

サンプル値 PID 制御系の最適調査

松 井 稜 治*

On the optimum settings for PID control systems of sampled data

Ryoji MATSUI

Abstract

In this report, the optimal parameters for PID control systems of sampled data are searched and the approximate expressions about the relations between those optimal parameters and other parameters (process time constant, process dead time and sampling interval) are obtained.

Then, about some parameter settings, including the optimal parameters, each step response is compared with the others, and how to choose one of the performance indices (ITAE, ISE, IAE) is discussed in reference to their step response properties.

1. ま え が き

最近 IC 技術の急速な進展に伴ない、制御機器としてマイクロプロセッサが広く用いられるようになった。

一方、プロセス制御では従来より PID 制御が広く用いられて来た。そこで、マイクロプロセッサをとりいれたデジタルコントローラでも、その機能の一部として PID 制御の機能が備えられ広く使用されている。このようなデジタルコントローラの PID 制御機能を用いて制御系を構成するとき、その PID パラメータの値の設定法は制御系の制御性能に重要な影響を及ぼす。

従来、連続系の PID パラメータの設定法については多くの方法が提唱されているが^{1),2),3)}、連続系に対する PID パラメータをサンプル値系に適用することは適当でなく、サンプリング周期などを考慮して PID パラメータを設定する必要のある⁴⁾ことがいわれている。

ここでは、サンプル値 PID 制御系について、ITAE, ISE, IAE に関して最適な PID パラメータを極値探索法により求め、プロセス時定数、むだ時間やサンプリング周期との関係を簡単な近似式で表現することを試みた。更に、最適化パラメータと既存の設定法との比較、評価のとり方、近似における問題点などについても、検討を加えてみた。

2. 計算概要及び結果

本報告でとりあげる制御系を図 1. に示す。プロセス

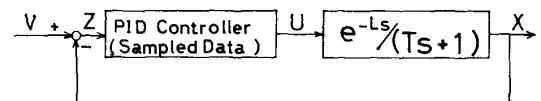


図 1 サンプル値 PID 制御系

制御では、厳密に言えば制御対象は高次系であることが一般的であるが、簡単のため 1 次おくれ+むだ時間と近似することが多い。ここでも、そのような近似をとりいれることにする。その場合、次のような関係が成立つ。

$$U_k = K_P Z_k + \frac{T_S}{T_I} \sum_{i=1}^K \frac{Z_i + Z_{i-1}}{2} + T_D \frac{Z_k - Z_{k-1}}{T_S} \quad (1)$$

但し、 U_k は操作量で

$$U_k = U(t), \quad kT_S \leq t < (k+1)T_S \quad (0 \text{ 次ホールド}) \quad (2)$$

T_S : サンプリング周期

$Z_k = Z(kT_S)$: サンプリング時における偏差

$$= v(kT_S) - x(kT_S) \quad (3)$$

$v(t)$: 目標値, ここでは単位ステップ入力

K_P : 比例感度

T_I : 積分時間

T_D : 微分時間

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{T} x(t) + \frac{K}{T} U(t-L), \quad x(0) = 0 \quad (4)$$

* 宇部工業高等専門学校機械工学科

但し、

$x(t)$: 制御量

T : 制御対象時定数

L : 制御対象むだ時間

K は制御対象の比例ゲインであるが、ここでは K_P に含ませることにして、 $K=1$ としてとり扱う。時間軸についても、比較を容易にするため、むだ時間 $L=1$ と基準化する。従って、時定数は T/L 、積分時間は T_I/L 、微分時間は T_D/L 、サンプリング周期は T_S/L と変換する。

(4)式における操作量の値は、 L だけ過去の値であり時間 $t < L$ では

$$U(t-L) = 0 \tag{5}$$

であることに留意すれば、(1)~(4)は容易に数値計算でき、 T, L, K_P, T_I, T_D, T_S などが与えられれば、ステップ応答を数値的に求めることができる。但し、数値計算にあたり計算きざみ幅を h とすると

$$L = K_L \cdot h \quad (K_L : \text{整数}) \tag{6}$$

$$T_S = K_S \cdot h \quad (K_S : \text{整数}) \tag{7}$$

のように、むだ時間 (ここでは $L=1$)、サンプリング周期共きざみ幅 h の整数倍であるものとする。 h が T_S や L に比べて微小である場合には、この仮定はさして支障とはならない。なお、ここでは操作量 U_K を求めるにあたっては

$$\begin{aligned} \Delta U_K &= U_K - U_{K-1} \\ &= K_P(Z_K - Z_{K-1} + \frac{T_S}{T_I} \cdot \frac{Z_K + Z_{K-1}}{2} \end{aligned}$$

$$+ T_D \frac{Z_K - 2Z_{K-1} + Z_{K-2}}{T_S} \tag{8}$$

をまず求めて

$$U_K = U_{K-1} + \Delta U_K \tag{9}$$

のように計算した。

(4)式は予測子・修正子法合形則により、ITAE, ISE, IAE などは合形積分により計算した。各評価についての最適パラメータを求めるについては、Zangwill^{5),6)}の方法を使用した。

