変位入力応答にもとづく多自由度力学系の同定
(調和励振データを用いる場合)

山　根　健　治*

Identification of Multi-Degree-of-Freedom Dynamical Systems Based on the Response in Receiving Forced Displacement Inputs (the Case Using Harmonic Excitation Data)

Kenji　YAMANE

Abstract

Unknown physical parameters of multi-degree-of-freedom dynamical system are identified directly based on the time domain response data including observing noise when the system is excited by forced harmonic displacement inputs.

In this case, it is shown that, by using a numerical simulation of two degree-of-freedom vibrating system, an instrumental variable method is effective when observing noise increases, and it is considered how to select the frequencies of harmonic excitation and to adopt the number of sampling data that are used for the identification of parameters.

1. まえがき

機械系に制御系を組み込んで機械の特性を改善する，いわゆるアクティブコントロールの手法が最近多く用いられるようになった．その場合，制御系を設計するために機械系に含まれるパラメータを正確に知る必要がある．

単一の機械要素ではその特性パラメータは解析的に，あるいは実験的に求められることが多いが，それらが組み合わされた実働状態の機械系の場合，特に多自由度系の場合には，必ずしもすべてのパラメータを知ることが困難な場合がある．また、外的な条件の変動により機械の動作状態において，パラメータが変化する場合もある．

したがって，実働状態の機械系の入出力データをもとに，その中に含まれる未知パラメータを同定することは，機械系を解析する上から，また制御系を設計する上からも重要な意味を持つ．

多自由度系の実験的同定については多くの研究がなされている．時間領域や周波数領域の実験モード解析による曲線適合はさまざまな方法が提案されている(1)．また，ノイズを含む実験データを用いて，尤度を最大にする条件のもとで質量，減衰，剛性行列などの特性行列を直接もとめる大熊，長松の方法(2)もある．これらの方法はいずれも，主として構造物などの分布定数系を多自由度系として同定するものであり，直接に集中定数系の物理パラメータを同定するものではない．一方，鞍谷ら(3)はモーダルパラメータの感度を用いた反復計算から物理パラメータを直接同定する方法を提案しているが，実験モード解析の結果得られるモード特性を必要とする．また、大熊ら(4)は尤度関数の感度を用いて尤度を最大にするように特性行列の要素を直接定める方法を提案しているが，誤差の大きいデータの使用に制限がある．その他，多自由度非線形系の同定法(5)も提案されている．

ここでは集中定数系としての線形多自由度力学系の物

*宇部工業高等専門学校機械工学科

理パラメータの直接同定を考える．Fritzen[6]は，強制力が入力として加えられるときノイズを含む出力データから補助変数法[7]を用いて，直接物理パラメータを高精度に同定することを提案している．この方法は，補助変数法の漸近的な不偏性を利用して，ノイズのあるデータを用いても最小二乗法にくらべて高精度が得られる[6][8]ことを示している．しかしながら，同定に用いるデータの選び方，データの数などについては必ずしも明確にされてない．

多自由度系の未知パラメータが多い場合，同定精度を高くするには，一般にデータに含まれるノイズに対して非常に厳しい条件が必要となる．そこで，ここでは，固有周波数が低く，外力はバネやダンパなどの受動要素を介して変位入力で与えられる系が，データの信頼性の高い低周波調和励振されるとき，ノイズを含む時間領域データを用いて，補助変数法による物理パラメータの直接同定を行うときの，同定精度と用いるデータの関係についてシミュレーションによる検討を行い，入力周波数とデータ数について考察した．

2． パラメータ同定法

2･1 パラメータ同定問題　バネやダンパを介してr個の点で強制変位入力を受けるn自由度力学系

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=F\dot{u}+Gu \quad \cdots\cdots(1)$$

を考える．ここで，n×n行列Mは慣性を表す正定対称行列，n×n行列C，Kはそれぞれ，減衰，剛性を表す半正定対称行列，F，Gはn×r行列であり，xはn次元変位ベクトル，uはr次元変位入力ベクトルとする．

