ラプラス変換の振動系，梁，積分方程式その他への応用

第2報　梁への応用（II）

望月　太喜雄*・内田　篤男*

On the Application of Laplace Transform to the Dynamical Vibrations, Beam Problems, Integral Equations and etc. (No. 2)

by

Takio Mochizuki* and Atsuo Uchida*

Abstract

In recent years Laplace transformation techniques have become an indispensable tool for engineers, mathematicians, and physicists.

Continued from the preceding report this one offers the result of the numerical evaluation applied the transform to the continuous beams, where various kinds of loads with concentrated moments are represented by unit step, unit impulse, unit doublet functions respectively. To be precise the solution of the continuous beams coincides with solving plural simultaneous equations of the first degree using determinants in case of need.

1. まえがき

ラプラス変換の梁への応用についてはすでに Thomson 氏（カルフオルニア大学）がその著書「Laplace Transformation[1)]」の中において，ユニットステップ，ユニットインパルス，ユニットダブレット関数を用いて梁の解法を示している．しかし連続梁については触れていない．

また Iwinski 氏（ポーランド科学アカデミー数学研究所員）はその論文「Theory of Beams[2)]」において，氏独特の証明法により分布荷重，集中荷重，集中モーメント等が作用した場合の梁の撓みの一般式を階段関数 $\Sigma<f_i>_{ai}^{bi}$ をもってまとめている．したがって氏によれば分布荷重，集中モーメントがそれぞれ $w\cdot u(x-a)$，$P\cdot u'(x-b)$，$M\cdot u''(x-c)$ をもって表わされることはない．また梁の個々の具体的場合については触れられていない．

また小井土正六氏（法政大学）はその著書「材料力学演習[3)]」の中において梁の解法，例題を示されているが集中モーメントの加わつた場合については載せられていない．

よって筆者等は集中モーメントを伴う場合も含めた連続梁についてユニットステップ，ユニットインパルス，ユニットダブレット関数を用いた文献は余り見受けられないように思うので，あえて梁の撓みのまとめも含めて，ここに連続梁その他についての計算例の一文を呈する次第である．

2. 計算上の諸注意

以下いくつかの計算例を挙げるが，使用する記号につ

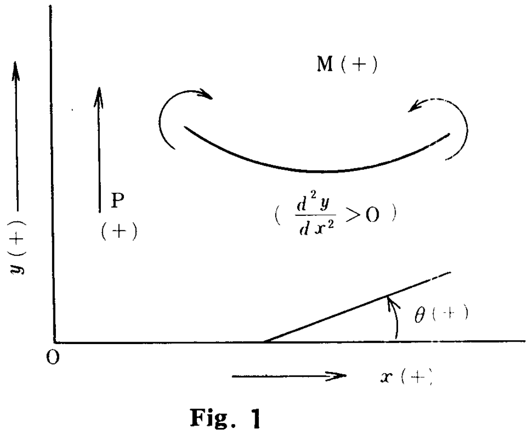


Fig. 1

* 宇部工業高等専門学校機械工学教室

いては Fig. 1の如く取扱うものとする．すなわちたわみyは上向きを正，曲げモーメントMは弾性曲線が上に凹のときを正，力Pは上向きを正，剪断力Fは左側の外力の総和が上向きとなるものを正と約束する．片持梁は dM(x)/dx=F(x)の符号の関係より自由端をつねに右へとるようにする．不静定梁において片持梁に直す必要のあるときも，もちろん上記の約束に従うものとする．

3. 計 算 例

(1)

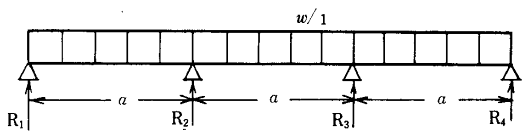


Fig. 2

(解) Fig. 2の如き3連梁の問題も適当な条件を加えることにより単純梁の問題に直すことができる．すなわち反力 R_2, R_3 を集中荷重とみなすことにより荷重関数は

$$w(x)=-wu(x)+R_2u'(x-a)+R_3u'(x-2a)$$

よって前報の Table 1を用いると

$$L^{-1}\frac{W(s)}{S^4}=L^{-1}\frac{1}{S^4}\left\{-\frac{w}{S}+R_2e^{-as}+R_3e^{-2as}\right\}$$

