# 固体中の多数の電子のランダム運動平均自由時間に対する２種類の定義

岡村好庸*　吉田正幸**

# Two types of definitions for mean free time of random motion of many electrons in solid

Yoshinobu OKAMURA and Masayuki YOSHIDA

## Abstract

In the classical theory for electric conductivity and mobility in solid, electrons are assumed to migrate randomly and their mean free time is defined. There are two types of the definitions, one by Uemura and the other by Shockley. They are different by a factor 2 each other. Shockley obtained it from the probability density, but Uemura did not. So Shockley's definition is considered to be valid.

In the Langevin equation, it is necessary to obtain the mean free time from a random moment, but not from the moment of the collision, to the next collision. Uemura's definition for this is intuitively understandable. The theory in which the mean free time is used is approximate. Based on these, both definitions are considered to be meaningful. Therefore, one of them can be used, upon understanding its meaning.

## 1.　はじめに

固体中での電子移動度あるいは電気伝導率を古典的に考える場合,電子はランダム運動をしていると仮定し，電子平均自由時間（寿命）を定義する．この定義に２種類あり，因子２の相違がある．この相違について，電子個々の動きを追跡し電子平均自由時間を求めることは実験的にはできないから，因子２程度の相違は問題にする必要はないという考えがある．たしかにこの理論は厳密ではなく近似的である．しかし，基礎的であるから上記相違を明確にすることは大切なことであると我々は考えている．ゆえに本論文では上記２種類の定義およびこれらに関連があると思われる問題を紹介し，我々の考えを述べる．

なおここで使われる自由時間，寿命，衝突間隔はすべて同じ意味である．またランダム運動，Brown運動も同じ意味である．

*宇部工業高等専門学校 電気工学科
**吉田半導体研究所

## 2.　２種類の定義

### 2.1　植村の定義

Wilson[1]，植村[2] および桜庭[3]の定義は同じであるが，Wilsonは「電子が金属イオンと２回衝突する間の平均自由時間を$2\tau$とする.」とだけ述べ，この$\tau$を用いて電気伝導率を求めている．桜庭の記

述も簡単である．それに対し植村はかなり詳しく述べているので，植村の定義を述べる．いま自由電子ガスを考え各電子は平均して$2\tau_U$ (U:Uemura)の時間を周期として散乱されてBrown運動を行うものとする．このとき$\tau_U$を電子のBrown運動の平均寿命と呼ぶことにする．$2\tau_U$でなく$\tau_U$を平均寿命と呼ぶ理由は，ある瞬間をとってその時刻から各電子の運動を追跡したとすると，ある電子は衝突の直後にあり，また別の電子は次の衝突の直前にあって、その瞬間から次の衝突までに自由でいる時間の平均は$\tau_U$となるからである．

電場がない場合には各電子の速度の平均値 $v$は0であるが，電場$E$が加わると各電子は$-eE/m$なる加速度を生じる．時間$t$の間に電子が得る速度増加は$(-eE/m)t$となり，その平均は$(-eE/m)\tau_U$である．したがって電場$E$によって平均速度$v$は0とならず$(-eE/m)\tau_U$となる．ただし，電子は衝突によってそれまでの記憶を失い，衝突前にその電子がもっていた電場による速度増加は衝突後には保持されないものとする．この電子ガスの密度を$n$とすれば，電流密度$J$，電気伝導率$\sigma$および移動度$\mu$は

$$J = -env = \frac{ne^2\tau_U}{m}E, \tag{2.1.1}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_U}{m}, \tag{2.1.2}$$

$$\mu = \frac{e\tau_U}{m} \tag{2.1.3}$$

で与えられる．

平均寿命$\tau_U$はときに緩和時間(relaxation time)と呼ばれる．その呼び方を理解するために，今述べたことを別な角度からながめてみよう．外部から電子系に電子１個あたり平均$F$なる力が作用すると，電子の平均速度$v$は次の運動方程式にしたがって変化するものと仮定しよう．

$$m\frac{dv}{dt} = F - m\frac{v}{\tau_U} \tag{2.1.4}$$

この方程式はLangevin方程式とよばれる．いま電子系が結晶格子と熱平衡にあれば，ゆらぎを無視するかぎり当然のことながら$v = 0$である．初期条件として熱平衡にない状態を強制して$v(t=0) = v_0 \neq 0$として，それ以後系を外力$F$から自由にすれば，(2.1.4)式で$F = 0$とした解に$v(t=0) = v_0$の条件をいれて