いまM，C，K，F，Gに含まれる系のすべての物理パラメータの数をN_p，そのうち未知パラメータの数をN_u，既知パラメータの数を$N_k(=N_p-N_u\neq 0)$とし，M，C，K，F，Gのすべての要素は物理パラメータの関数で表され，とくに未知パラメータに関しては線形結合で表されるものとする．このとき系の時間領域入出力データを適当にサンプリングして得られたデータを用いて未知パラメータを同定する．

ただし，ここでは簡単のためr個の変位入力はすべて同じ周波数と位相をもつ正弦波とする．すなわちu_0を任意のr次元ベクトル，fを周波数として変位入力は

$$u(t) = u_0 \sin 2\pi ft \quad \cdots\cdots(2)$$

と表される．なおfは任意の値をとりうるものとする．

また，出力データには観測ノイズが含まれるものとし，次の変位，速度のデータ

$$\bar{z}(t) = (x^T(t), \dot{x}^T(t))^T + \bar{v}(t) \quad \cdots\cdots(3)$$

が得られるものとする．ここで，$\bar{v}(t)$は出力データに含まれる観測ノイズを表す．

2･2 パラメータ同定法　式(1)の系に式(2)の入力が加わるとき，式(3)の観測方程式から得られる出力データを用いて，多自由度系の未知の物理パラメータを直接同定する．これはFritzen[6]の方法を一部拡張して以下のように計算することができる．

式(2)の入力が加えられるとき$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ $(\omega \triangleq 2\pi f)$となるので

$$J(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} -\omega^2 I_n & O \\ O & I_n \\ I_n & O \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(4)$$

とおき，M，C，K，F，Gに含まれる全パラメータからなるベクトルを$p=(p_1, p_2, \ldots, p_{Np})$，また$\bar{x}(t) \triangleq [\,x(t)^T\ \dot{x}(t)^T\,]^T$，$\bar{u}(t) \triangleq [\,\dot{u}(t)^T\ u(t)^T\,]^T$とおくと，運動方程式(1)は

$$\sum_{i=1}^{N_p} [Q_i J(\omega)\bar{x}(t) - R_i\bar{u}(t)]\ p_i = 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

ここでQ_i, R_iは，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} [M \vdots C \vdots K] &= \sum_{i=1}^{N_p} p_i Q_i \\ [F \vdots G] &= \sum_{i=1}^{N_p} p_i R_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

を満たす$n\times 3n$，$n\times 2r$の定数行列である．式(3)の関係より式(5)は

$$\sum_{i=1}^{N_p} [Q_i J(\omega)\bar{z}(t) - R_i\bar{u}(t)]\ p_i = e(t) \quad \cdots\cdots(7)$$

とかける．ただし右辺の

$$e(t) \triangleq \sum_{i=1}^{N_p} Q_i J(\omega)\bar{v}(t) p_i \quad \cdots\cdots(8)$$

は観測ノイズにもとづく n 次元式誤差ベクトルである．いま

$$a_i(t) \triangleq Q_i J(\omega)\bar{z}(t) - R_i\bar{u}(t) \quad \cdots\cdots(9)$$

とおくと式(7)は

$$\sum_{i=1}^{N_p} a_i(t)p_i = e(t) \quad \cdots\cdots(10)$$

とかける．したがって $A(t) \triangleq [a_1(t), a_2(t), \ldots a_{Np}(t)]$ とおくと式(10)は，結局

$$A(t)p = e(t) \quad \cdots\cdots(11)$$

となる．左辺の $A(t)$ は時刻 t における入出力データからきまる $n \times N_p$ 行列である．ここでパラメータベクトル p の成分のうち既知の成分と未知の成分からつくられるベクトルをそれぞれ p_k, p_u とし，行列 $A(t)$ の N_p 個の列ベクトルのうち p_k, p_u に対応する列ベクトルからつくられる行列をそれぞれ $A_k(t), A_u(t)$ とすると式(11)より

