

# ラプラス変換の振動系，梁，積分方程式その他への応用

## 第1報 梁への応用

望月太喜雄\*

On the Application of Laplace Transform to the Dynamical Vibrations, Beam Problems,  
Integral Equations and etc. (No. I)

by

Takio Mochizuki

### Abstract

The method of Laplace transformation offers a powerful technique not only for the fields of applied mathematics but also sorts of physical problems.

In fact, ordinary differential equations are reduced to algebraic ones by the application of transforms. As to the beam problems, the Laplace transform method, also, offers a very simple approach. In contrast to the classical method, which requires equations to be written for each interval between loads, the transform method enables any loading to be accounted for by a single equation in terms of boundary values at the origin.

### 1. はしがき

梁のたわみについては従来弾性曲線の基本式より積分を2回繰返すいわゆる2重積分法により一般解を求め、これに境界条件(支持条件)を当てはめて係数決定を行なうという可成り複雑な計算を行なうことを余儀なくされている。ところでラプラス変換を導入すれば計算が簡易化されるばかりでなく、1つの統一的方法をもって容易に解を求めることができる。また複雑な問題になればなるほど後述の如くその威力は増大するといえよう。この分野における文献は未だ極めて少い<sup>1)~3)</sup>。筆者はかねがね、ユニット関数、インパルス関数、ダブレット関数を用いて梁のたわみについて何んらかの総括的なまとめを試みたいと考えていた。ここにその一部を報告する。

### 2. ラプラス変換の特性

ラプラス変換の理論は自動制御理論と共に開花展開してきたことは周知の通りである。そこで自動制御理論の中核を形造っている伝達関数(transfer-function)について簡単な問題を取り上げてみたい。いま2階微分方程

式

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = k y(t)$$

が与えられたとする。初期条件をすべて0として(実際自動制御系においてはその1つの系の平衡状態を考え、全ての初期値を0にとる)両辺のラプラス変換を行なえば

$$(as^2 + bs + c)X(s) = k \cdot Y(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{k}{as^2 + bs + c}$$

と  $Y(s)$  を入力、 $X(s)$  を出力と考えれば簡単に伝達関数が求まるが、ここで最も注意すべきことは伝達関数はすべて、初期条件が0なるとき与えられる関数であるということである。同様に線形微分方程式(特に定係数)の解を求める時も初期値=0の条件がラプラス変換をしてその威力を最も効果的に発揮せしめているといえよう。

次に Fig. 1 の振動系を考えてみたい。上端の initial velocity と final velocity を求めてみよう。明らかに

$$C \frac{dx}{dt} + Kx = F \quad \text{ラプラス変換すると}$$

\* 宇部工業高等専門学校機械工学教室

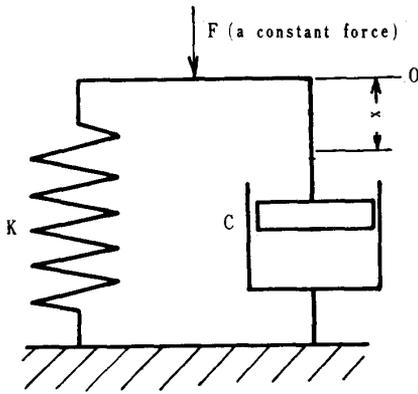


Fig. 1

$$C[S \cdot X(s) - x(0)] + K \cdot X(s) = \frac{F}{S} \quad \text{ただし}$$

$\mathcal{L}x(t) = X(s)$  基点を0とするゆえ,  $x(0) = 0$  よって

$$X(s) = \frac{F}{S(CS + K)}$$

ところで微分定理  $\mathcal{L}f'(t) = S \cdot F(s)$  を用いると (ただし  $S \cdot F(s)$  の分母の次数 > 分子の次数)

$$\mathcal{L}x'(t) = S \cdot X(s) \quad \therefore \mathcal{L}v(t) = S \cdot X(s) = \frac{F}{CS + K}$$

$$\therefore v(0) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{S \cdot F}{CS + K} = \frac{F}{C}$$

$$\text{また } v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \cdot F}{CS + K} = 0$$

すなわち, 上記の如く完全解を求めることなしに,  $v(0)$ ,  $v(\infty)$  を求め得ることはラプラス変換を行なえばこそ, 始めて可能になるといえよう. また上の問題は容易に等価な RL 回路に変換でき,  $F$  を入力, 偏位  $x$  を出力とすれば, この入, 出力の関係は最も簡単な一次おくれ系を作っていることも明らかである. 以上ラプラス変換の応用例を取り上げその特性を考察したのであるが, 次に梁のたわみの問題にはいりたい.

