環に於ける s-primality について

泉　　久　　夫*

Abstract Summary Recently, B. A. Andrunakievic and U. M. Rabuhin investigated the s-primalities in the rings under some conditons, which are the generalizations of primality and tertiarity. In this note, we investigate them in the rings without any condition, through a different process.

§1. 最近 B. A. Andrunakievic と U. M. Rabuhin〔4〕によって primality や tertiarity を一般化した s-primality が或る有限条件をもつ ring で扱われた.

この note は何の条件も仮定しない associative ring で〔4〕とは異る process によって s-primality を扱った. 吾々の s-primality では最強, 最弱のものはそれぞれ tertiarity, primality である. そしてその間の任意の強さをもつ s-primality をつくることができる.

尚これらの s-primality による ideal の meet decomposition は後日にしたい.

§2. R を associative noncommutative ring とする. 1の存在は必ずしも仮定しない. ideal はすべて two-sided とし (x) で元xで生成される principal ideal を表す. 一般にA, B, ………等で ideal を, x, y, ………等で元を表す. 更に $AB^{-1}=\{x \mid xB\subseteq A\}$ とし特にA $(x)^{-1}$は Ax^{-1}で示すことにする.

いま R≒A であるすべてのAに対し, ideal の set $\{S_\alpha^A\}$ を対応させ, その中に少くとも1つAに含まれない idealがあるとする. この $\{S_\alpha^A\}$をs-primality のAに於ける基本系といい, それに属する ideal は S_α^A, S_β^A, S^A, ………等で示す.

Definition 1　ideal C の任意の元xについて, $Ax^{-1}\fallingdotseq A$のときCはnot prime (n. p.) to A という.

Defininon 2　Aに含まれない任意のS^Aに対し, $S^A\cap AC^{-1}\not\subseteq A$ のときCは strongly not prime (s. n. p) to Aという. $c=(x)$ のとき特にxはs. n. p. to Aという.

Definition 3　ideal C の任意の元xが s. n. p. to A のとき, Cは quassi strongly not prime (q. s. n. p.)to A という.

Proposition 1　$R\fallingdotseq A$ であるすべてのAに対し $\bar{A}=\{y \mid$ s. n. p. to A である任意のxに対し $(x)+(y)$ が q. s. n. p. to A$\}$とおくと$\bar{A}$は ideal をつくり$\bar{A}\supseteq A$. この$\bar{A}$をAの s-primal adjoint (ideal) という.

Proof. x を s .n. p. to Aとする. まず$\bar{A}$に含まれる任意の2元y_1, y_2をとるとき $(x)+(y_1\pm y_2)$ がq. s. n. p. to A をいう. 任意の $z\in(x)+(y_1\pm y_2)$ に対し, $z\in(x)+(y_1)+(y_2)$, よって $z_1\in(x)+(y_1)$ がとれて, $z\in(z_1)+(y_2)$ にできる. ここで x のs. n. p. to A, $y_1\in\bar{A}$ より$(x)+(y_1)$は q. s. n. p. to A. 再び同様にしてzは s. n. p. to A がいえる. 故に $y_1\pm y_2\in\bar{A}$ である.

つぎに x, y_1 を前と同じとし, Rの任意の元 t に対して $(x)+(ty_1)$ が q. s. n. p. to Aであることは $(x)+(ty_1)\subseteq(x)+(y_1)$ より明か. 故に $ty_1\in\bar{A}$. $y_1t\in\bar{A}$ も同様. よってAは ideal になる.

最後に $\bar{A}\supseteq A$ についてはAに含まれない任意のS^A, s. n. p. to Aである任意のxに対して, A∋a を任意にとるとき $A((x)+(a))^{-1}\cap S^A=Ax^{-1}\cap Aa^{-1}\cap S^A=Ax^{-1}\cap R\cap S^A=Ax^{-1}\cap S^A\not\subseteq A$ より明かである.

Remark　A(≒R) に対し$\bar{A}$は q. s. n. p. to Aである.

Definition 4　$A(\fallingdotseq R)$ が s-primal idealとは $Ax^{-1}\fallingdotseq A$ と $\bar{A}\ni x$ が同値であることをいう.

Rに対しては$R=\bar{R}$とおき, つねにs-primal ideal とする. 以後特にことわらない限り ideal はRでないとする.

上の Def. より明からに次がえられる.

* 宇部工業高等専門学校数学教室

Proposition 2　A が s-primal ideal であることと $Ax^{-1} \neq A$ ならば $x \in \bar{A}$ であることは同値である.

Definition 5　A の maximal (max.) q. s. n. p. ideal とは q. s. n. p. to A ideal の set の極大元をいう.

容易にわかるように任意の q. s. n. p. to A ideal C を含む max. q. s. n. p. to A ideal は存在する。事実 C を含む q. s. n. p. to A ideal の sequence $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots\cdots\cdots\cdots$ があるとする. このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は明かに q. s. n. p. to A. よって Zorn's Lemma より C を含む max. q. s. n. p. to A ideal が存在する.

Theorem 1　任意の A に対し $\bar{A}$ は A の max. q. s. n. p. ideal の intersection として表わされる.