以上の計算法を用いて、 $T/L=1.5, 2, 3, 5, T_k/L=0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$ の各値について、ITAE, ISE, IAE の値を最小にする PID パラメータをそれぞれ求めた。但し、計算きざみ幅 $h=0.01$ 、予測子修正子法精度は0.001、最適PID パラメータ精度は0.005とした。

それぞれの評価について最適な比例感度 K_P を T_S/L に関してプロットしたものが、図2 (ITAE), 図3 (ISE), 図4 (IAE) で、 T/L に関してプロットしたものが、図5, 図6, 図7である。

最適な T_I を、同一の T/L の値ごとに、 T_S/L に関してプロットしたものが、図8, 図9, 図10である。

最適な T_D を、同一の T/L の値ごとに、 T_S/L に関してプロットしたものが、図11, 図12, 図13である。

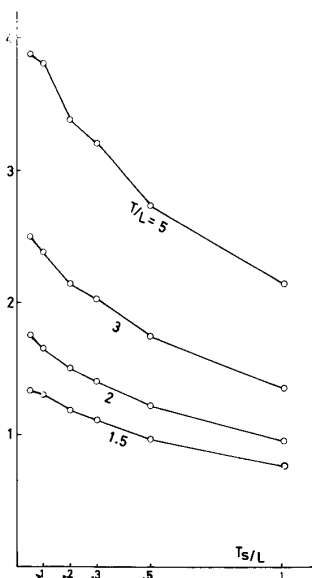


図2 ITAE 最適 K_P (vs. T_S)

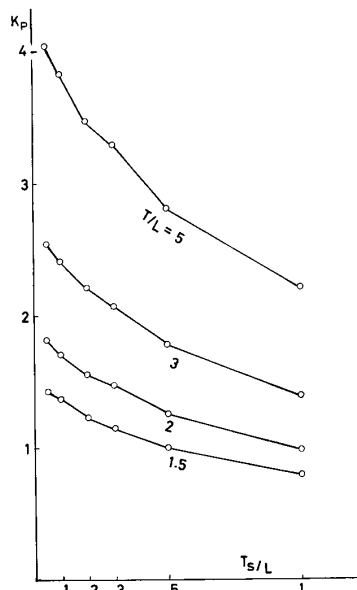


図3 ISE 最適 K_P (vs. T_S)

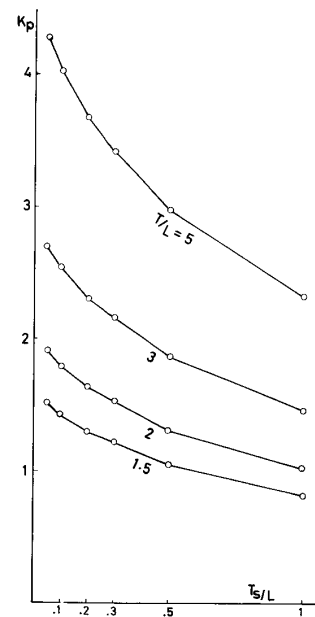


図4 IAE 最適 K_P (vs. T_S)

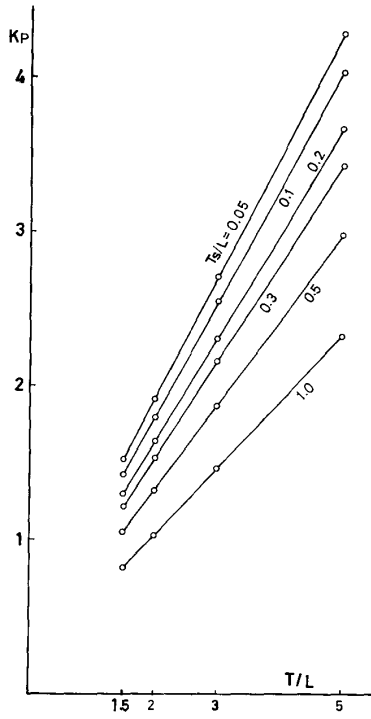


図5 ITAE 最適 K_P (vs. T)