### 3. 単位ステップ関数, 単位インパルス関数, 単位ダブルット関数と梁へ応用

数学的詳細にわたっては文献 (例えば<sup>1)</sup>) にゆずるとしてわれわれは, 分布荷重をユニット関数, 集中荷重をインパルス関数, モーメントをダブルット関数, 傾斜荷重をランプ関数でそれぞれ表わしう. それらの関数をまとめて Table. 1 (p. 20) に示す. 注意すべきことは graphical expression において, unit impulse function は大きさ  $1/\epsilon$  の分布荷重が  $\epsilon$  の中に加わり,  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限值として, すなわち  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \times \frac{1}{\epsilon} = 1$  の大きさの集中荷重を示しているということである. すなわち分布荷

重の極限として集中荷重が示され, もし  $1/\epsilon$  に対して  $P/\epsilon$  をとれば大きさ  $P$  の集中荷重を示しう. また unit doublet function においては大きさ  $1/\epsilon$  の2つの集中荷重が向きが反対で  $\epsilon$  の間隔をへだてて加わり, 結局  $1/\epsilon \times \epsilon = 1$  の大きさのモーメント (時計回り) が  $A$  点に加わっていることを示す. すなわち集中荷重の極限として, 結局, 分布荷重の極限としてモーメントを示すことになり,  $1/\epsilon^2$  の代りに  $M_0/\epsilon^2$  をとれば大きさ  $M_0$  のモーメントを表わしう. これらの関係をさらに Fig. 2 に示す.

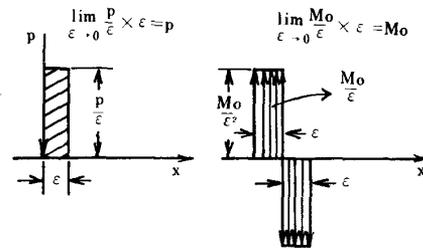


Fig. 2

### 4. general beam equation と利用すべき端の条件

弾性曲線の基礎方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

$y$ : deflection of a beam  
 $x$ : displacement from the origin

ところで

$$\frac{dM(x)}{dx} = F(x), \quad \frac{dF(x)}{dx} = w(x)$$

$$\text{よって } \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI} \quad (2)$$

$EI$ : stiffness of a beam  
 $M$ : bending moment  
 $F$ : shearing force  
 $w$ : loading (load/unit length)

②に対する subsidiary equation は

$$Y(s) = \frac{y(0)}{S} + \frac{y'(0)}{S^2} + \frac{y''(0)}{S^3} + \frac{y'''(0)}{S^4} + \frac{W(s)}{EIS^4}$$

$$\therefore y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{1}{EI} \mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} \quad (3)$$

(general beam equation)

$$= A(x) + W(x)$$

後述の如く,  $A(x)$  すなわち前の 4 項は支点的性質により一義的に決定されるもので支持条件を示し,  $W(x)$  すなわち最後の項は荷重積載状態により決定されるもので荷重条件を示す. また  $y(o)$ ,  $y'(o)$ ,  $y'''(o)$  が次の如き意味を持つことは明らかである.

- $y(o)$  = (deflection at  $x = 0$ )
- $y'(o)$  = (slope at  $x = 0$ )
- $y''(o) = 1/EI \cdot$  (moment at  $x = 0$ )
- $y'''(o) = 1/EI \cdot$  (shearing force at  $x = 0$ )

これらを求めるに当り利用すべき端の条件は

単純梁  $y(o) = 0, y''(o) = 0, y(l) = 0, y''(l) = 0$

片持梁  $y(o) = 0, y'(o) = 0, y''(l) = 0$

両端支持梁  $y(o) = 0, y'(o) = 0, y(l) = 0, y'(l) = 0$

(注意) 1)  $M$  の符号は弾性曲線が上に凹の時,  $y' > 0$  となる故  $M > 0$  と約束する. 力は上向きを正, 従って剪断力も上向きを正と約束する.