$$A_u(t)p_u = -A_k(t)p_k + e(t) \quad \cdots\cdots(12)$$

がえられる．いま持続的励振条件[9]を満たすようにデータをサンプリングする回数を N_d ($N_d >> N_u$)とし，その第 j 番目のサンプリングデータについての式(12)を

$$A_{uj}p_u = -A_{kj}p_k + e_j \quad \cdots\cdots(13)$$

とかく(j=1, ... ,N_d)．このとき

$$\bar{h} \triangleq \begin{pmatrix} -A_{k1} \\ -A_{k2} \\ \vdots \\ -A_{kNd} \end{pmatrix} p_k, \quad \bar{A} \triangleq \begin{pmatrix} A_{u1} \\ A_{u2} \\ \vdots \\ A_{uNd} \end{pmatrix}, \quad \bar{e} \triangleq \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{Nd} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(14)$$

とおくと式(13) $(j=1,\ldots,N_d)$ は

$$\bar{A}p_u = \bar{h} + \bar{e} \quad \cdots\cdots(15)$$

とかける．$\bar{A}$ は $nN_d \times N_u$ 行列，$\bar{h}, \bar{e}$ は nN_d 次元ベクトルであり $nN_d >> N_u$ であることから，式誤差ベクトル $\bar{e}$ の重み Q をつけた二次関数

$$J = \bar{e}^T Q \bar{e} \quad \cdots\cdots(16)$$

(Q は正定対称行列)を最小にする，未知パラメータの重み付き最小二乗推定値 p_{uLS} は

$$p_{uLS} = (\bar{A}^T Q \bar{A})^{-1} \bar{A}^T Q \bar{h} \quad \cdots\cdots(17)$$

となる． $Q = I$(単位行列) としたときの最小二乗推定値は $a_i(t)$ と $e(t)$ が相関をもつため $(\bar{A}^T\bar{A})^{-1}\bar{A}^T\bar{e}$ のバイアスを生じる．そこで，つぎに示す補助変数法によってバイアスのない推定値を求める．すなわち，未知パラメータの近似値 p_{uaux} をもつ補助モデル

$$M_{aux}\ddot{x}_{aux} + C_{aux}\dot{x}_{aux} + K_{aux}x_{aux} = F_{aux}\dot{u} + G_{aux}u \quad \cdots\cdots(18)$$

の応答 $\bar{x}_{aux}(t) \triangleq (x_{aux}(t)^T \ \dot{x}_{aux}(t)^T)^T$ から計算される

$$w_i(t) \triangleq Q_i J(\omega)\bar{x}_{aux}(t) - R_i\bar{u}(t) \quad \cdots\cdots(19)$$
$$(i = 1, \ldots, N_u)$$

を用いて，$\bar{A}$ の場合と同様にして $nN_d \times N_u$ 行列 $\bar{W}$ を求める．このとき，式(16)の重み行列を $Q = \bar{W}^T\bar{W}$ とおいて式(17)より得られる未知パラメータベクトルを改めて補助モデルの未知パラメータベクトルとおき，ふたたび補助モデルの応答を求める．以下，上述の手順で未知パラメータを求める．以上を，未知パラメータが収束するまでくり返す．このようにして得られる行列 $\bar{W}$ は補助変数行列となり，未知パラメータ

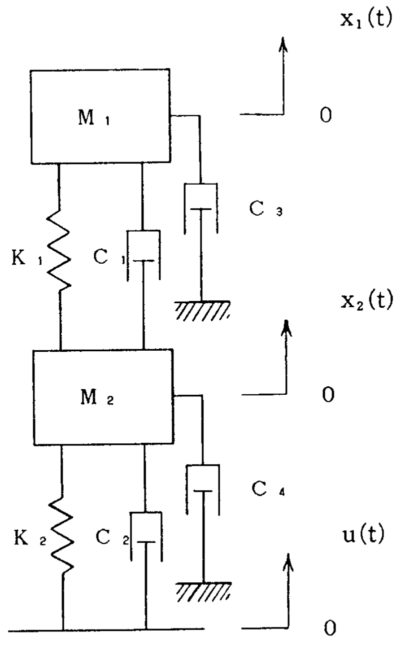

図1　二自由度系モデル

$$p_{uIV} = (\bar{W}^T\bar{A})^{-1}\bar{W}^T\bar{h} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

は補助変数推定値とよばれる(Bootstrap 法)[10].