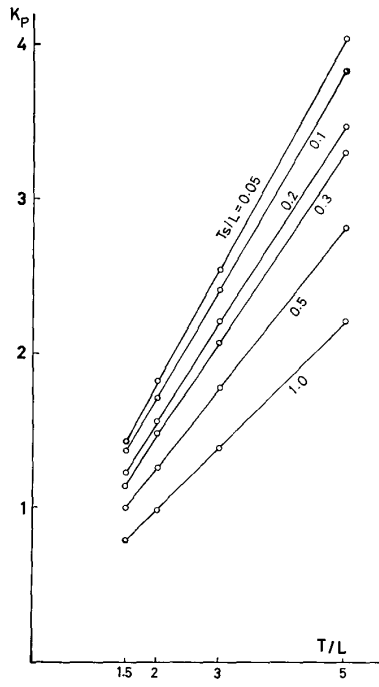


図6 ISE 最適 K_P (vs. T)

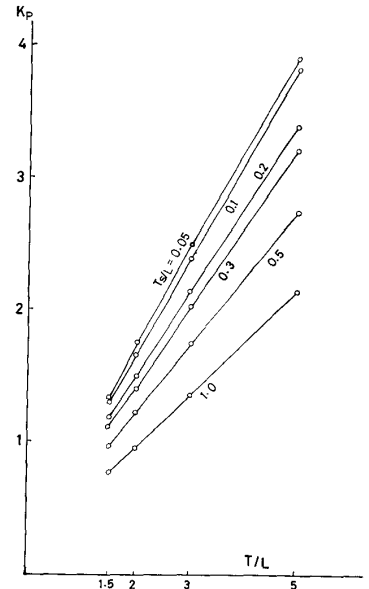


図7 IAE 最適 K_P (vs. T)