$$=-\frac{wx^4}{4!}+\frac{R_2}{3!}(x-a)^3u(x-a)$$

$$+\frac{R_3}{3!}(x-2a)^3u(x-2a)$$

また境界条件より

$$y(o)=y''(o)=o,\quad y'''(o)=\frac{F(o)}{EI}=\frac{R_1}{EI}$$

これらを前報の(3)式 general beam equation に代入するとたわみは

$$y(x)=y'(o)x+\frac{R_1}{6EI}x^3+\frac{1}{EI}L^{-1}\frac{W(s)}{S^4}$$

$$=y'(o)x+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{1}{24EI}\left\{wx^4-4R_2(x-a)^3u(x-a)\right.$$

$$\left.-4R_2(x-2a)^3u(x-2a)\right\}$$

$$(R_2=R_3)$$

ところで条件より $y(a)=0$

よって $y'(o)a+\frac{R_1}{6EI}a^3-\frac{w}{24EI}a^4=0$

$\therefore y'(o)=\frac{wa^3}{24EI}-\frac{R_1a^2}{6EI}$, また $y(2a)=y(3a)=0$

これらを解いて $R_1=R_4=\frac{4}{10}wa$, $R_2=R_3=\frac{11}{10}wa$

$$\therefore y(x)=\frac{w}{120EI}\left[-3a^3x+8ax^3-5x^4+22a\right.$$

$$\left.\times\left\{(x-a)^3u(x-a)+(x-2a)^3u(x-2a)\right\}\right]$$

(2)

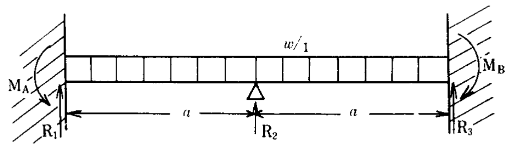


Fig. 3

(解) (1)と同様に反力R_2を集中荷重とみなすと Fig. 3より荷重関数は

$$w(x)=-wu(x)+R_2u'(x-a)$$

$$L^{-1}\frac{W(s)}{S^4}=L^{-1}\frac{1}{S^4}\left\{-\frac{w}{S}+R_2e^{-as}\right\}$$

$$=-\frac{wx^4}{24}+\frac{R_2}{6}(x-a)^3\ u(x-a)$$

ところで境界条件より

$$y(o)=y'(o)=0,\quad y'''(o)=R_1/EI$$

$$\therefore y(x)=\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{1}{6EI}\left\{\frac{w}{4}x^4\right.$$

$$\left.-R_2(x-a)^3\ u(x-a)\right\}$$

ところで $y(a)=y(2a)=0$, $2R_1+R_2=2wa$ より

$$R_1=R_3=\frac{1}{2}wa,\quad R_2=wa,\quad M_A=EIy''(o)=-\frac{w}{12}a^2\ \}$$

$$\therefore y(x)=\frac{w}{24EI}\left\{-a^2x^2+2ax^3-x^4+4a(x-a)^3\ u(x-a)\right\}$$

(3)

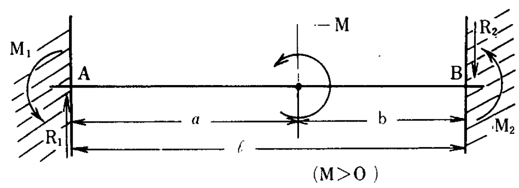


Fig. 4

(解) Fig. 4より荷重関数は

$$w(x)=-Mu''(x-a)$$

$$L^{-1}\frac{W(s)}{S_4}=L^{-1}\frac{1}{S^4}\left\{-Mse^{-as}\right\}=-\frac{M}{2}$$

$$\times(x-a)^2\ u(x-a)$$

ところで境界条件より

$$y(o)=y'(o)=0,\quad y'''(o)=R_1/EI$$

$$\therefore y(x)=\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{M}{2EI}(x-a)^2u(x-a)$$

ところで $y(l)=y'(l)=0$ より

$$y''(o)=\frac{M(l^2-4al+3a^2)}{EIl^2},\quad R_1=\frac{6Ma(l-a)}{l^3}$$

$$\therefore y(x)=\frac{M(l^2-4al+3a^2)}{2EIl^2}x^2+\frac{Ma(l-a)}{EIl^3}x^3-\frac{M}{2EI}(x-a)^2u(x-a)$$

(4)