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau_U} \tag{2.1.5}$$

が得られ，系は時間とともに指数関数的に$v = 0$なる平衡状態に近づく．$\tau_U$は強制された初期条件が緩和する速さを指示する時間定数であって緩和時間と呼ばれる．外力$F$が電子に働く電場$E$による場合には(2.1.4)式は

$$m\frac{dv}{dt} + m\frac{v}{\tau_U} = -eE \tag{2.1.6}$$

となり，電場を加えたまま十分時間が経過すると$v$は一定値

$$v_\infty = -\frac{e\tau_U}{m}E \tag{2.1.7}$$

に漸近する．これは電子系の重心の定常速度をあらわしている．(2.1.7)式に示した平均値の定常値に対応する定常電流の密度$J$は

$$J = -env_\infty = \frac{ne^2\tau_U}{m}E \tag{2.1.8}$$

となって(2.1.1)式と同じ表現を得る。すなわち緩和時間$\tau_U$は前述した平均寿命に他ならない．

## 2.2 Shockleyの定義

前節で述べた定義はかなり古くからあるようであり，Shockley[4]はそれを強く意識しているようである．Shockleyは次の仮定をおいた．

**仮定(1):** 電子が微小時間$dt$の間に衝突を行う確率は$dt/\tau_S$(S:Shockley)である．

**仮定(2):** 電子は衝突すれば直ちに熱平衡分布になる．すなわち衝突前にあったことを思い出すことはできない．（Shockleyの仮定(2)そのものは難しい表現であるので彼自身による解説的表現を記した．なお植村も同様の仮定をしている.）

平均自由時間について考える．時間$t$の間に電子(分子)は$C$回衝突するとする．ただし最初の衝突は数えないことにする．衝突の間の時間を$t_1, t_2, \ldots, t_C$とする．これらを自由時間と呼ぶ．これらの間，電子はランダム過程に影響されず自由に動いている．

$$t_{AV} = (t_1 + t_2 + \cdots + t_C)/C = T/C \tag{2.2.1}$$

により平均自由時間$t_{AV}$を定義して$\tau_S$との関係を求める．そのために１個の電子の連続した$C$回の衝突における自由時間でなく，$C$個の電子の１回の衝突における自由時間を考察する．どちらの場合でも同じ自由時間分布が得られるように，すべての自由時間は，それがどのように始まったにしても仮定(1)により同じ統計的挙動をするようにしてある．偶然これら$C$個の電子は$t=0$で同時に衝突すると仮定し，次の衝突までを追いかける．（この仮定は次のことと等価である．$C$個の衝突をランダムに選び，衝突の瞬間から各電子に対する時間を計り始める．あるいは，１個の電子の$C$個の自由時間を考え，（時間の始まりであるところの）衝突の瞬間から各自由時間に対する時間を計り始める．）なおこの点については付録１を参照されたい．時間$t$で$C(t)$個の電子が衝突せずに残っているとする．$dt$の間の衝突回数は$C(t)dt/\tau_S$であり，衝突していない電子はこれだけ減少することになるから

$$dC(t) = -C(t)dt/\tau_S \tag{2.2.2}$$

を得る．$t=0$で$C(t)=C$であるから(2.2.2)式から

$$C(t) = Ce^{-t/\tau_S} \tag{2.2.3}$$

であり，$t$と$t+dt$の間に衝突する電子数は

$$C(t)\frac{dt}{\tau_S} = Ce^{-t/\tau_S}\frac{dt}{\tau_S} \tag{2.2.4}$$

である．すなわち$C$個の衝突のうちで(2.2.4)式で与えられる個数だけが自由時間$t$を持っている．ゆえに，(2.2.1)式から

$$t_{AV} = \frac{1}{C}\int_0^\infty tCe^{-t/\tau_S}\frac{dt}{\tau_S} = \tau_S \tag{2.2.5}$$