2) つねに左端を原点にとり右へ  $x$  をとることにする. よって片持梁は自由端をつねに右へとるようにする.

次に筆者の計算した中の代表的なものを uniform beam, statically indeterminate beam, nonuniform beam の 3 項目に分けて示す.

5. the deflection of uniform beams

(1)

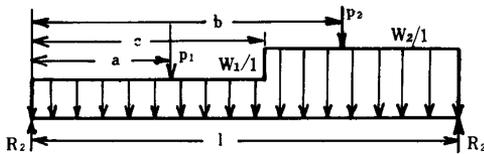


Fig. 3

(解) Fig. 3 において荷重関数は註(1)

$$w(x) = -w_1 - (w_2 - w_1)u(x-c) - P_1u'(x-a) - P_2u'(x-b)$$

よって Table 1 を用いると

註(1) 荷重関数 (loading function) は正しくは

$\frac{1}{EI} \mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4}$  すなわち  $W(x)$  を指す. また自動制御の数学でよく出る weighting function はときに荷重関数と訳されているが当然, 重み関数と訳されるべきであると思う.

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{S^4}$$

$$\left\{ -\frac{w_1}{S} - (w_2 - w_1) \frac{e^{-cs}}{S} - P_1 e^{-as} - P_2 e^{-bs} \right\}$$

$$= -\frac{w_1 x^4}{4!} - \frac{(w_2 - w_1)}{4!} (x-c)^4 u(x-c)$$

$$- \frac{P_1 (x-a)^3}{3!} u(x-a) - \frac{P_2 (x-b)^3}{3!} u(x-b)$$

また boundary condition より

$$y(o) = y''(o) = 0, \quad y'''(o) = \frac{F(o)}{EI} = \frac{R_1}{EI}$$

これらを(3)式に代入すると梁のたわみは

$$y(x) = y'(o)x + \frac{R_1}{6EI} x^3 - \frac{1}{EI}$$

$$\left\{ \frac{w_1}{24} x^4 + \frac{w_2 - w_1}{24} (x-c)^4 u(x-c) \right.$$

$$\left. + \frac{P_1}{6} (x-a)^3 u(x-a) + \frac{P_2}{6} (x-b)^3 u(x-b) \right\}$$

ただし  $y(l) = 0$  より

$$y'(o) = -\frac{R_1 l^2}{6EI} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{w_1}{24} l^3 + \frac{w_2 - w_1}{24} \cdot \frac{(l-c)^4}{l} \right.$$

$$\left. + \frac{P_1 (l-a)^3}{6l} + \frac{P_2 (l-b)^3}{6l} \right\}$$

$$\text{また } R_1 = \frac{1}{2l} \left\{ 2P(l-a) + 2P_2(l-b) + w_1 l^2 \right.$$

$$\left. + w_2 (l-c)^2 \right\}$$

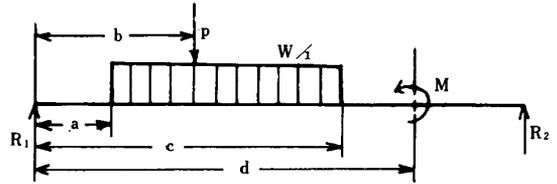


Fig. 4

(2)

(解) Fig. 4 より荷重関数は

$$w(x) = -Pu'(x-b) - w\{u(x-a) - u(x-c)\} - Mu''(x-d)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{P}{S^4} e^{-bs} - \frac{w}{S^5} e^{-as} \right.$$

$$\left. + \frac{w}{S^5} e^{-cs} - \frac{M}{S^3} e^{-ds} \right\}$$

$$= -\frac{P(x-b)^3}{3!} u(x-b) - \frac{w(x-a)^4}{4!} u(x-a)$$

$$+ \frac{w(x-c)^4}{4!} u(x-c) - \frac{M(x-d)^2}{2!} u(x-d)$$

ところで境界条件より

$$y(o) = y''(o) = 0, \quad y'''(o) = \frac{F(o)}{EI} = \frac{R_1}{EI}$$

$$\therefore y(x) = y'(0)x + \frac{1}{6EI} \left\{ R_1 x^3 - P(x-b)^3 u(x-b) \right\} - \frac{1}{24EI} \left\{ w(x-a)^4 \cdot u(x-a) - w(x-c)^4 u(x-c) + 12M(x-d)^2 u(x-d) \right\}$$