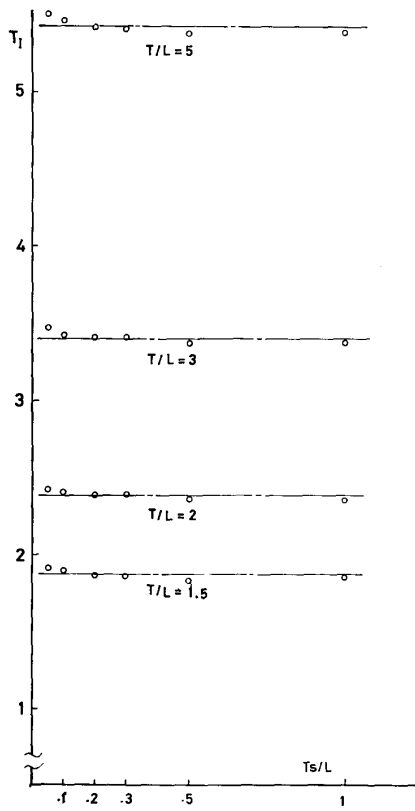


図8 ITAE 最適 T_I

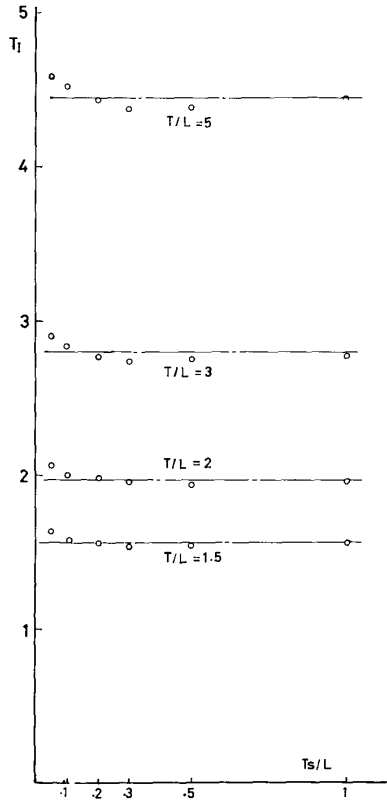


図9 ISE 最適 T_I

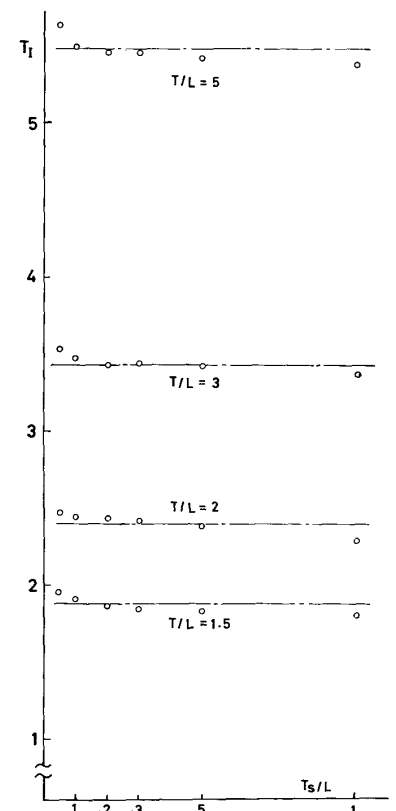


図10 IAE 最適 T_I

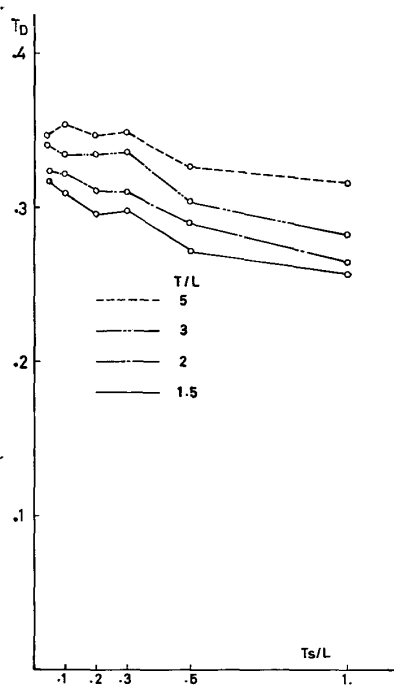


図11 ITAE 最適 T_D

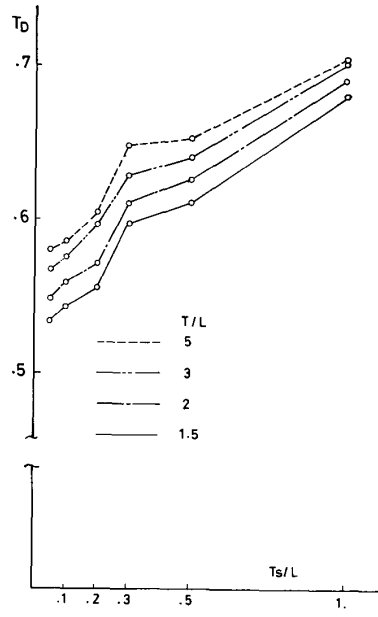


図12 ISE 最適 T_D

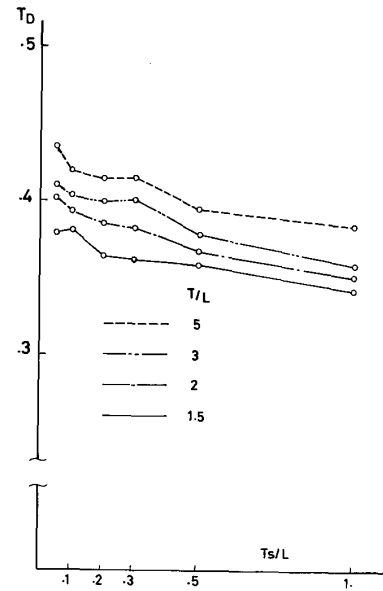


図13 IAE 最適 T_D

3. 最適パラメータの近似

1) 最適 K_p

図2, 図3, 図4を参照すると最適な K_p の値は T_s/L に関して単調減少であるが, その減少の割合は小さくなっている. このような形状の関数としては, $a/(T_s/L + b) + c$ のようなものが典型的である. 又, 図5, 図6, 図7では, K_p の値は T/L に関してほぼ直線状に増加している. 即ち, $dT/L + e$ のような関数が考えられる.

従って, 上記のことを総合して, ここでは最適な K_p の近似式として

$$K_p = \frac{(P_1 T/L + P_2)}{T_s/L + P_3} + P_4 \quad (10)$$

の形の関数を仮定した.

(10)式の関数形に対して, 前記の4種の T/L , 6種の T_s/L の各値での最適値と近似値との誤差の二乗和を最小とするような P_1, P_2, P_3, P_4 を求めたところ,

〔ITAE 最適〕

$$K_p = \frac{(0.71T/L + 0.03)}{(T_s/L + 0.91)} + 0.20 \quad (11)$$

〔ISE 最適〕

$$K_p = \frac{(0.77 T/L + 0.11)}{(T_s/L + 0.92)} + 0.19 \quad (12)$$

〔IAE 最適〕

$$K_p = \frac{(0.71 T/L + 0.05)}{(T_s/L + 0.90)} + 0.23 \quad (13)$$

となり, 最大誤差は, $T = 5, T_s = 1$ におけるITAE最適な K_p で約3.5%, 同じく $T = 5, T_s = 1$ におけるIAE最適な K_p でも約3.5%となっている. 同じく $T = 5, T_s = 1$ におけるISE最適 K_p でも約3.5%となっており, 他はほとんど1~2%以内の誤差となっている.

