^2/s
第2振子の摩擦係数	0.000893 kgm^2/s
台車の質量	0.574 kg
台車の摩擦係数	2.810 kgm^2/s
第1振子の長さ	0.450 m
第2振子の長さ	0.354 m
レールの傾き	0.000 rad
初期値	
台車の位置	r= 0.5　m
第1振子の角度	θ_1 = 0.0　rad
第2振子の	θ_2 = 0.1　rad

5－3　シミュレーション結果

極をa)，b)のように設定したときのシミュレーションの結果を示す。

a）虚軸から離れている場合

λ_1, λ_2=$-5\pm j5$，λ_3, λ_4=$-5\pm j0$

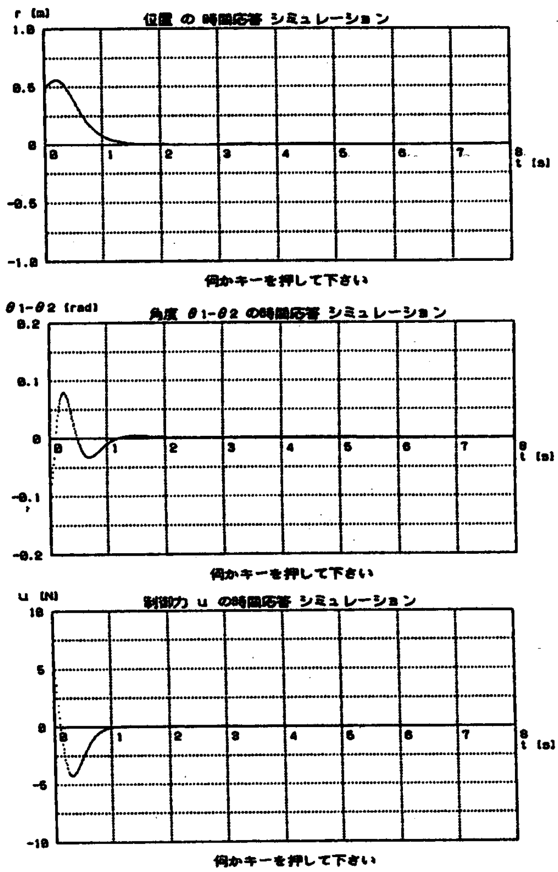
λ_5, λ_6=$-4\pm j0$

b）虚軸に近い場合

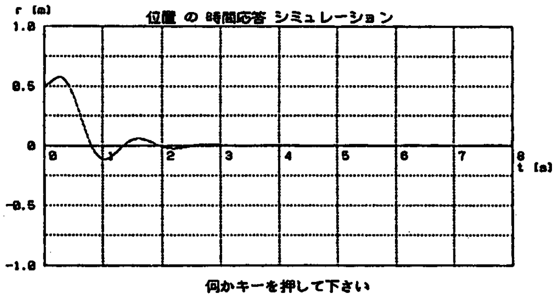
λ_1, λ_2=$-1\pm j5$，λ_3, λ_4=$-5\pm j0$

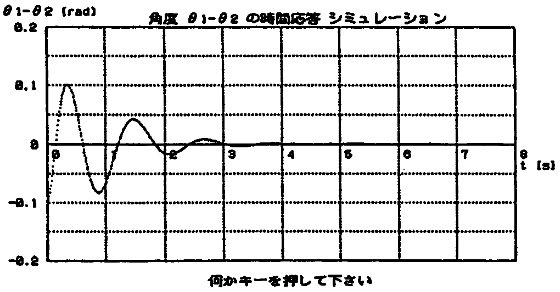
λ_5, λ_6=$-4\pm j0$

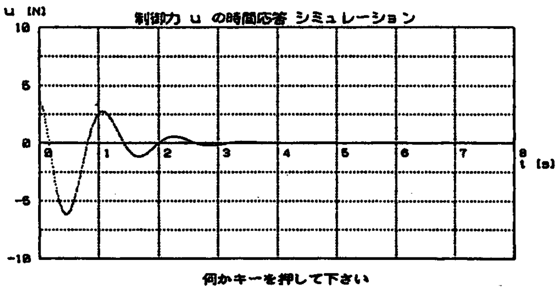
a）虚軸から離れている場合



b） 虚軸から近い場合

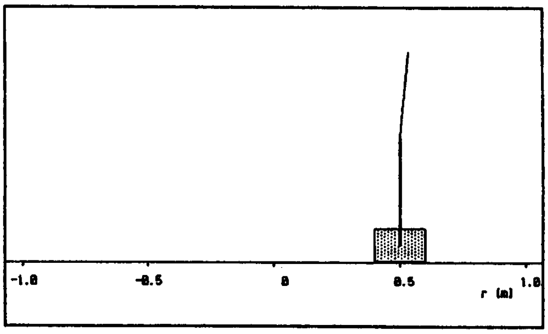




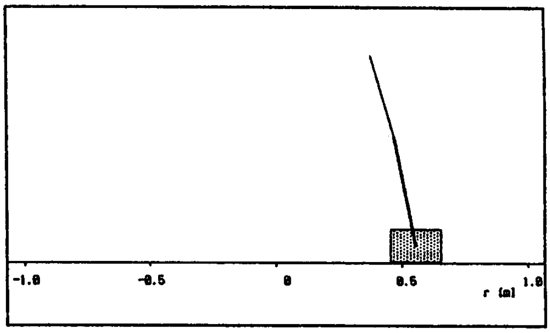


5－3 極の配置と動画表示

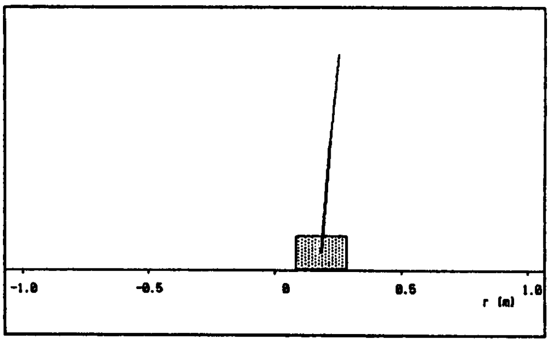
a） 虚軸から離れている場合



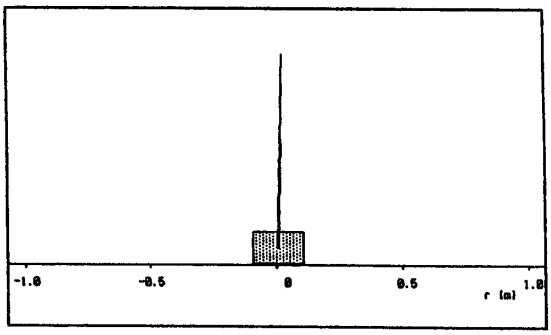