ただし  $y(l) = 0$  より

$$y'(0) = -\frac{1}{6EI} \left\{ R_1 l^3 - P((l-b)^3) \right\} + \frac{1}{24EI} \left\{ w(l-a)^4 - w(l-c)^4 + 12M(l-d)^2 \right\}$$

また  $R_1 = \frac{1}{2l} \left\{ 2P(l-b) + w(c-a)(2l-c-a) + 2M_0 \right\}$

6. statically indeterminate beams

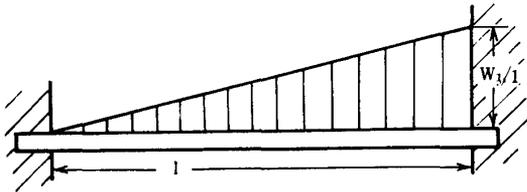


Fig. 5

(3)

(解) Fig. 5 より荷重関数は

$$w(x) = -\frac{w_1}{l}x, \text{ よって } \mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} = \mathcal{L}^{-1} \left( -\frac{w_1}{l s^6} \right) = -\frac{w_1 x^5}{5! l}$$

境界条件より  $y(0) = y'(0) = 0$

$$\therefore y(x) = y''(0) \frac{x^2}{2} + y'''(0) \frac{x^3}{6} - \frac{w_1 x^5}{120EI}$$

ところで  $y(l) = 0$  および  $y'(l) = 0$  より

$$y''(0) = -\frac{w_1 l^2}{30EI}, \quad y'''(0) = \frac{3w_1 l}{20EI}$$

これより  $R_1 = F(0) = \frac{3w_1 l}{20}$ ,  $R_2 = \frac{7w_1 l}{20}$ ,  $M(0) = -\frac{w_1 l^2}{30}$

も求まる

$$\therefore y(x) = \frac{w_1 x^2}{120EI} (-2l^3 + 3l^2 x - x^3)$$

(4)

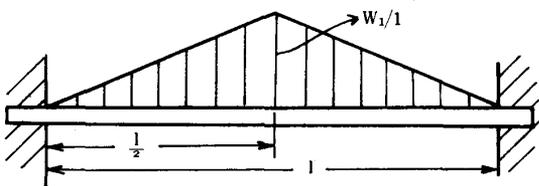


Fig. 6

(解) Fig. 6 より荷重関数は

$$w(x) = -\frac{2w_1}{l}x + \frac{4w_1}{l} \left( x - \frac{l}{2} \right) u \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

よって  $\mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{2w_1}{l} \left( \frac{1}{S^6} - \frac{2}{S^6} e^{-\frac{l}{2}s} \right) \right\}$

$$= -\frac{2w_1}{l} \left\{ \frac{x^5}{5!} - \frac{2}{5!} \left( x - \frac{l}{2} \right)^5 u \left( x - \frac{l}{2} \right) \right\}$$

ところで  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y'''(0) = \frac{F(0)}{EI} = \frac{w_1 l}{4EI}$

$$\therefore y(x) = \frac{y''(0)}{2} x^2 + \frac{w_1 l}{24EI} x^3 - \frac{w_1}{60EI} \left\{ x^5 - 2 \left( x - \frac{l}{2} \right)^5 u \left( x - \frac{l}{2} \right) \right\}$$

ただし  $y(l) = 0$  より  $y''(0) = -\frac{5w_1 l^2}{96EI}$

また  $y_{max} = y \left( \frac{l}{2} \right) = -\frac{13w_1 l^4}{768EI}$

7. nonuniform beams

(5)