表1 シミュレーションモデル

Model parameters			
M_1 kg	3.0	C_3 N·s/m	90.0
M_2 kg	2.7	C_4 N·s/m	50.0
C_1 N·s/m	30.0	K_1 N/m	4600.0
C_2 N·s/m	40.0	K_2 N/m	4600.0
Eigenvalues (s^{-1})			
−16.0460±18.6229j			
−26.1762±60.3144j			

最小二乗推定値 p_{uLS} は Bootstrap 法における補助モデルの未知パラメータの初期値として使用する．

3． シミュレーションによる検討

ここでは 図 1 の 1 点で加振される 2 自由度系モデル($n=2$, $r=1$)を例として，パラメータ同定の精度と，用いるデータの関係をシミュレーションによって検討する．表 1 にモデルの各物理パラメータと固有値を示す．このうちバネ定数 k_1,k_2 のみが既知であるとして他の 6 個のパラメータ,すなはち質量 m_1, m_2, 粘性減衰係数 c_1, c_2, c_3, c_4 を同定する．

図1の系に式(2) の変位入力 $u(t)$ が加えられるときノイズに乱された式(3)の定常出力データ $\bar{z}(t)$を得る．この場合，観測ノイズ $\bar{v}(t)$ は平均 0, 分散 σ^2 の正規乱数で与え,定常応答 $\bar{x}(t)$ の各要素の振幅を A_{oi} ($i=$

表2 同 定 結 果 (入力周波数：CASE3, サンプリング回数：1400の場合) (相対誤差単位%)

Noise level	1 %				5 %			
Parameter	Least Squares		Instrumental Variable		Least Squares		Instrumental Variable	
	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error
m_1 kg	2.9998	−0.007	3.0004	0.01	2.9853	−0.491	3.0022	0.074
m_2 kg	2.6976	−0.089	2.6998	−0.009	2.6501	−1.85	2.6987	−0.046
C_1 Ns/m	30.008	0.03	30.028	0.092	29.636	−1.21	30.139	0.465
C_2 Ns/m	39.884	−0.290	39.959	−0.10	38.075	−4.812	39.796	−0.510
C_3 Ns/m	89.949	−0.056	89.959	−0.046	89.580	−0.467	89.792	−0.231
C_4 Ns/m	50.012	0.023	49.985	−0.029	50.539	1.08	49.926	−0.15
Eigenvalue	−16.040±18.633j −26.179±60.338j		−16.038±18.629j −26.176±60.315j		−16.075±18.747j −26.221±60.848j		−16.004±18.653j −26.177±60.318j	

Noise level	10 %				20 %			
Parameter	Least Squares		Instrumental Variable		Least Squares		Instrumental Variable	
	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error
m_1 kg	2.9350	−2.17	3.0045	0.15	2.7589	−8.036	3.0094	0.31
m_2 kg	2.5455	−5.724	2.6974	−0.098	2.3759	−12.00	2.6942	−0.21
C_1 Ns/m	28.178	−6.073	30.282	0.938	22.644	−24.52	3.0575	1.92
C_2 Ns/m	34.057	−14.86	39.589	−1.03	26.304	−34.241	39.166	−2.08
C_3 Ns/m	88.837	−1.292	89.584	−0.426	86.386	−4.016	89.164	−0.929
C_4 Ns/m	51.875	3.749	49.851	−0.298	54.155	8.309	49.694	−0.612