を得る．このようにして$t_{AV}$の値は$\tau_S$であることが分かった．ShockleyはLangevin方程式を用いず，電気伝導率などの(2.1.1)-(2.1.3)式において$\tau_U$でなく$\tau_S$を用いている．なおこれらの点については付録２を参照されたい．そしてShockleyはp.203で，**2.1**で述べた考えは誤りであると指摘している．大場[5)]らも平均自由時間についてShockleyと同じ取り扱いをしている．

### 2.3　２種類の定義の比較と今後の進め方

植村の$2\tau_U$の定義は(2.2.1)式$t_{AV}$の定義と同じであるから(2.2.5)式も用いて

$$2\tau_U = t_{AV} = \tau_S \tag{2.3.1}$$

を得る．すなわち$\tau_U$と$\tau_S$には因子２の相違がある．この相違をどのように理解し，対処するかがこの論文の目的である．

結晶の電気伝導率を測定する場合，まず結晶に電圧を加え，次に測定する．この電圧を加える瞬間は電子の運動とは無関係である．これが植村が述べた「ある瞬間をとってその時刻から各電子の運動を追跡したとする」に相当する．すなわち衝突の瞬間からではなく、ある別の瞬間から各電子の運動を追跡する．植村の考えは数学における待ち行列の理論[6)]で詳細に述べられているので，理解を容易にするため待ち行列の理論での客の到着間隔を電子の衝突間隔に置き換えた理論を**3.**で述べる．また２種類の定義に関係があると思われる久保の問題[7)]を**4.**で述べる．

## 3.　衝突間隔分布による考察

### 3.1　衝突間隔分布およびランダムな時点からの衝突間隔分布

粒子が衝突後すぐから，次に衝突するまでの時間間隔が$t$以上である確率を$P(t)$とする．このとき，$P(0)=1$，$P(\infty)=0$である．$P(t)$は$t$が増加したとき単調に減少する．$P(t)$は衝突の瞬間から測った衝突間隔分布であるが，途中のランダムな時点から測り始めて，次の衝突が起こるまでに時間間隔が$t$以上である確率を$Q(t)$と表そう．$Q(t)$はランダムな時点からの衝突間隔分布である．植村はこの$Q(t)$を用いている．

衝突間隔分布の確率密度は

$$p(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \tag{3.1.1}$$

となるので，平均衝突間隔$\langle t\rangle_p$は

$$\langle t\rangle_p = \int_0^\infty t\,p(t)\,dt = \int_0^\infty P(t)\,dt \tag{3.1.2}$$

となる．なおここで$\lim_{t\to\infty} tP(t) = 0$を仮定している．また平均を表すブラケットの添字$p$は衝突

後すぐから次の衝突の平均時間を表すために用いている．ランダムな時点から測った場合の平均は同様に次のように求められる．

$$<t>_q = \int_0^\infty Q(t)\,dt \tag{3.1.3}$$

ここで添字$q$はランダムな時点から次の衝突の平均時間を表すために用いている．問題は$P(t)$と$Q(t)$との一般的な関係を求めることであるが，待ち行列の理論において次式が求められている．