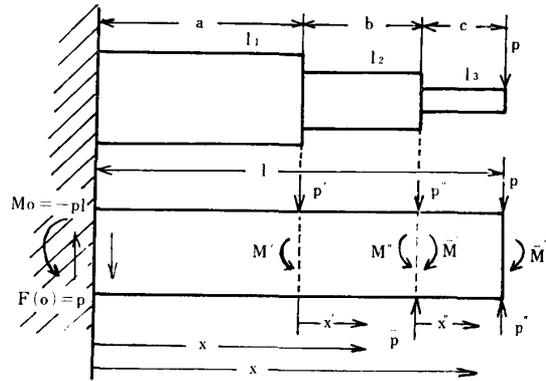


Fig. 7

(解) Fig. 7 より荷重関数は

$$w(x) = \bar{w}(x) \quad (\text{ただし } \bar{w}(x) = \text{modified load})$$

$x=a$  を定点としての  $x'$  の位置における  $\frac{M}{I}$  equation

は

$$\frac{M_{x'}}{I_2} = \frac{1}{I_2} (M_a + F_a x')$$

$$= \frac{1}{I_1} \left\{ M_a + F_a x' - M_a \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) - F_a \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) x' \right\}$$

同様にして

$$\frac{M_{x'}}{I_3} = \frac{1}{I_1} \left\{ M_b + F_b x'' - M_b \left( 1 - \frac{I_1}{I_3} \right) - F_b \left( 1 - \frac{I_1}{I_3} \right) x'' \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_a &= -P(l-a), \quad F_a = P \\ M' &= M_a \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) = -P(l-a) \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} P' = F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = P \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\ M'' = M_b \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right), P'' = F_b \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \end{cases}$$

よって  $P', M'$  と平衡すべき  $\bar{P}', \bar{M}'$  が図の如く生ずるものとする.  $P'', M''$  と平衡すべき  $\bar{P}'', \bar{M}''$  が同様に生ずるものとする.

$$\begin{aligned} \bar{P}' &= P', \bar{M}' = M' + P'b, \bar{P}'' = P'', \bar{M}'' = M'' + P''c \\ P^2C \text{ よって } w(x) &= -P'u'(x-a) - M'u''(x-a) \\ &+ \bar{P}'u'(x-a-b) + \bar{M}'u''(x-a-b) - P''u'(x-a-b) \\ &- M''u''(x-a-b) + \bar{P}''u'(x-l) + \bar{M}''u''(x-l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{P'}{S^4} e^{-as} - \frac{M'}{S^3} e^{-as} + \frac{\bar{P}'}{S^4} e^{-(a+b)s} \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{M}'}{S^3} e^{-(a+b)s} - \frac{P''}{S^4} e^{-(a+b)s} - \frac{M''}{S^3} e^{-(a+b)s} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{P'}{3} (x-a)^3 + M' (x-a)^2 \right\} u(x-a) \\ &+ \frac{1}{6} \left\{ \bar{P}' (x-a-b)^3 + 3\bar{M}' (x-a-b)^2 \right. \\ &- \left. P'' (x-a-b)^3 - 3M'' (x-a-b)^2 \right\} u(x-a-b) \end{aligned}$$