2) 最適 T_I

図8, 図9, 図10を参照すると, 最適な T_I は T_s/L に関してはほとんど変化していない. T/L に関しては直線状に増大する. そこで最適な T_I は T/L の1次式で近似し, T_s/L を含まないものとする. 最小二乗法を適用してそれぞれの近似式を求めると次のようになる.

〔ITAE 最適〕

$$T_I/L = 1.02 T/L + 0.35 \quad (14)$$

〔ISE 最適〕

$$T_I/L = 0.824 T/L + 0.33 \quad (15)$$

〔IAE 最適〕

$$T_I/L = 1.03 T/L + 0.34 \quad (16)$$

(14), (15), (16)式の計算値が, 図8, 図9, 図10において一点鎖線で示されている. 最大誤差はそれぞれ3.5% (ITAE, $T = 5, T_s = 0.05$), 4% (TSE, $T = 5, T_s = 1$ 又は $T = 3, T_s = 1$), 5% (IAE, $T = 5, T_s = 1$) となっている.

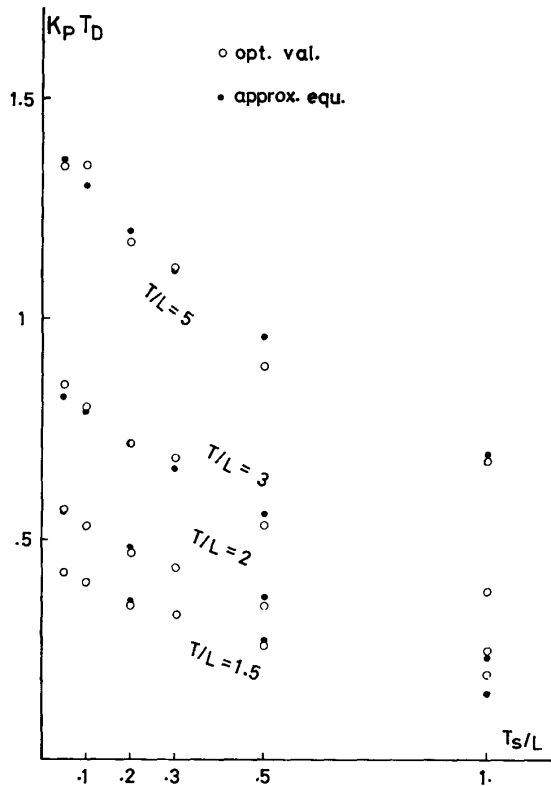


図14 ITAE 最適 $K_P T_D$ と近似値

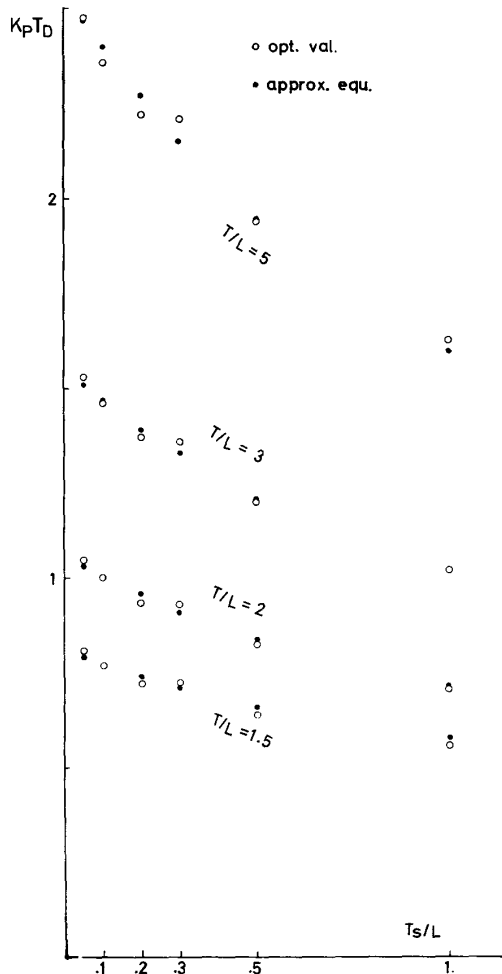


図15 ISE 最適 $K_P T_D$ と近似値

3) 最適 $K_P T_D$

最適な T_D は、図11, 図12, 図13のように得られる, ITAE 最適, IAE 最適な T_D はどちらも T_s/L に関して減少関数となっているが, ISE 最適な T_D は逆に増加関数となっている. 最適な T_D を近似するのは困難であるため, 最適な $K_P T_D$ の値を, T_s/L に関してプロットしてみると, 図14(ITAE), 図15 (ISE) のようになる. IAE 最適な $K_P T_D$ は, ITAE 最適な $K_P T_D$ と同じような傾向を示すので, ここでは省略している. なお最適 $K_P T_D$ は, T/L に関しては K_P と同様に直線状に増加する. 前記のように T_D が, T_s/L に関して増減していることを考え合せて, $K_P T_D$ の近似表現として

$$K_P T_D / L = \frac{(P_1 T/L + P_2)}{(T_s/L + P_3)} + P_4 + P_5 T_s/L \quad (17)$$

の形を仮定する.