$$Q(t) = \frac{1}{<t>_p}\int_t^\infty P(t)\,dt \tag{3.1.4}$$

$<t>_p$と$<t>_q$は一般に異なる．$<t>_p$および$<t>_q$についての我々の考えを述べる．Shockleyは1個の電子が$C$回衝突した時の平均衝突間隔として$t_{AV}$を定義したが，$<t>_p$を多数の電子が多数回衝突したときの平均衝突間隔と定義しても問題はないであろう．これに対し$<t>_q$は多数の電子についてのある瞬間（衝突の瞬間ではない）から次の衝突までの平均衝突間隔である．Langevin方程式の意味として**2.1**での植村の説明，および**4.2**での久保の説明があるが，衝突を摩擦に置き換えたうえで多数の電子についてのある瞬間から次の衝突までを平均して取り扱うNewton運動方程式とすればLangevin方程式での時定数$\tau$は$<t>_q$である．

## 3.2 ランダム衝突

衝突がランダムに起こる場合を考えてみよう．衝突がランダムであるとは，電子（原子）が衝突した瞬間から測っても，途中のランダムな時点から測っても次の衝突までの時間の分布が同じ，即ち前の衝突が起こってから現在までどれだけの時間が経過したかということが次の衝突までの時間に影響を与えないことを意味する．従って分布は測定の開始時点に依存せず，

$$P(t) = Q(t) \tag{3.2.1}$$

が成立する．(3.2.1)式を(3.1.4)式に代入して衝突間隔分布を計算すると，

$$P(t) = Q(t) = e^{-t/<t>_p}. \tag{3.2.2}$$

さらに

$$<t>_p = <t>_q \tag{3.2.3}$$

を得る．(3.2.2)式はShockleyが導出した(2.2.3)式$C(t)/C$にあたる．**2.2**で述べたShockleyの考えと比較する．(3.2.2)式は(2.2.3)式に相当し両式の比較から

$$\tau_S = <t>_p \tag{3.2.4}$$

が得られる．ゆえにShockleyの仮定(1)はこの節のランダム衝突と同じである．(3.2.3)式および(3.2.4)式から

$$\tau_S = <t>_q \tag{3.2.5}$$

も得られるので，Shockleyの$\tau_S$は$<t>_p$でも$<t>_q$でもよい．

## 3.3 規則衝突

次に規則型を考えてみる．規則型では衝突間隔が完全に一定でありバラツキがない．その一定間隔が平均衝突間隔時間$<t>_p$そのものである．あえて分布を考えるとこれはステップファンクションで表される．

$$P(t) = S(<t>_p - t). \tag{3.3.1}$$

ここで

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

(3.3.1)式を(3.1.4)式に代入してランダムな時点からの衝突間隔分布を計算すると，

$$Q(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{<t>_p}, & t < <t>_p \\ 0, & t \ge <t>_p \end{cases} \tag{3.3.3}$$

これを用いてランダムな時点からの衝突の平均時間を計算すると，(3.1.3)式から

$$<t>_q = \frac{<t>_p}{2}. \tag{3.3.4}$$

規則型においてはランダム衝突と異なり，衝突後から平均をとる場合とランダムな時点から平均をとる場合とでは衝突の平均自由時間が因子2だけ異なっている．

植村の$2\tau_U$の定義から植村が規則衝突を仮定しているとは思えない．しかし$2\tau_U$の定義は**3.1**の

$< t >_p$および(2.2.1)式$t_{AV}$の定義と同じであるから(2.3.1)式も用いて

$$2\tau_U =< t >_p = t_{AV} = \tau_S \tag{3.3.5}$$

が得られ，この式と(3.3.4)式から

$$\tau_U = \frac{< t >_p}{2} =< t >_q \tag{3.3.6}$$

が得られる．植村の$\tau_U$の定義は**3.1**の$< t >_q$の定義と同じであるから，(3.3.6)式から結果的に植村は規則衝突を仮定していることになる．