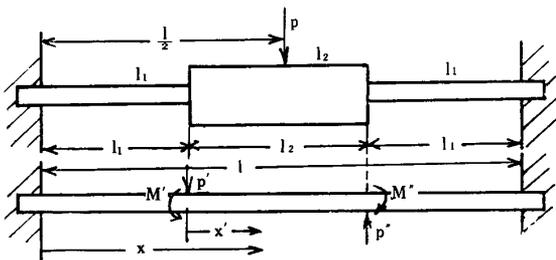
ところで境界条件より

$$y(o) = y'(o) = 0, y''(o) = \frac{M(o)}{EI_1} = \frac{-Pl}{EI_1},$$

$$y'''(o) = \frac{F(o)}{EI_1} = \frac{P}{EI_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore y(x) &= -\frac{Pl}{2EI_1} x^2 + \frac{P}{6EI_1} x^3 + \frac{1}{6EI_1} \\ &\left\{ -P'(x-a) - 3M' \right\} (x-a)^2 \\ &\times u(x-a) + \frac{1}{6} \left\{ \bar{P}' (x-a-b)^2 + 3\bar{M}' - P'' (x-a-b)^2 \right. \\ &- \left. 3M'' (x-a-b) \right\} \times (x-a-b) u(x-a-b) \\ y_{max} = y(l) &= -\frac{Pl^3}{3EI_1} + \frac{1}{6EI_1} \left\{ -P'(l-a)^3 - 3M'(l-a)^2 \right\} \\ &+ \left\{ \bar{P}C + 3\bar{M}' - P''C - 3M'' \right\} C^2 \end{aligned}$$

(6)



(解) Fig. 8 より荷重関数は

$$w(x) = -Pu' \left( x - \frac{l}{2} \right) + \bar{w}(x)$$

ただし  $\bar{w}(x) = \text{modified load}$

$x=l_1$  を定点として  $x'$  点の  $M/I$  equation は

$$\frac{M_{x'}}{I_2} = \frac{1}{I_2} (M_a + F_a x')$$

$$= \frac{1}{I_1} \left[ M_a + F_a x' - M_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) - F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) x' \right]$$

よって

$$M' = M_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right), P' = F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)$$

従ってこれらと平衡すべき  $M''$  と  $P''$  が図の如く生ずるものとする.

$$P'' = P' = F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)$$

$$\begin{aligned} M'' &= M' + P' l_2 = M_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) + F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) l_2 \\ &= (M_a + F_a l_2) \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = M_b \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } w(x) &= -Pu' \left( x - \frac{l}{2} \right) - P'u'(x-l_1) - M'u'' \\ &(x-l_1) + P''u'(x-l_1-l_2) + M''u''(x-l_1-l_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{W(s)}{S^4} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{P}{S^4} e^{-\frac{l}{2}s} - \left( \frac{P'}{S^4} + \frac{M'}{S^3} \right) e^{-l_1 s} \right. \\ &+ \left. \left( \frac{P''}{S^4} + \frac{M''}{S^3} \right) \times e^{-(l_1+l_2)s} \right\} \\ &= -\frac{P}{6} \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 u \left( x - \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{6} \left\{ P'(x-l_1) + 3M' \right\} \\ &(x-l_1)^2 u(x-l_1) + \frac{1}{6} \left\{ P''(x-l_1-l_2) + 3M'' \right\} \\ &(x-l_1-l_2)^2 u(x-l_1-l_2) \end{aligned}$$

ところで

$$y(o) = y'(o) = 0, y'''(o) = \frac{F(o)}{EI_1} = \frac{R_1}{EI_1} = \frac{P}{2EI_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore y(x) &= \frac{y''(o)}{2} x^2 + \frac{P}{12EI_1} x^3 + \frac{1}{6EI_1} \\ &\left\{ -P \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 u \left( x - \frac{l}{2} \right) \right. \\ &- \left. \left\{ P'(x-l_1) + 3M' \right\} (x-l_1)^2 u(x-l_1) \right. \\ &+ \left. \left\{ P''(x-l_1-l_2) + 3M'' \right\} (x-l_1-l_2)^2 u(x-l_1-l_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } y(l) = 0 \text{ より } y'''(o) = -\frac{Pl}{6EI_1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3EI_1 l^2} \left\{ -\frac{Pl^3}{8} - \left\{ P'(l-l_1) + 3M' \right\} (l-l_1)^2 \right. \\ \left. + (P'l_1 + 3M'') l_1^2 \right\} \end{aligned}$$

また

$$P' = F_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right), M' = M_a \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)$$

$$P'' = P', \quad M'' = M_b \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) = M_a \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right)$$

$$M_a = EI_1 \left\{ y''(0) + \frac{PI_1}{2EI_1} \right\}$$

を考へる必要がでてくるけれど以上の一般性は失われな  
い。筆者が計算したその他のものをまとめて Table 2,  
3 に示す。張り出し梁, 連続梁その他については第 2 報  
に示す

8. ま と め

以上のことより明かなごとく支持関数  $A(x)$  (この  
ように呼ぶことにする) の係数  $y(0), y'(0), y''(0),$   
 $y'''(0)$  は支持条件により決定され, 荷重関数  $W(x)$  (今  
までは  $w(x)$  を便宜上こう呼んでいたが) は荷重条件に  
より決まる。従って静定梁と不静定梁を区別する必要は  
なくなる。ただ断面が一様でない場合は modified load

参 考 文 献

- 1) Thomson Laplace Transformation 丸善.
- 2) T. ウィンスキー 梁の理論, 森北出版.
- 3) 小井土正六: 材料力学演習, 学献社.
- 4) Churchill 応用ラプラス変換, 彰国立.

