非対称非線形要素（第6報）

（記述関数の一般化表示）

嶺　勝敏*

Unsymmetrical Nonlinear Element (6)

Katsutoshi Mine

1. はしがき

実験をしていると，線形理論では説明のつかない現象を観測することが多い．高調波や分数調波の振動，亜調波振動，Limit cycle, Jumping phenomena, stick-slip motion, Jerking motion 等々がそれである．これらの現象は，非線形振動論[1]あるいは非線形制御理論[2]によって解析され，さらには非線形振動の合成理論ならびに積極的応用[3]の傾向にあると思われる．

非線形理論の中で記述関数法は最も簡明と思われる．このことが記述関数法が，非線形現象のすべてを説明することができないにもかかわらず，よく利用される理由と考える．

前報までは，主として種々の非対称非線形要素に対して各個的に記述関数を求めてきた．本報告では，非線形要素の特性に履歴のあるなしにかかわらず，同一の手法で記述関数が計算できることを述べ，さらに ALGOL プログラムを示す[5]．

2. 記述関数

非線形要素への入力信号 $x(t)$ を

$$x(t)=X\sin\omega t \quad\cdots\cdots(1)$$

出力 $y(t)$ の Fourie 級数を

$$\begin{aligned}y(t)&=a_0/2+a_1\sin\omega t+a_2\sin 2\omega t+\cdots\\&\quad+b_1\cos\omega t+b_2\cos 2\omega t+\cdots\\&\doteqdot a_1\sin\omega t+b_1\cos\omega t\quad\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

とおき，(1), (2)式を Laplace 変換すれば

$$Lx(t)=\frac{X\omega}{s^2+\omega^2}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$Ly(t)=\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{b_1 s}{s^2+\omega^2}\quad\cdots\cdots(4)$$

記述周数 $N(X, j\omega)$ は[5]

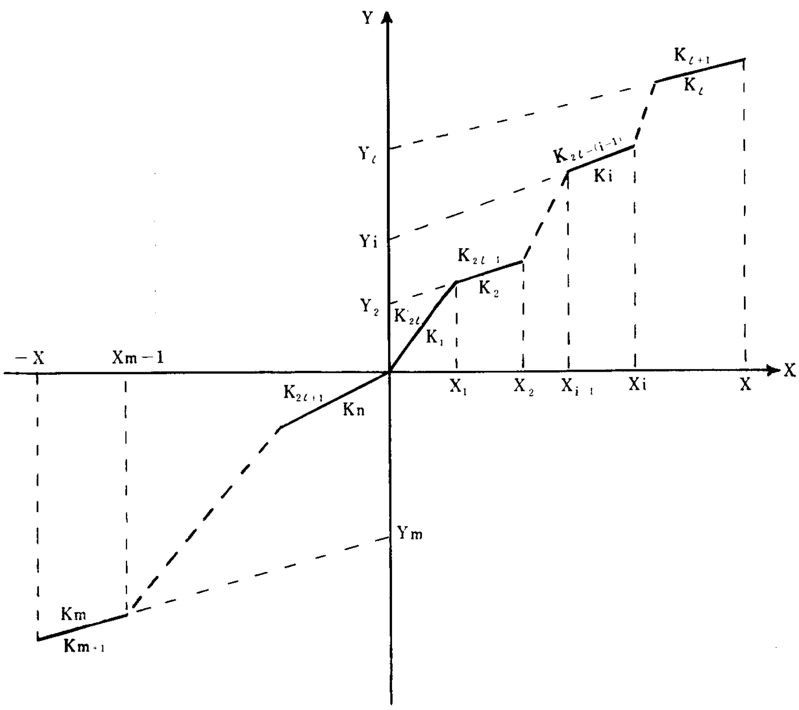
$$N(X, j\omega)=\left[\frac{a_1}{X}+\frac{sb_1}{\omega X}\right]_{s=j\omega}$$

$$=\frac{a_1}{X}+j\frac{b_1}{X}=a-jb\quad\cdots\cdots(5)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}y(t)\,d\omega t\\a_1&=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}y(t)\sin\omega t\,d\omega t\\b_1&=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}y(t)\cos\omega t\,d\omega t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