# 4. 久保の問題

## 4.1 問題１２(Smoluchowski方程式)

$x$軸上で，$\tau$時間ごとに$+a$または$-a$の変位を等確率で行いながら移動する粒子がある．$xa$から出発して$t = n\tau$時間後に$ya$に到達する確率を$P_n(x|y)$とすると，これは次のSmoluchowskiの方程式を満たす．

$$P_n(x|y) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} P_{n-1}(x|z)P_1(z|y), \quad n \geq 1 \tag{4.1.1}$$

ただし，

$$P_1(x|y) = \frac{1}{2}\delta_{y,x-1} + \frac{1}{2}\delta_{y,x+1}, \tag{4.1.2}$$
$$P_0(x|y) = \delta_{x,y}. \tag{4.1.3}$$

これを母関数を利用して解くと

$$P_n(x|y) = \frac{n!}{\left[\frac{1}{2}(n+y-x)\right]!\left[\frac{1}{2}(n-y+x)\right]!}\frac{1}{2^n}, \quad |y-x| \leq n, \tag{4.1.4}$$

$$= 0, \quad |y-x| > n. \tag{4.1.5}$$

これは２項分布である．$n >> 1$に対しては，詳しいStirlingの公式を用いて

$$P_n(x|y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-(x-y)^2/2n} \tag{4.1.6}$$

を得る．ここで，$|y-x| << n$を仮定した．(4.1.6)式右辺の係数は規格化条件から定めた．この式を次のように書き換えることができる．

$$\frac{1}{a}P_n(x|y) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-(xa-ya)^2/4Dt}, \tag{4.1.7}$$

ここで

$$D = \frac{a^2}{2\tau}. \tag{4.1.8}$$

$D$は拡散係数であり，以下の関係を満たす．

$$< |ya - xa|^2 >= 2Dt \tag{4.1.9}$$

$< X >$は$X$の平均値を表す．(4.1.9)式は，拡散現象をランダムウォークとして取り扱ったときに表れる一般的な関係である．この節で用いられた$\tau$を今後は$\tau_{12}$と記す．なお文献7)に誤植があるので付録３を参照されたい．

## 4.2 問題１３(Langevin方程式)

温度$T$の流体中に浮遊する質量$m$の微粒子（例えばコロイド粒子）の運動のある方向への射影は次のLangevin方程式から定まる．

$$m\frac{dv}{dt} = -\zeta v + F(t) \tag{4.2.1}$$

ここに，$v$は速度，$\zeta$は摩擦係数，$F(t)$は流体分子から受ける力の絶えず変動する部分（揺動力）である．これを確率変数とみて，

$$< F(t) > = 0,$$
$$< F(t)F(t') > = 2\zeta kT\delta(t-t') \tag{4.2.2}$$

なる平均値および相関関数をもつと仮定する．このような微粒子の熱運動をBrown運動とよぶ．さて，

$$\tau = \frac{m}{\zeta} \tag{4.2.3}$$

と置き(4.2.1)式を$t_0$から$t$まで積分すると

$$v(t) = v(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)/\tau}F(s)ds. \tag{4.2.4}$$

すなわち，平均をとれば第２項が0となるので，これは平均速度が緩和時間$\tau$で減衰することを示して

いる．相関関数は(4.2.4)式において，$t_0=-\infty$として$t,t'$に対する式を掛け合わせて平均をとると得られる．

$$<v(t)v(t')>=\frac{kT}{m}e^{-|t-t'|/\tau} \qquad (4.2.5)$$

これを用いて，さらに変位の２乗平均を求めると

$$\begin{aligned} <|x(t)-x(t_0)|^2> &= \int_0^t dt\int_0^t dt' <v(t)v(t')> \\ &\sim 2\frac{kT}{m}\tau t, \quad t>>\tau \\ &= 2Dt \qquad (4.2.6) \end{aligned}$$

ここで

$$D=\frac{kT}{m}\tau \qquad (4.2.7)$$

と置き，これを拡散係数と呼ぶ．この節で用いられた$\tau$を今後は$\tau_{13}$と記す．なおこの節で我々が注意したいことは久保は(4.2.3)式で定義した$\tau$について平均自由時間の観点からは何も述べていないことである．