Proof まず $\bar{A}$ が任意の max. q. s. n. p. to A ideal P に含まれることをいう. $\bar{A} \ni x$ に対し $(x)+P$ は q. s. n. p. to A である. 事実, 任意の $y \in (x)+P$ に対し P内に元 p がとれて $y \in (x)+(p)$ にできる. ここで p は s.n.p.to A, よって $\bar{A}$ の definition より $(x)+(p)$ は q. s. n. p. to A, 故に y は s. n. p. to A である. 以上より $(x)+P$ の q. s. n. p. to A がいえた. ここで P の maxmality より $(x)+P=P$. $\therefore x \in P$. $\therefore \bar{A} \subseteq P$.

逆に $x \in \bigcap_i P_i$ (P_i は max. q. s. n. p. to A ideal) のとき $x \in \bar{A}$ を示そう. y を s. n. p. to A とすると (y) は q. s. n. p. to A, よって (y) を含む max. q. s. n. p. to A P_i がある. $\therefore (x)+(y) \subseteq P_i$. 故に $(x)+(y)$ は q. s. n. p. to A になるから $x \in \bar{A}$.

Corollary 1 A が s-primal ならば $\bar{A}$ は maximum q. s. n. p. to A であるが, 逆は正しくない. 事実 tertiarity では任意の ideal A について ter (A) は maximum q. s. n. p. to A であるが, すべての A が tertiary ではない. (後述)

primal に関する definition その他のことはよく知られている.

Definition 6　任意の A について $A'=\{x \mid Ax^{-1} \neq A\}$ とおく. もし A' が ideal になるとき A を primal ideal という.

max. n. p. to A ideal の intersection pl (A) を A の primal adjoint ideal といい, A が primal ideal であることと $A'=pl(A)$ が同値であった. (Barnes 〔1〕).

さて吾々の立場にかえって,

Proposition 3　次の 4 つの条件は互に同値である.

(i) A は s-primal である.

(ii) A' は maximum q. s. n. p. to A ideal である.

(iii) A' は q. s. n. p. to A ideal である.

(iv) $A'=pl(A)=\bar{A}$.

ここで A' は Def. 6 によったもので必ずしも ideal ではない.

Proof　(i) ⟶ (ii) は Prop. 2 と Corol. 1 とより. (ii) ⟷ (iii) は自明. (ii) → (iv) は Th. 1 より maximum q. s. n. p. to A ideal は $\bar{A}$ に等しいから.

(iv) ⟶ (i) は s-primal の definition. より.

さて次のことを述べよう. primality は基本系としてすべての A に $\{S_\alpha^A\}=\{R\}$ を対応させたときの s-primality に一致する. まず,

Lemma 1　A の基本系を $\{S_\alpha^A\}=\{R\}$ とするとき, $\bar{A}=pl(A)$ であり, 特に A が primal ideal であることと A が s-primal ideal であることが同値である.

Proof　この s-primality では元 x が n. p. to A であることと, x が s. n. p. to A であることが同値である. よって Th. 1 より max. n. p. to A ideal, max. q. s. n. p. to A ideal のそれぞれの intersection として $pl(A)=\bar{A}$ がいえる. よって更に Prop. 3 より, A が primal ideal $\longleftrightarrow A'=pl(A) \longleftrightarrow A'=pl(A)=\bar{A} \longleftrightarrow A$ が s-primal ideal.

Proposition 4　すべての A に対して基本系 $\{S_\alpha^A\}=\{R\}$ とおくとき, つねに $\bar{A}=p\ell(A)$ であり, 特に A が primal ideal であることと A が s-primal ideal であることが同値である.

以後この場合の s-primality を pl-primality (または単に primality) といい, $\bar{A}$ を $p\ell(A)$ で示す.

次に L. Lesieur, R. Croisot により導入された tertiarity を扱おう.

任意の A に対し $ter(A)=\{x \mid A \not\ni b$ なる任意の b に対し $(b) \cap Ax^{-1} \not\subseteq A\}$ とおくとき ter(A) は ideal をなすことが示され, $ter(A) \supseteq A$ であった.

さらに

Definition 7　A が tertiary ideal とは $Ax^{1-} \neq A$ と $x \in ter(A)$ が同値となることである．

(Y. Kurata〔3〕)

さてこの tertiarity は吾々の基本系としてすべてのAに対して $\{S_\alpha^A\}=\{$ すべての ideal C $\}$ を対応させたときのs-primality に一致する．まず

Lemma 2　Aの基本系 $\{S_\alpha^A\}=\{$ すべての ideal C$\}$ のとき $ter(A)=\bar{A}$ である．特にAが tertiary ideal であることとAが s-primal ideal であることが同値である」

Proof 任意のAに対し ter(A)は ideal であり，かつ definitionより $ter(A)=\{x \mid$ 任意の$C \not\subseteq A$に対し$C \cap Ax^{-1} \not\subseteq A\}$ であった．よって ter(A) は maximum q. s. n. p. to A ideal である．よって Th. 1より $ter(A)=\bar{A}$.