(昭和43年3月26日受理)

Table 1. Function forms related with beams

function	general form	Laplace transform at $x=a$ (at $x=0$ )	graphical expression	application to the beams
unit step function	$u(x-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$  $\left( \frac{1}{s} \right)$		<b>distributed load</b>  $w(x) = w \{ u(x-a) - u(x-b) \}$
unit impulse function	$\delta(x-a)$ $= u'(x-a)$	$e^{-as}$  $( 1 )$		<b>concentrated load</b>  $w(x) = pu'(x-a)$
unit doublet function	$u''(x-a)$	$se^{-as}$  $( s )$		<b>couple</b>  $w(x) = Mou''(x-a)$
unit ramp function	$\int u(x-a) dx$ $= (x-a)$ $\bullet u(x-a)$	$\frac{e^{-as}}{s^2}$  $\left( \frac{1}{s^2} \right)$		<b>triangular load</b>  $W(x) = \frac{W_1}{b} \int u(x-a) dx$ $= \frac{W_1}{b} (x-a) u(x-a)$

Table 2

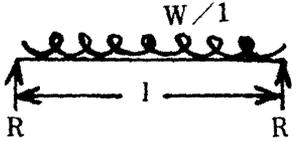
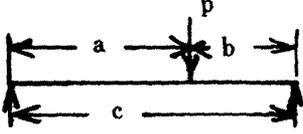
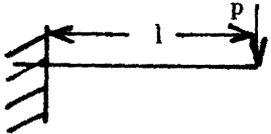
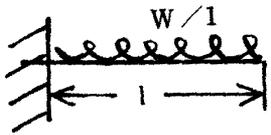
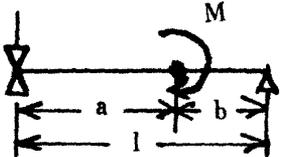
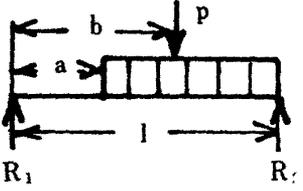
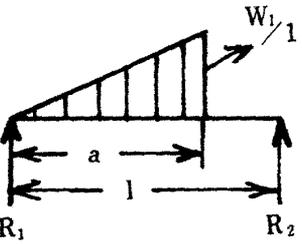
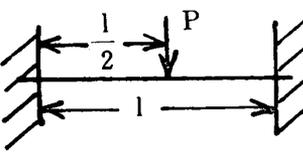
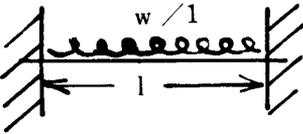
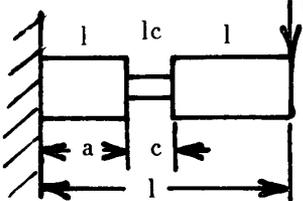
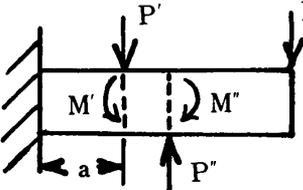
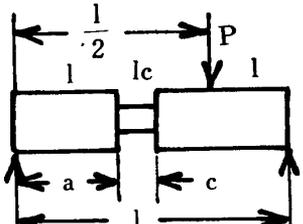
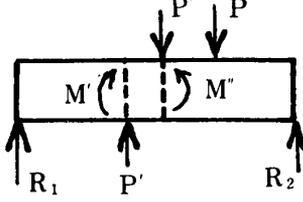
beam	loadingfunction	deflection y(x)
	$-W$	$\frac{1}{24EI} (-4R_1 l^2 + w l^3 + 4R_2 x^2 - w x^3) x$ $y_{\max} = -\frac{w l^4}{384EI}$
	$-Pu'(x-a)$	$\frac{P}{6EI} \left\{ -l^2 b + (l-a)^3 x + b x^3 - l(x'-a)^3 u(x-a) \right\}$
	$0$	$\frac{P}{6EI} (-3l + x) x^2$ $y_{\max} = \frac{P l^3}{3EI}$
	$-w$	$\frac{W}{24EI} (-6l^2 + 4lx - x^2) x^2$ $y_{\max} = -\frac{W l^4}{8EI}$
	$Mu''(x-a)$	$\frac{M}{6EI} \{ (l^2 - 3b^2) x - x^3 + 3l(x-a)^2 u(x-a) \}$
	$-Wu(x-a)$ $-Pu'(x-d)$	$\frac{1}{24EI} \left\{ -4R_1 l^2 + \frac{W}{l} (l-a)^4 + 4p(l-b)^3 \right\} x + 4R_2 x^3$ $-w(x-a)^4 u(x-a) - 4p(x-b)^3 \times u(x-b)$
	$-\frac{w_1}{a} x +$ $\frac{W_1}{a} x u(x-a)$	$y'(0)x + \frac{R_1}{6EI} x^3 - \frac{W_1}{EI a} \left\{ \frac{x^5}{120} - \frac{a(x-a)^4}{24} \right.$ $\left. x u(x-a) - \frac{(x-a)^5}{120} u(x-a) \right\}$ <p>ただし <math>y'(0) = -\frac{R_1}{6EI} l^2 + \frac{W_1}{EI a} \left\{ \frac{l^4}{120} \right.</math></p> $\left. - \frac{a(l-a)^4}{24l} - \frac{(l-a)^5}{120l} \right\}, R_1 = \frac{W_1 a(3l-2a)}{6l}$