### 4.3　問題１２と１３の関係

久保は問題１２と１３の関係を特に述べていない．しかし，両方ともランダム運動に関する問題であり拡散係数および平均自由時間が関与している．また拡散係数と変位の２乗平均値には同一の関係式が成立している．これはLangevinの式がBrown運動（問題１２はBrown運動のひとつの場合を扱っている.）を記述する式である以上当然である．問題１２において速さ$v$は

$$v=\frac{a}{\tau_{12}} \qquad (4.3.1)$$

と表すことができるので，その２乗平均値は粒子の質量を$m$，温度を$T$とすると，

$$<v^2>=\left(\frac{a}{\tau_{12}}\right)^2=\frac{kT}{m} \qquad (4.3.2)$$

となる．ここで等分配則を用いた．(4.3.2)式の$a$を(4.1.8)式に代入し、(4.1.8)，(4.2.7)式の拡散係数を等しいと置けば

$$\tau_{12}=2\tau_{13} \qquad (4.3.3)$$

を得る．これは(2.3.1)式と同様の関係である．

## 5.　考察と結論

### 5.1　$\tau_U$と$\tau_S$の相違

(2.3.1)式に示した$\tau_U$と$\tau_S$の相違を**3.**に基づいて考察する．**3.**では植村が述べた「ある瞬間をとってその時刻から各電子の運動を追跡する」ことを前提とし，$<t>_q$を求めている．この場合**3.1**で述べたように衝突間隔分布あるいは確率密度が必要である．Shockleyは**2.2**に述べたようにまず(2.2.1)式で$t_{AV}$を定義したが(2.2.1)-(2.2.5)式で確率密度を用いて$t_{AV}$を計算し直している．

植村は(2.2.1)式と同じ考えで$t_{AV}$すなわち$2\tau_U$を定義した後，確率密度を使わないで$<t>_q$を求めている．そのためすべての電子が$2\tau_U$の衝突間隔で衝突している，すなわち(3.3.1)式の規則型衝突間隔分布をしていることになり，**3.3**の終りで述べたように結果的に植村は規則衝突を仮定していることになる．ゆえにShockleyの定義のほうが妥当のようにみえる．しかし，「ある瞬間をとってその時刻から各電子の運動を追跡する」ことはLangevin方程式のためには必要であり，植村の定義は直観的で理解しやすい．これに対してShockleyの定義を理解するためには**3.**の知識が必要である．すなわちShockleyの定義も植村の定義もそれぞれに意味のあることである．そしてこれらの定義を適用する理論は厳密ではなく近似的である．ゆえに結論として，どちらかを否定するのではなく，これらの定義を理解した上でどちらかを使うことである．

### 5.2　久保の問題

**4.3**で述べたように，(4.1.8)および(4.2.7)式の拡散係数を等しいと置くことにより(4.3.3)式を得た．$\tau_{12}$および**3.1**の$<t>_p$の定義から

$$\tau_{12}=<t>_p \qquad (5.2.1)$$

を得る．そして(4.3.3)式および(5.2.1)式から

$$\tau_{13}=\frac{<t>_p}{2} \qquad (5.2.2)$$

を得る．この式はLangevin方程式で使われる$\tau$が常に$<t>_p/2$であることを示している．植村により定義された$\tau_U$のみがLangevin方程式に使われるのであれば問題はない．しかしShockleyにより定

義された$\tau_S$も(3.2.5)式に示すようにLangevin方程式に使うことができ，この場合(5.2.2)式と矛盾する．すでに述べたように久保は問題１２と１３の関係および$\tau_{13}$の定義について何も述べていない．深井[8]はLangevin方程式の$\tau$について平均散乱時間とだけ述べている．我々が行った(4.1.8)および(4.2.7)式の拡散係数を等しいと置くことが誤りであるとは思わないが，久保が何も述べていないのは上述の矛盾のためかもしれない．