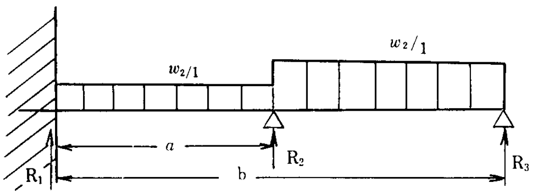


Fig. 5

（解）Fig. 5において反力 R_2，R_3 を集中荷重とみなすと荷重関数は

$$w(x)=-w_1u(x)-(w_2-w_1)u(x-a)+R_2u'(x-a)+R_3u'(x-b)$$

$$L^{-1}\frac{W(s)}{S^4}=L^{-1}\frac{1}{S^4}\left\{-\frac{w_1}{S}-(w_2-w_1)\frac{1}{s}e^{-as}+R_2e^{-as}+R_3e^{-bs}\right\}$$

$$=-\frac{w_1}{24}x^4-\frac{(w_2-w_1)}{24}(x-a)^4u(x-a)+\frac{R_2}{6}(x-a)^3u(x-a)+\frac{R_3}{6}(x-b)^3u(x-b)$$

ところで境界条件より

$$y(o)=y'(o)=0\qquad y'''(o)=R_1/EI$$

$$\therefore y(x)=\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{1}{24EI}\Big\{w_1x^4+(w_2-w_1)(x-a)^4u(x-a)-4R_2(x-a)^3\times u(x-a)-4R_3(x-b)^3u(x-b)\Big\}$$

ただし　$0\leqq x\leqq b$ より R_3 の項は明らかに零

また　$y(a)=y(b)=y''(b)=0$　より

$$R_1=\frac{w_1(b-a)\{3b^2(b+a)-(6b^2-a^2)(b-a)\}-3(w_2-w_1)(b-a)^4}{4(b-a)\{3b^2-(3b-a)(b-a)\}}$$

$$y''(o)=\frac{a}{12EI}\left[w_1a-\frac{w_1(b-a)\{3b^2(b+a)-(6b^2-a^2)\times(b-a)\}-3(w_2-w_1)(b-a)^4}{(b-a)\{3b^2-(3b-a)(b-a)\}}\right]$$

$$R_2=\frac{1}{12(b-a)}\left[w_1(6b^2-a^2)+6(w_2-w_1)(b-a)^2-(3b-a)\frac{w_1(b-a)\{3b^2(a+b)-(6b^2-a^2)(b-a)\}-3(w_2-w_1)(b-a)^4}{(b-a)\{3b^2-(3b-a)(b-a)\}}\right]$$

$w_2=2w_1$，　$b=2a$　のときは

$$R_1=\frac{5}{14}wa,\qquad R_2=\frac{51}{28}wa$$

(5)

（解）Fig. 6においてばね定数をkとおき，反力 R_2，

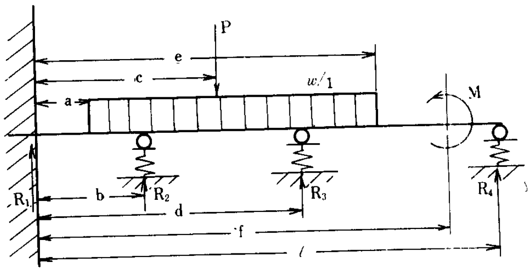


Fig. 6

R_3，R_4 を集中荷重とみなすと荷重関数は

$$w(x)=-Pu'(x-c)-w\{u(x-a)-u(x-e)\}-Mu''(x-f)+R_2u'(x-b)+R_3u'(x-d)+R_4u'(x-l)$$

$$L^{-1}\frac{W(s)}{S^4}=L^{-1}\frac{1}{S^4}\Big\{-Pe^{-cs}-\frac{w}{S}e^{-as}+\frac{w}{S}e^{-es}-Mse^{-fs}+R_2e^{-bs}+R_3e^{-ds}+R_4e^{-ls}\Big\}$$

$$=-\frac{P}{6}(x-c)^3u(x-c)-\frac{w}{24}(x-a)^4u(x-a)+\frac{w}{24}(x-e)^4u(x-e)-\frac{M}{2}(x-f)^2u(x-f)+\frac{R_2}{6}(x-b)^3u(x-b)+\frac{R_3}{6}(x-d)^3u(x-d)+\frac{R_4}{6}(x-l)u(x-l)$$