Table 3

beam	loadingfunction w(x)	deflection y(x)
	$-pu'(x - \frac{1}{2})$	$\frac{P}{12EI} \left\{ -\frac{3}{4}lx^2 + x^3 - 2 \left( x - \frac{1}{2} \right)^3 u \left( x - \frac{1}{2} \right) \right\}$ $y_{max} = \frac{Pl^3}{192EI}$
	$-W$	$\frac{W}{24EI} (-l^2 + 2lx - x^2)x^2$ $y_{max} = -\frac{wl^4}{384EI}$
 	$W(x)$ $W(x) = -P'u'(x-a) + P''u'(x-a-c) - M'u''(x-a) + M''u''(x-a-c)$	$-\frac{Pl}{2EI}x^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{1}{EI} \left\{ -P \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) \times \frac{(x-a)^3}{6} - p(l-a) \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) \frac{(x-a)^2}{2} \right\}$ $\times u(x-a) + \left\{ p \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) \frac{(x-a-c)^3}{6} + (-p(l-a) + pc) \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) \frac{(x-a-c)^2}{2} \right\}$ $\times u(x-a-c)$
 	$-Pu'(x - \frac{1}{2}) + W(x)$ $W(x) = P'u''(x-a) - P''u'(x-a-c) + M''u''(x-a) - M'u''(x-a-c)$	$\frac{1}{EI} \left\{ -\frac{Pl^2}{12} + \frac{Pl^2}{48} - \frac{P'l^2}{48} - \frac{M'(l-a)^2}{2l} + \frac{P''(l-a-c)^3}{6l} + \frac{M''(l-a-c)^2}{2l} x + \frac{P}{12}x^3 - \frac{P \left( x - \frac{1}{2} \right)^3}{6} - u \left( x - \frac{1}{2} \right) + \left\{ \frac{P'(x-a)^3}{6} + \frac{M''}{2} (x-a)^2 \right\} u(x-a) - \left\{ \frac{1}{6}P''(x-a-c)^3 + \frac{1}{2}M''(x-a-c)^2 \right\} u(x-a-c) \right\}$ $P'' = P' = R_1 \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right)$ $M'' = R_1 a \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) + R_1 \left( 1 - \frac{I}{Ic} \right) C$