1,...,4)とするとき，信号に対するノイズの比としてノイズレベル ρ を次のように定義する．

$$\rho \triangleq \sigma/A_{01} \quad \cdots\cdots (21)$$

3・1 ノイズレベルと同定精度　すべての出力データのノイズレベルは同一として，種々のノイズレベルに対する最小二乗法と補助変数法によるパラメータ同定を行った．結果の一部を表 2，図 2 に示す．ただしこの場合，同定に用いたデータの周波数は後述の表 4 の CASE-3 に示す 25 個を用い，各周波数ごとに 56 回，計 1400 回のサンプリングによって得られるデータを用いた．表 2 は，ノイズレベル 1 %，5 %，10 %，20 %について最小二乗法及び補助変数法による未知パラメータの同定結果と，その相対誤差(%)を示す．また参考として同定されたパラメータ値にもとづいて計算されたモデルの固有値も示す．

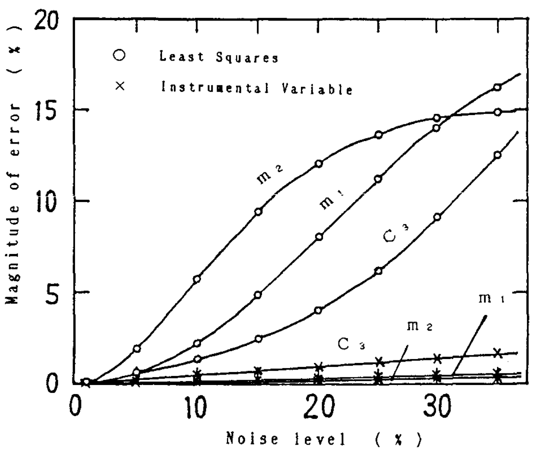

図 2　ノイズレベルと同定精度

表 3　未知パラメータ数による比較

（補助変数法，入力周波数　：CASE－3
サンプリング回数：1400の場合）

(相対誤差単位%)

Noise level	10 %			
Parameter	6 Unknown parameters		4 Unknown parameters	
	Identified	Relative error	Identified	Relative error
m_1 kg	3.0045	0.15	2.9959	−0.13
m_2 kg	2.6974	−0.098	2.7118	0.436
C_1 Ns/m	30.282	0.938	—	—
C_2 Ns/m	39.589	−1.03	—	—
C_3 Ns/m	89.584	−0.426	89.804	−0.218
C_4 Ns/m	49.851	−0.298	49.929	−0.14

表 2 からノイズレベル 1 %では最小二乗法と補助変数法の同定精度はほとんど変わらないが，ノイズレベルが大きくなるにつれて最小二乗法はバイアスを生じ，急激に精度が低下することがわかる．いっぽう補助変数法ではノイズレベルが 20 %でも，すべてのパラメータがほぼ ± 2 %以内の精度で求まり，補助変数法が有効であることがわかる．図 2 はノイズレベル 35 % までについてパラメータ m_1，m_2，c_3 の同定値の相対誤差の大きさと，ノイズレベルの関係を図示したものであり，上述の傾向がよくわかる．

さらに，補助変数法に関してノイズレベル 10 %の場合，パラメータ c_1，c_2 も既知であるとして他の 4 個のパラメータを同じデータを用いて同定した結果を，6 個の未知パラメータの場合と比較して表 3 に示す．表 3 から未知パラメータを 4 個としたときのほうが，全体としてより同定精度は高くなっているといえる．すなわち，未知パラメータの個数が多い方が観測ノイズの影響を受け易いと考えられる．