ところで境界条件より

$$y(o)=y'(o)=0,\ y'''(o)=R_1/EI$$

$$\therefore y(x)=\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{1}{24EI}\Big\{4P(x-c)^3u(x-c)+w(x-a)^4u(x-a)-w(x-e)^4u(x-e)+12M(x-f)^2u(x-f)-4R_2(x-b)^3u(x-b)-4R_3(x-d)^3u(x-d)-4R_4(x-l)u(x-l)\Big\}$$

ところで

$R_2=-k\cdot y(b)$ ——(1)，$R_3=-k\cdot y(d)$ —— (2)，$R_4=-k\cdot y(\ell)$ ——(3)，$y''(\ell)=0$ ——(4)，$R_1+R_2+R_3+R_4=P+w(e-a)$ ——(5)

これらは係数をそれぞれa，b，c，d，eで置き換えれば次の如き5元連立方程式となる．

すなわち

$$\left.\begin{array}{ll}a_1y''(o)+a_2R_1+a_3R_2+a_4R_3+a_5R_4=a_6 & \text{——(1)}\\ b_1y''(o)+b_2R_1+b_3R_2+b_4R_3+b_5R_4=b_6 & \text{——(2)}\\ C_1y''(o)+C_2R_1+C_3R_2+C_4R_3+C_5R_4=C_6 & \text{(3)}\\ d_1y''(o)+d_2R_1+d_3R_2+d_4R_3+d_5R_4=d_6 & \text{——(4)}\\ e_1y''(o)+e_2R_1+e_3R_2+e_4R_3+e_5R_4=e_6 & \text{——(5)}\end{array}\right\}$$

解は　$y''(o)=\frac{\Delta'}{\Delta}$,　$R_1=\frac{\Delta''}{\Delta}$,　$R_2=\frac{\Delta'''}{\Delta}$　$R_3=\frac{\Delta''''}{\Delta}$,　$R_4=\frac{\Delta'''''}{\Delta}$

ただし

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12EIkb^2 & 4kb^3 & 24EI & 0 & 0 \\ 12EIkd^2 & 4kd^3 & 4k(d-b)^3 & 24EI & 0 \\ 12EIkl^2 & 4kl^3 & 4k(l-b)^3 & 4k(l-d)^3 & 24EI \\ 2EI & 2l & 2(l-b) & 2(l-d) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_6 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_6 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_6 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_6 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_6 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}\qquad \Delta''=\begin{vmatrix} a_1 & a_6 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_6 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_6 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_6 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_6 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta'''=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_6 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_6 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_6 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_6 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}\qquad \Delta''''=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_6 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_6 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_6 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_6 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_6 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta'''''=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_6 \end{vmatrix}$$

また

$a_6=wk(b-a)^4$,　$b_6=k\{4P(d-c)^3+w(d-a)^4\}$

$c_6=k\{4P(l-c)^3+w(l-a)^4-w(l-e)^4+12M(l-f)^2\}$

$d_6=2P(l-c)+w(l-a)^2-w(l-e)^2+2M$

$e_6=P+w(e-a)$

4. むすび

以上の例解より明らかなようにラプラス変換を用いると静定，不静定の区別をする必要が無くなる．ただ連続梁の場合は反力を未知の外力（集中荷重）とみなし単純梁に直す手続きを必要とする．換言すれば反力は支持条件を示すA(x)の項では計算されず，荷重条件を示すW(x)の項の中で計算され，後から式の上ではA(x)の項に返えされるということになる[4]．すなわち連続梁の場合は支持条件の一部が荷重条件に姿を変えて加えられる点が第1報の単純梁等と異る点である．何れにしても連続梁の弾性曲線を求める問題は結局，数値係数をもつ多元連立一次方程式の解を求める問題に帰着する．これらの結論は段階関数によってまとめられたT. Iwinski 氏の結論と一致する．筆者等が計算したその他のものをまとめて Table 1，2に示す．終りに本題に対し終始熱心に研究を進めた卒論研究生鳥居晴介君に深甚なる感謝の意を表します．

参考文献

1) W. T. Thomson Laplace Trasformation 丸善 p. 107 (1962).
2) T. ウインスキー　梁の理論　森北出版 (1965).
3) 小井土正六　材料力学演習　学献社 p. 139 (1966)
4) 望月太喜雄　ラプラス変換の梁への応用　第1報　宇部高専研究報告　6号　p. 15 (1968).
5) R. V. Churchil 応用ラプラス変換　彰国社 (1944).