K_P と同様にして, T/L , T_s/L の各値について, 最適パラメータと近似パラメータとの誤差の二乗和を最小とする P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を求めたところ,

[ITAE]

$$K_P T_D / L = \frac{(0.34T/L + 0.12)}{(T_s/L + 1.23)} - 0.06 - 0.069T_s/L \quad (18)$$

[ISE]

$$K_P T_D / L = \frac{(0.72T/L - 0.09)}{(T_s/L + 1.45)} + 0.13 + 0.041T_s/L \quad (19)$$

[IAE]

$$K_P T_D / L = \frac{(0.34T/L + 0.64)}{(T_s/L + 0.98)} - 0.57 + 0.25T_s/L \quad (20)$$

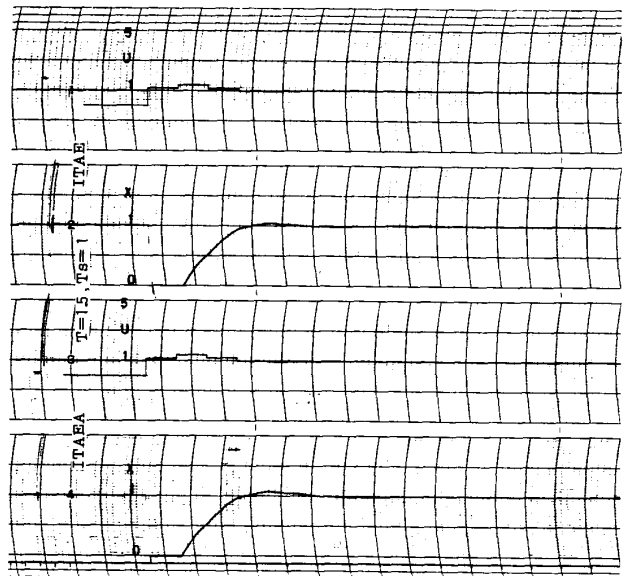


図16 $T=1.5, T_s=1$ の場合の最適パラメータ (ITAE, 上図) と近似パラメータ (ITAEA, 下図) のステップ応答

となった。但し、 K_P や T_I に比べると、誤差の大きい場合がある。例えば、 $T/L=1.5$ 、 $T_s/L=1$ の ITAE 最適な $K_P T_D$ は、最適パラメータが 0.195 、近似パラメータが 0.152 となっていて、 22% の誤差となっている。但し、この場合値自体が他のパラメータに比べて小さいこともあって、最適 ITAE $\cong 2.47$ に対して、近似パラメータに対する ITAE $\cong 2.69$ と誤差は 10% に満たない。それぞれのステップ応答を調べてみると図16 (最適パラメータに対するもの：上図、近似パラメータに対するもの：下図) となり、行過量にやや違いのある程度である。

なお、図14、図15には近似パラメータもプロットされている。

4. 比較, 考察

1) ステップ応答

いくつかの既存のパラメータ設定法、各最適パラメータの比較のため、それぞれのステップ応答と評価関数値を計算した。サンプリング周期の影響の表われている例として、 $T=5$ 、 $T_s=0.5$ の場合をとりあげ図17～19に示す。このときのパラメータ値と評価関数値を表1に示す。図17. はジューグラニコルスの限界感度法をサンプル値系に適用したもの⁴⁾ (ZNI, 上図) と高田らの方法³⁾ (TOM, 下図) により PID パラメータを決めたもの