以上のことから，未知パラメータ数が多くなる多自由度力学系を上記のような入出力データから同定する場合，補助変数法が有効であると考えられる．

3・2 同定用入力周波数の選定　調和励振入力に対する出力応答からパラメータを同定するときの入力の周波数の選び方について考える．

表 1 の固有値からこのモデルの固有周波数は約 2.96 Hz と 9.60 Hz である．そこで，これらの周波数を含む範囲で表 4 の CASE-1 から CASE-4 のように入力の周波数を選ぶ．CASE-1 は幅広く一様に周波数を選んだ場合，CASE-2 はほぼ固有周波数を含むように，より狭い範囲で一様に選んだ場合，CASE-3 は CASE-2 で特に固有周波数付近を集中的に選んだ場合であり，以上はいずれも周波数の個数は 25 個とした．さらに CASE-3 で，固有周波数から遠い 7 個の周波数を除いた場合が CASE-4 である． これらのおのおのの場合について，ノイズレベル 10 %のとき各周波数ごとに 56 回，合計 1400 回(CASE-4 は 1008 回)のサンプリングを行い，補助変数法によって未知パラメータを同定した結果を表 4 に示す．

CASE-1 から CASE-3 を比較すると，表 4 から全パ

表 4　入力周波数による比較（補助変数法，ノイズレベル10%の場合）

（相対誤差単位%）

	CASE－1		CASE－2		CASE－3		CASE－4	
INPUT FREQUENCIES (Hz)	0.5 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0 13.0 14.0 15.0 16.0 17.0 18.0 19.0 20.0 21.0 22.0 23.0 24.0		1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0 5.5 6.0 6.5 7.0 7.5 8.0 8.5 9.0 9.5 10.0 10.5 11.0 11.5 12.0 12.5 13.0		1.0 1.5 2.0 2.2 52.5 2.75 3.0 3.25 3.5 3.75 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 8.5 9.0 9.5 10.0 10.5 11.0 11.5 12.0 13.0 14.0		2.0 2.25 2.5 2.75 3.0 3.25 3.5 3.75 4.0 7.0 8.0 8.5 9.0 9.5 10.0 10.5 11.0 11.5	
Parameter	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error	Identified	Relative error
m_1 kg	3.0210	0.702	3.0160	0.533	3.0045	0.15	3.0141	0.469
m_2 kg	2.6820	−0.668	2.6992	−0.03	2.6974	−0.098	2.6761	−0.887
C_1 Ns/m	30.187	0.622	30.515	1.72	30.282	0.938	29.356	−2.15
C_2 Ns/m	39.144	−2.14	39.762	−0.596	39.589	−1.03	38.424	−3.940
C_3 Ns/m	88.792	−1.342	89.064	−1.04	89.584	−0.462	88.958	−1.158
C_4 Ns/m	49.999	−0.002	49.518	−0.964	49.851	−0.298	50.981	1.96
Eigenvalue	−15.799±18.769j −26.139±60.463j		−15.844±18.732j −26.171±60.278j		−15.961±18.683j −26.179±60.323j		−15.848±18.760j −25.969±60.627j	

ラメータについての同定精度は CASE-3, CASE-2, CASE-1 の順に高いことがわかる．これは共振点近傍ではわずかなモードパラメータの変化に対しても応答が大きく変化することから理解できることである．

したがって，パラメータ同定に用いる入力周波数は CASE-3 のように全固有周波数を含む範囲で，特にその近傍を多く選ぶことが有効であると考えられる．このことは調和励振される系の応答が，共振点から離れたところでは出力信号の大きさが小さくなり，S／N 比が悪くなることとも考えあわせ，実際的な観点からも適用されるべきことである．

しかしながら CASE-2 と CASE-3 を比較すると，個々のパラメータの精度は必ずしも上記の順にはなっていない．補助変数法ではすでに補助変数行列の重みがついているので，あらかじめ特定のパラメータを精度良く求めるための見通しをたてることは困難である．

なおサンプリング回数が異なるので単純な比較はできないが CASE-3 と CASE-4 の結果から固有周波数近傍のみのデータを用いても必ずしも同定精度は良くならないようである．したがって上記の問題も含めて，入力周波数の選定についてはさらに検討を要する．