（昭和43年9月7日受理）

Table 1

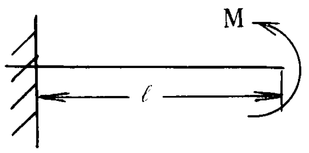
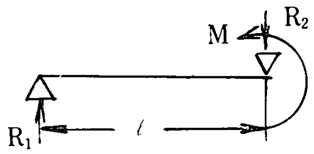
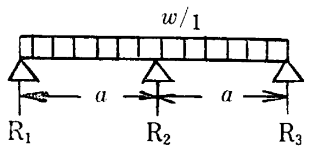
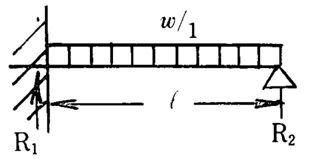
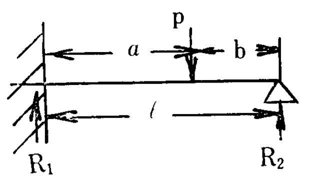
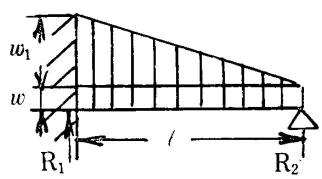
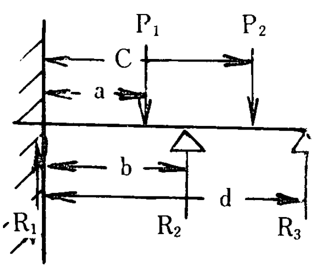
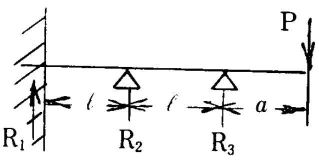
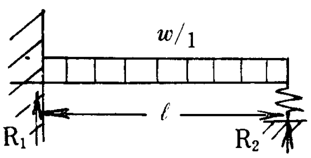
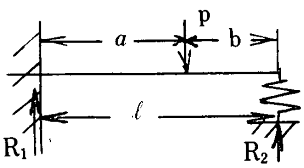
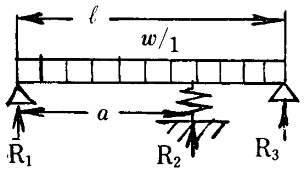
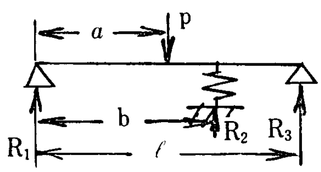
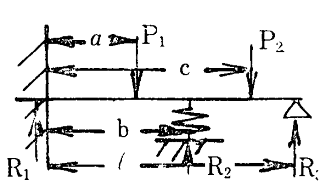
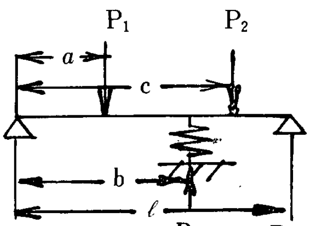
beam	loading function	deflection $y(x)$
	$-Mu''(x-l)$	$\frac{M}{2EI}x^2$
	$-Mu''(x-l)$	$\frac{M}{6EIl}(x^3-l^2x)$
	$-wu(x)$ $+R_2u'(x-a)$	$-\frac{w}{48EI}\left\{a^3x-3ax^3+2x^4-10a(x-a)^3u(x-a)\right\}$
	$-wu(x)$ $+R_2u'(x-l)$	$-\frac{w}{48EI}\left\{3l^2x^2-5lx^3+2x^4\right\}$
	$-pu'(x-a)$ $+R_2u'(x-l)$	$\frac{1}{12EIl^3}\left\{3Pal(l-a)(a-2l)x^2+P(l-a)\right.$ $\left.\times(2l^2+2al-a^2)x^3-2l^3P(x-a)^3u(x-a)\right\}$
	$-wu(x)$ $+\frac{w_1}{l}x-w_1$ $+R_2u'(x-l)$	$-\frac{1}{240EI}\left\{l^2(15w+8w_1)x^2-l(25w+16w_1)x^3\right.$ $\left.+2\left(5wx^4-\frac{w_1}{l}x^5+5w_1x^4\right)\right\}$
	$-P_1u'(x-a)$ $+R_2u'(x-b)$ $-P_2u'(x-c)$ $+R_3u'(x-d)$	$\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{R_1}{6EI}x^3-\frac{1}{6EI}\left\{P_1(x-a)^3u(x-a)\right.$ $\left.-R_2(x-b)^3u(x-b)+P_2(x-c)^3u(x-c)\right\}$ ただし $R_1=\frac{P_1(d-a)\{(d-a)^2-(d-b)^2\}}{(d-b)\left\{d^2-\left(d-\frac{b}{3}\right)(d-b)\right\}}$ $+\frac{P_2(d-c)\{(d-c)^2-(d-b)^2\}}{〃}$ $+\frac{(a-b)^3P_1\{3d^2-(d-b)^2\}}{〃}\times\frac{1}{3b^2}$ R_2, R_3, $y''(o)$ は省略