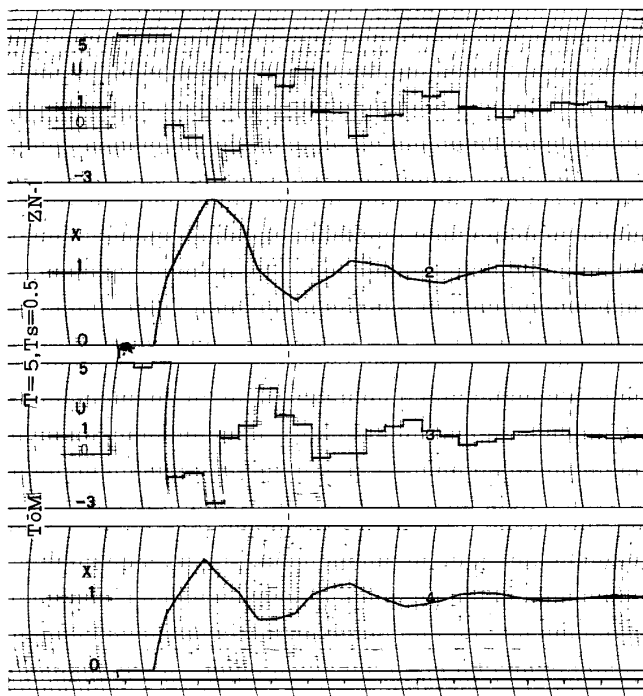


図17 $T=5$ 、 $T_s=0.5$ 、ZNI 及び TOM によるステップ応答

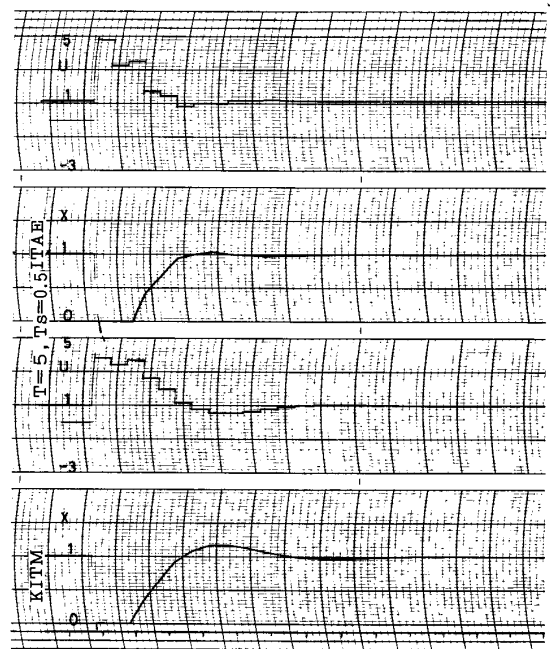


図18 $T=5$ 、 $T_s=0.5$ 、ITAE 及び KITM によるステップ応答

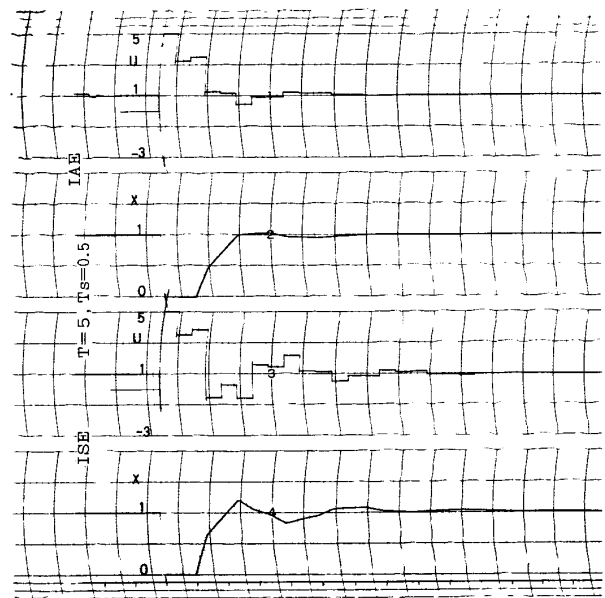


図19 $T=5$ 、 $T_s=0.5$ 、IAE 及び ISE によるステップ応答

である。図18. は ITAE 最適パラメータ (ITAE, 上図) 北森の方法⁷⁾ (KITM, 下図) によるものである。図19. は IAE 最適パラメータ (IAE, 上図) と ISE 最適パラメータ (ISE, 下図) によるものである。図中、制御量 x は $0 \sim 2$ 、操作量 u は $-3 \sim 5$ の範囲でプロットされていて、 $t < 0$ については、 x 、 u 共実際には 0 である。