2—1 実数形記述関数　非線形要素の特性が Fig 1のように断片線形化できる場合について考える．この場合は履歴がないので位相のおくれがない，よって(5)式の虚数項 jb は0となり



Fig, 1 Formalistic extension for nonlinear characteristic without memory where $\alpha_i=\sin^{-1}X_i/X$

$$N(X, j\omega)=a_1/X=a\quad\cdots\cdots(7)$$

ただし，履歴がないので傾斜は，

* 宇部工業高等専門学校電気工学教室

$$K_1=K_{2l},\quad K_i=K_{2l-(i-1)},\quad K_n=K_{2l+1}\cdots\cdots\cdots(8)$$

また Y_i も同様に表示できる．

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left\{\int_o^{\alpha}(K_1\ X\ \sin\ \omega t+Y_1)\sin\ \omega t\ d\omega t+\cdots\cdots\right.$$

$$+\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}(K_i\ X\sin\ \omega t+Y_i)\sin\ \omega t\ d\omega t+\cdots\cdots$$

$$\left.+\int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n}(K_n\ X\ \sin\ \omega t+Y_n)\ \sin\ \omega t\ d\omega t\right\}$$

$$a_1=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{Ki\ X}{2\pi}\left(\alpha_i-\alpha_{i-1}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha_i+\frac{1}{2}\sin\ 2\alpha_{i-1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{Y_i}{\pi}(\cos\ \alpha_i-\cos\ \alpha_{i-1})\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

参考のために a_0 も示せば，下式のようになる．

$$a_0=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{K_1X}{2\pi}(\cos\ \alpha_{i-1}-\cos\ \alpha_i)+\frac{Y_i}{\pi}(\alpha_i-\alpha_{i-1})\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

2－2　複素数形記述関数　非線形要素の特性が Fig. 2 のように履歴を有する場合，記述関数は複素数形となる．この場合は，K_i に対して(8)式の等号関係が必ずしも成立しない，Y_i に対しても同様である．

Fig. 2 の場合の a_1 および a_0 は，おのおの(9)，(10)式で表わされるが，b_1 は下式のようになる．

$$b_1=\frac{1}{\pi}\left\{\int_o^{\alpha_1}(K_1\ X\sin\ \omega t+Y_1)\cos\ \omega t\ d\omega t+\cdots\cdots\right.$$

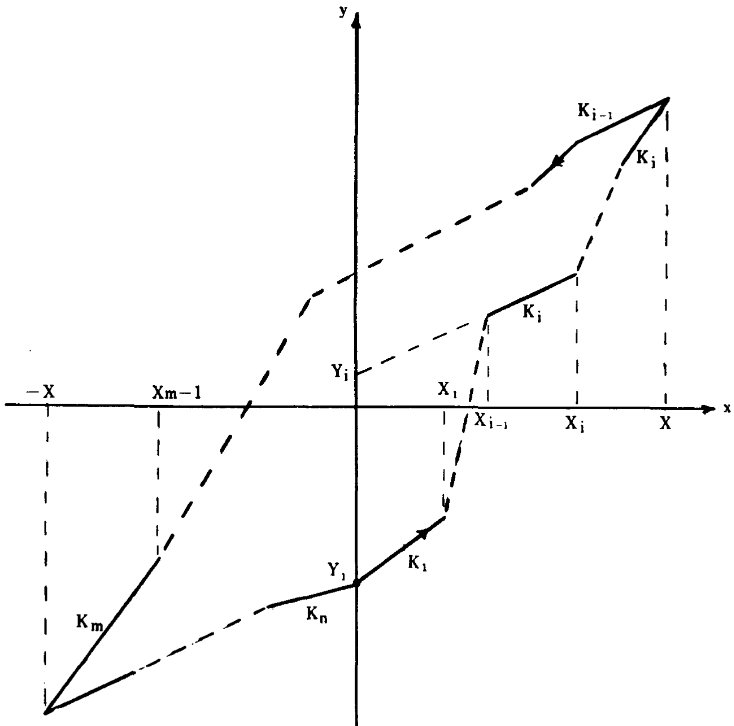


Fig. 2　Formalistic extension for nonlinear Characteristic with memory where $\alpha_i=\sin^{-1}X_i/X$