3･3 同定に用いるデータ数の検討　補助変数法で採用する重み行列の補助変数行列は，データ数が無限大のとき系の応答と強い相関をもち，観測ノイズと無相関となって補助変数法は不偏性をもつ．これは十分条件ではあるが，したがって，データ数が有限の場合バイアスを生じ精度は低下すると考えられる．そこで同定に用いる入力周波数は CASE-3 のままでノイズレベル ρ = 10 %のとき，全データのサンプリング回数を 50 から 1600 まで変えて同定精度の変化を調べた．そのうちパラメータ m_1 , m_2 についての結果を図 3 に示す．

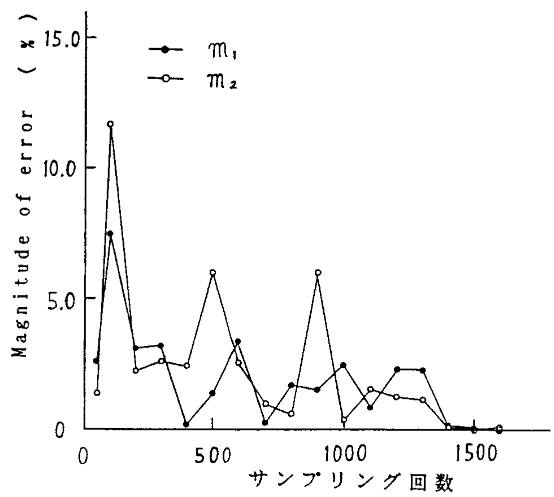

図 3　データ数と精度（ρ＝10%）

図 3 からサンプリング回数が少ないところでは同定誤

差は大きい値で激しく変動するが，サンプリング回数が大きくなるにしたがって，次第にその値は小さくなることがわかる．他のパラメータについても同様な傾向を示し，サンプリング回数 1400 回で全パラメータの精度は，ほぼ 1 %以下に収束する．

したがって補助変数法によってパラメータを同定する場合，用いるデータ数によって同定されたパラメータの値が変化しなくなる程度にデータ数を多くする必要がある．なおそのデータ数は，データのノイズレベルにも関係するが，必要とする同定精度に依存してきまる．

4． まとめ

変位入力の加わる多自由度系が調和励振されるとき，パラメータの一部が既知である場合にノイズを含む時間領域応答データを用いて，系の未知の物理パラメータを直接同定する方法を示し，シミュレーションによって補助変数法の有効性を示した．その場合同定に用いるデータに関して，入力周波数とデータ数について考察した．

すなわち，入力周波数は全固有周波数を含む範囲で特にその近傍を多く選ぶことが有効である．またデータ数については，用いるデータ数によって同定されるパラメータの値の変動が許容範囲内におさまる程度に十分データ数を多くとる必要がある．

ここで示した方法は特定のパラメータの精度を高くするような見通しを得にくいこと，既知のパラメータの精度が直接未知パラメータの同定精度に影響するなどの難点があるが，固有周波数の低い多自由度系の同定には有効であると思われる．

なお，本研究を進めるにあたり，種々御教示いただいた九州大学　毛利　彰教授に感謝致します．

文　　献

1） 長松，モード解析，(1985)，119，培風館．
2） 鄭・大熊・長松，機論，54-497 (1988)，93.
3） 鞍谷・藤川・沖田，機論，55-512 (1989)，840.
4） 大熊・長松，機論，54-507 (1988)，2557.
5） 安田・渡辺，機論，55-512 (1989)，83.
6） Fritzen,P.C.,Trans.ASME,J.Vib.Acoust.Stress Reliab.Des.,108-1(1986)，9.
7） Wong,K.Y.and Polak,E.,IEEE Trans.Autom.Control,AC12-6(1967),707.
8） Davies,P.and Hammond,J.K.,Trans. ASME,J.Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.,106-1(1984),40.
9） 中溝，信号解析とシステム同定，(1988)，133，コロナ社．
10） 中溝，文献(9)の 161 ページ．

（平成元年 9 月25日）