次にAが tertiary ideal$\longleftrightarrow A'=pl(A)=ter(A)\longleftrightarrow A'=pl(A)=\bar{A}\longleftrightarrow A$ が s-primal ideal. (Prop. 3)

Proposition 5　すべてのAについて基本系 $\{S_\alpha^A\}=\{$すべての ideal C$\}$ のときつねに $ter(A)=\bar{A}$ である．特にAが tertiary ideal であることとAが s-pimal ideal であることは同値である．

以後この場合の s-rimality を ter-primality (または単に tertiariarity) といい，Āを ter(A) で示す．

次に s-primality の order について述べよう．

Definition 8　s_1-primality が s_2-primality より強いとはすべての s_1-primal ideal が s_2-primal ideal なることをいう．更にすべての s_2-primal が s_1-primal ideal になるとき，s_1, s_2-primalisy は同等という．〔4〕

これについて

Lemma 3　2つの s_1, s_2-primality のAに対する基本系をそれぞれ $\{M_\alpha^A\}$, $\{N_\beta^A\}$ とする．もしAに含まれない任意の $N^A \in \{N_\beta^A\}$ について，$A+N^A \supseteq M^A$ かつ $M^A \not\subseteq A$ をみたす M^A が $\{M_\alpha^A\}$ に含まれるとき，Aがs_1-primal ideal ならばAは s_2-rimal idealである．

Proof $\{M_\alpha^A\}$, $\{N_\beta^A\}$ が条件をみたすとする．いまAが S_2-primal ideal でないとすると，Prop. 3の (iii) より $At^{-1} \neq A$, $N^A \not\subseteq A$ かつ $At^{-1} \cap N^A \subseteq A$ をみたす t, $N^A \in \{N_\beta^A\}$ があることになる．

$\therefore A=A+(At^{-1}\cap N^A)=At^{-1}\cap(A+N^A)\supseteq At^{-1}\cap(A+M^A)=A+(At^{-1}\cap M^A)$ $\therefore A \supseteq At^{-1}\cap M^A$.

ここで条件より $M^A \not\subseteq A$ にとれたから再び prop. 3の (iii) によりAは s_1-primal ideal でない．

Corollary 2　2つの s_1, s_2-primality のAに対する基本系をそれぞれ $\{M_\alpha^A\}$, $\{N_\beta^A\}$ とするとき，

$\{M_\alpha^A\}\supseteq\{N_\beta^A\}$ ならばAが s_1-psimal ideal ならばAは s_2-primal ideal である．

Lemma 3 に於ける基本系の条件を(K)で表わそう．直ちに次がいえる．

Theorem 2　s_1, s_2-primality のAに対する基本系をそれぞれ $\{M_\alpha^A\}$, $\{N_\beta^A\}$ とする．いますべてのAについて (K) が成り立てば s_1-primality は s_2-primality より強い．

Corollary 3　s_1, s_2-primality のAに対する基本系をそれぞれ $\{M_\alpha^A\}$, $\{N_\beta^A\}$ とする．いますべてのAについて $\{M_\alpha^A\}\supseteq\{N_\beta^A\}$ が成立てば s_1-primality は s_2-primality より強い．

Proposition 6　s-primality に於て primality は最弱であり，tertiarity は最強である．

Proof. 前段は prop. 4とTh. 2より．後段は prop. 5とCorol. 3より．

最後に任意の強さをもつ s-primality の存在を示そう．

いまある s-primality に関する s-primal ideal の set を $\mathcal{J}$(s) で示すとき次が成り立つ．

Theorem 3 ideal の set $\mathcal{J}$ が或る s-primality の $\mathcal{J}$(s) に等しいことと $\mathcal{J}(pl)\supseteq\mathcal{J}\supseteq\mathcal{J}(ter)$ は同値である．

Proof. 任意の $\mathcal{J}(s)$ が $\mathcal{J}(pl)\supseteq\mathcal{J}(s)\supseteq\mathcal{J}(ter)$ をみたすことは Prop. 6より明かである．

逆に $\mathcal{J}(pl)\supseteq\mathcal{J}\supseteq\mathcal{J}(ter)$をみたす注意の$\mathcal{J}$に対して，

$A\in\mathcal{J}$ なるAには基本系 $\{S_\alpha^A\}=\{R\}$ とおき

$B\notin\mathcal{J}$ なるBには基本系 $\{S_\beta^A\}=\{$すべての ideal C$\}$ とおく．AについてはAが primal ideal であることと Lemma 1よりAは s-primal iceal である．BについてはBが tertiary ideal でないことと Lemma 2よりBは s-primal ideal でないことがわかる．よって上のようにして作った s-primality に対して$\mathcal{J}=\mathcal{J}(s)$が成立つ．

Reference

1) W. E. Barnes, Primal ideals and isolated components in noncommutative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956).

2) L. Fuchs, Partially ordered algebraic Systems, Pergamon press. New York, (1963).

3) Y. Kurata, On an additive ideal theory in a nonassociative ring, Math. Zeitschr. 88 (1965).

4) B. A. Andrunakievic, U. M. Rabuhin. Primalties in rings (Russian), Mat. Issled, I (1966) Uyp.

(昭和43年9月7日受理)