$$+\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}(K_i\ X\ \sin\ \omega t+Y_i)\cos\ \omega t\ d\omega t+\cdots\cdots$$

$$\left.+\int_{\alpha_{n-1}}^{2\pi}(K_n\ X\ \sin\ \omega t+Y_n)\cos\ \omega t\ d\omega t\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{K_iX}{2\pi}(\cos 2\ \alpha_{i-1}-\cos 2\ \alpha_i)\right.$$

$$\left.+\frac{Y_i}{\pi}\ (\sin\ \alpha_i-\sin\ \alpha_{i-1})\right\}\cdots\cdots\cdots(11)$$

よって

$$|N(X,j\omega)|=\sqrt{(a_1/X)^2+(b_1/X)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdots(12)$$

$$\varphi=\tan^{-1}(-b/a)$$

3．複素数形記述関数の ALGOL プログラム

```
begin  integer N; Readinteger (N);
  begin  arrey ALPHA〔0:N〕; arrey K, Y〔1:N〕;
         real X, a, b, ABSN, PHAI, x, y, z;
         procedure COMPLEX(ALPHA, K, Y, X,
         N,a, b);
         value X, N; arrey ALPHA, K, Y;
         integer N; real X, a, b;
  begin  integer i; real PAI; a: = b: = 0 ;
         PAI: =3.141592654;
    for  i: = 1  step 1  until N do
      begin  a:=a+K〔i〕*X/(2 *PAI)
               *(ALPHA〔i〕-ALPHA〔i-1〕
               -0.5*sin(2 *ALPHA〔i〕)
               +0.5*sin(2 *ALPHA〔i-1〕))
               -Y〔i〕/PAI*(cos (ALPHA〔i〕)
                    -cos(ALPHA〔i-1〕));
             b:=b+K〔i〕*X/(2 * PAI)
               *(cos (2 * ALPHA〔i-1〕)
               -cos ( 2 * ALPHA〔i〕))
               +Yi〔i〕/PHI*(sin(ALPHA〔i〕)
                -sin(ALPHA〔i-1〕))
      end
    end of COMPLEX;
    START : Readarrey (ALPHA) ; Readarrey (K);
            Readarrey (Y) ; Readreal (x) ;
            Readreal (y) ; Readarrey (z) ;
         for  X: =x step y until z do
      begin  COMPLEX(ALPHA, K, Y, X, N,
                         a, b);
             a:=a/X; b: =b/X;
               ABSN: =sqrt (a↑2 +b↑2 );
               PHAI: =arctan(-b/a);
```

```
        CRLF;
        Printstring ('X='); Printreal (X, 10);
        Printstring ('ABS (N)=');
        Printreal (ABS N, 10);
        Printstring ('PHAI=');
        Printreal (PHAI, 10)
    end
  end
end
```

4. む す び

非線形要素の一般的な特性を断片線形化し，その記述関数を実数形と複素数形に分類し，両者を統一的に表現した．非線形要素の特性に履歴がない場合の実数形記述関数と，履歴があるときの複素数形記述関数とを同一の手順によって求めることができることを示した．

ついで，FACOM 231 による複素数形記述関数値を求めるための ALGOL プログラムを示した．今後は，この手法で種々の非線形要素の特性に対して適用してみようと思う．

終りに，常々御指導いただいている京大工学部樵木義一教授，得丸英勝教授，計算機に関して御教示下さった山口大学工学部吉岡敏彦講師に深謝の意を表わす．

参 考 文 献

1）樵木；非線型振動論，共立出版，（昭34）．

2）J. E. Gibson; Nonlinear Automatic Control, McGraw (1963).

3）井上，荒木，林；振動機械の自己同期化について，機学論，Vol. 32, No. 234，（昭41. 2）．および Vol. 33, No. 246，（昭42. 2）．

4）R. J. Kochenburger; AIEE, Tech. Paper, Vol. 68, 18, pp. 270～284, (1949).

5）嶺，吉岡；記述関数の ALGOL プログラム，電気四学会中国支部連大講演論文集，pp. 139～140, (1967).

（昭和43年3月2日受理）