Table 2

beam	loading function	deflection $y(x)$
	$R_2u'(x-\ell)$ $+R_3u'(x-2\ell)$ $-Pu'(x-2\ell-a)$	$-\frac{P}{42EI\ell}\{3a\ell x^2-3ax^3+12a(x-\ell)^3u(x-\ell)$ $-(7\ell+9a)(x-2\ell)^3u(x-2\ell)$ $+7\ell(x-2\ell-a)^3u(x-2\ell-a)\}$
	$-wu(x)$ $+R_2u'(x-\ell)$	$-\frac{1}{EI}\{\frac{w\ell^2(12EI+k\ell^3)}{16(3EI+k\ell^3)}x^2$ $-\frac{w\ell(24EI+5k\ell^3)}{48(3EI+k\ell^3)}x^3+\frac{w}{24}x^4$
	$-Pu'(x-a)$ $+R_2u'(x-\ell)$	$\frac{P}{12EI(3EI+\ell^3k)}\{3(6EIb-\ell^3kb-6EI\ell$ $+b^3k\ell)x^2+(6EI+3\ell^2kb-b^3k)x^3$ $-2(3EI+\ell^3k)(x-a)^3u(x-a)\}$
	$-w(x)$ $+R_2u'(x-a)$	$y'(o)x+\frac{1}{6EI}[R_1x^3-\{\frac{w}{4}x^4-R_2(x-a)^3u(x-a)\}]$ $R_1=\frac{1}{2\ell}\{w\ell^2-\frac{5(\ell-a)kw\ell^4}{4(k\ell^3+48EI)}\}$ $R_2=\frac{kaw\ell(\ell^3+a^3-2a^2\ell)}{4\{ka^2(\ell-a)(2\ell-a)-ka^3(\ell-a)+6EI\ell\}}$
	$-Pu'(x-a)$ $+R_2u'(x-b)$	$y'(o)x+\frac{1}{6EI}\{R_1x^3-P(x-a)^3u(x-a)$ $+R_2(x-b)^3u(x-b)\}$ $R_1=\frac{1}{\ell}[P(\ell-a)-$ $\frac{kP(\ell-b)\{\ell(b-a)^3-b(\ell-a)(b^2+a-2a\ell)\}}{6EI\ell+2kb^2(\ell-b)^2}]$
	$-P_1u'(x-a)$ $+R_2u'(x-b)$ $-P_2u'(x-c)$ $+R_3u'(x-\ell)$	$\frac{y''(o)}{2}x^2+\frac{1}{6EI}\{R_1x^3-P_1(x-a)^3u(x-a)-R_2$ $\times(x-b)^3u(x-b)+P_2(x-c)^3u(x-c)\}$ $b=2a,\ c=5a/2,\ \ell=3a,\ P_1=P_2=P$ のとき $R_2=\frac{193ka^3P}{8(20ka^3+81EI)}$
	$-P_1u'(x-a)$ $+R_2u'(x-b)$ $-P_2u'(x-c)$	$y'(o)x+\frac{1}{6EI}\{R_1x^3-P_1(x-a)^3u(x-a)$ $+R_2(x-b)^3u(x-b)-P_2(x-c)^3u(x-c)\}$ $R_2=\frac{1}{2\{b^2k(\ell-b)^2+3EI\ell\}}[P_1k\ell(b-a)^3-b^3k$ $\times\{P_1(\ell-a)+P_2(\ell-c)\}-bk\{P_1a(\ell-a)$ $\times(a-2\ell)+P_2c(\ell-c)(c-2\ell)\}]$