## 謝辞

いろいろご討論を頂いた九州大学理学部中西秀教授に感謝いたします．

### 付録１　１個の電子のＣ回の衝突とＣ個の電子の１回の衝突

Shockleyは**2.2**で仮定(1)に基づいて(2.2.2)式を求めるため，１個の電子のＣ回の衝突をＣ個の電子の１回の衝突で置き換えた．そしてこれらＣ個の電子は偶然$t=0$で同時に衝突すると仮定している．**3.2**で述べたランダム衝突の意味からこの仮定がでてくるかもしれないが，直観的に考えるとＣ個の電子が偶然$t=0$で同時に衝突する確率は非常に小さいであろうから，**3.2**での取り扱いのほうが無理がないように思われる．

### 付録２　電気伝導率の測定

**3.1**の終りで$<t>_q$は多数の電子についての「ある瞬間から次の衝突までの平均衝突間隔」であり，Langevin方程式での時定数$\tau$は$<t>_q$であると述べた．しかしShockleyはこの「ある瞬間から次の衝突までの平均衝突間隔」ということを考えず，またLangevin方程式も取り扱っていない．

我々が電気伝導率の測定を行う場合，ある瞬間に結晶に電圧を加え次に測定する．この時ある程度の時間がかかるから電子は多数回衝突する．ゆえに平均衝突間隔を求める場合，電圧を加えた瞬間から次の衝突までの衝突間隔はほとんど問題にならず平均衝突間隔として$<t>_p$が求まるであろう．ゆえに実際の電気伝導率の測定で必要な値はこの$<t>_p$であり，Shockleyもこのことを考えていたと思われる．

### 付録３　久保問題１２の誤植

久保の問題１２，(5)式右辺に$-n\log 2$を加える．なお番号は久保に従う．

$$
\begin{aligned}
&\log P_n(x|y)\\
&\sim\ (n+\frac{1}{2})\log n\\
&\quad -\frac{1}{2}(n+y-x+1)\log\frac{n}{2}(1+\frac{y-x}{n})\\
&\quad -\frac{1}{2}(n-y+x+1)\log\frac{n}{2}(1-\frac{y-x}{n})\\
&\quad -\log\sqrt{2\pi}\\
&\quad -n\log 2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$|x-y|<<n$とすると

$$P_n(x|y)\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-(x-y)^2/2n} \qquad (5')$$

を得る．(4.1.4)式の$P_n(x|y)$では同式右辺分母から明らかなように，$y$はひとつおきの整数である．しかし(5′)式では，右辺にそのような制限はないとする．そして

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}P_n(x|y)=1$$

が成立すべきであるから(5′)式は

$$P_n(x|y)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-(x-y)^2/2n} \qquad (6)$$

となる．これは本文(4.1.6)式である．

## 参考文献

1) A.H.Wilson: Theory of Metals (Cambridge University Press,Cambridge,1958) p.1.

2) 植村泰忠,菊池誠：半導体の理論と応用(上)(裳華房,東京,1960) pp.40-46.

3) 桜庭一郎: 半導体デバイスの基礎（森北出版,東京,1992) p.33.

**4)** W.Shockley: Electrons and Holes in Semiconductors (Van Nostrand,Toronto,1950) pp.189-204.

**5)** 大場勇治郎,池崎和男,桑野博,松本智: 電子物性基礎 (電気学会,東京,1990) pp.129-133.

**6)** 西田俊夫: 待ち行列の理論と応用 (朝倉書店,東京,1971) pp46-68,pp.205-208.

**7)** 久保亮五,市村浩,碓井恒丸,橋爪夏樹: 大学演習熱学統計力学 (裳華房,東京,1961) p.434,pp.447-449.

**8)** 深井有: 拡散現象の物理 (朝倉書店,東京,1988) p.47.

(平成9年9月24日受理)