t = 0 sec



t = 0.25 sec

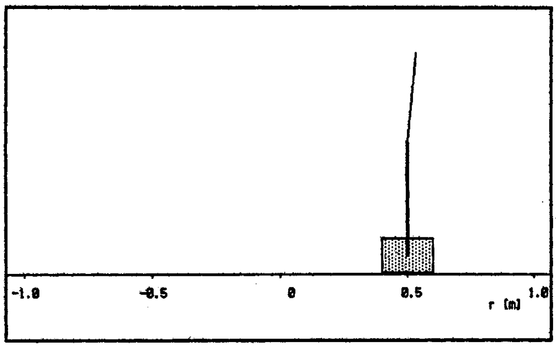


t = 0.75 sec

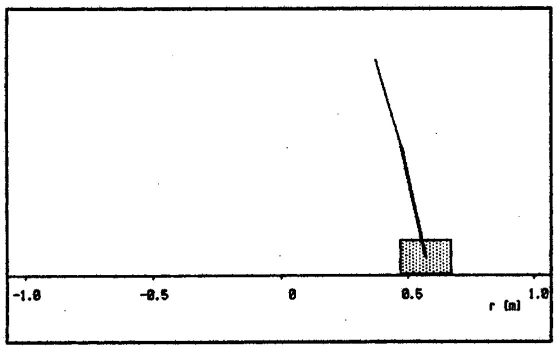


t = 1.5 sec

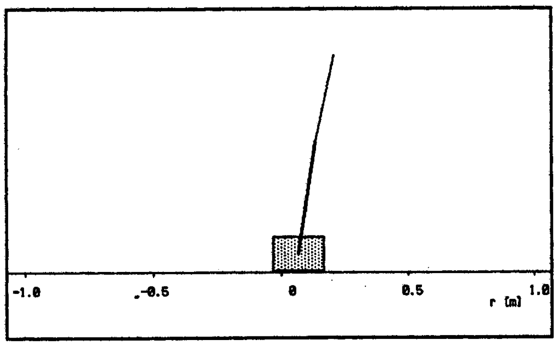
b）虚軸に近い場合



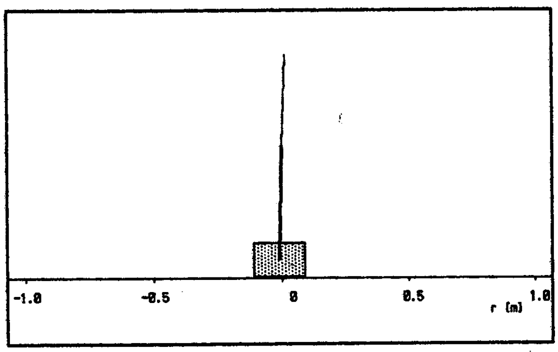
t＝ 0 sec



t＝ 0.25 sec



t＝ 0.75 sec



t＝ 2.0 sec

6 あとがき

現代制御理論は大規模複合システムで多入力多出力制御系に適用するとき有効である。近似・線形化が必要であるため、実系への適応が困難なことが多いので、シミュレーションで検討することが有効になる。単なる数値計算でなく、実系に即した実験装置としての倒立振子を設計するにあたり、各部品の仕様を決定できる。また、極配置の設定から系の安定性を動画として観察し、応答波形をも観測できたので、初期の目的を達成した。

今後は、外乱を考慮した場合の挙動や対策について検討したい。さらに並列形二重倒立振子のシミュレーションについても検討を進める予定である。

参考文献

1）第31回 学術講演会 デモセッション資料集 1992. 7、計測自動制御学会
2）サイバネットシステムk.k. MATLAB ユーザーズガイド
3） 波田、小田、内冨 ：倒立振子のシミュレーションとディスプレイに関する研究 1996.年 宇部高専電気工学科卒業論文集
4）梶原： 制御系CAD コロナ社 (1988)
5）平田： Turbo C による科学計算入門 共立出版

(平成9年9月24日受理)