表1 各パラメータと評価値 ($T/L=5$, $T_s/L=0.5$ の場合)

	K_P	K_P/T_P	$K_P T_D$	ITAE	ISE	IAE
ZN1	4.42	2.74	2.37	11.76	2.472	3.669
CHR	4.75	0.70	2.23	17.44	2.019	3.897
T ₀ M	4.13	0.79	2.06	8.223	1.519	2.696
KITM	2.95	0.58	0.34	3.506	1.535	2.157
ITAE	2.73	0.51	0.89	1.859	1.422	1.759
ISE	2.98	0.68	1.94	4.206	1.303	1.957
IAE	2.81	0.52	1.11	1.939	1.382	1.733
ITAEA	2.75	0.51	0.96	1.873	1.410	1.749
ISEA	2.97	0.67	1.95	4.171	1.303	1.953
IAEA	2.82	0.51	1.14	2.031	1.376	1.742

なお時間については $0 \leq t \leq 15$ の範囲で計算している。

ジューグニコルスの方法は、本例では行過量が100%を超え、振動成分の周期も他のものに比べて長い。更にサンプリング周期を大きくし、例えば $T_s = 1$ とすると振動成分が非常に大きくなり、この時間内では大きい振動成分が残り整定しない。このとき $ITAE \approx 62$ ($0 \leq t \leq 15$) となる。一方 $T_s = 0.3$ の場合は $ITAE \approx 5.3$ となり、サンプリング周期 T_s が小さいときは、この方法によるPIDパラメータを使用することもできるが、本例の程度或いはそれ以上になると使用不能となる。

同様のことが、Chien-Hrones-Reswick法²⁾(表1, CHR)にもいえ、表でもわかるようにZN1よりも更に成績は悪くなっている。

連続系に対するものとして、高田らの方法もとりあげた。本例の場合、行過量は約50%で、振動成分の周期もZN1より小さく、従って整定も早くなっている。しかし最適パラメータに対するステップ応答に比べるとかなり劣っている。所が、サンプリング周期が小さくなると。例えば $T_s = 0.3$ では、この方法による $ITAE \approx 3.2$ に対して、ISE最適パラメータに対する $ITAE \approx 3.6$ となっていて、良好な成績を示す。このように連続系に対するものの中では良い設定法の一つであるが、サンプリング周期が大きくなれば使用不能となる。例えば $T_s = 1$ では $ITAE \approx 46$ となっている。

以上が連続系に対する方法を適用した場合であるが、サンプル値系に対するものの例として、北森の方法をとりあげてみよう。北森の方法では制御対象の伝達関数は有理関数でなければならないので、むだ時間は2次の

Pade展開を使用して近似した。この方法は連続系に対するものに比べサンプリング周期の非常に小さい場合を除けば性能はかなり良好で、特にサンプリング周期の大きい時も、本例にみられるように使用可能である。最適化パラメータに対するものと比べると、ITAE, IAE最適パラメータに対するものより、各評価値共劣るが、ISE最適パラメータのものよりITAE値の優れているのは注目すべきことである。但し応答の速さの点では振動成分の周期が大きくなり劣っている。

最適パラメータでは、ITAE, IAE最適パラメータに対するステップ応答は類似の波形を示し、いずれも行過量が小さく整定性が良好である。これらに対してISE最適パラメータに対するステップ応答は振動成分を有し、整定時間もITAEやIAEに比べて大きく、ITAE値も大きい。立上りの速さについてはITAE, IAEより優れている。

以上のことから、行過量や整定時間を小さくしたいときには評価としてITAEやIAEを、立上りの良さを重視する場合には評価としてISEをとるのが良いと思われる。

制御対象のパラメータがあいまいであるか、或いは変動するような場合、例えば実際には時定数が5.5であるとき、時定数 $T = 5$ のITAE最適パラメータを使用するとITAE値は最適値より45%増加する。一方、ISE最適パラメータを用いるとITAE値は10%増にとどまる。即ち、ITAE最適化したものは、ISE最適化したものより、パラメータ変動に対して評価値が大きく変動することがあるので注意しなければならない。

2) 近似パラメータと最適パラメータ

ここで提唱した最適パラメータの近似式は、前記のように、 $T/L=1.5\sim 5$ 、 $T_s/L=0.05\sim 1$ の範囲内では、パラメータ値そのものも最適値に比べて大きい誤差はなく、誤差の比較的大きい場合でもステップ応答については大きい差異は見られない(図16)。

参考のため、 $T=5$ 、 $T_s=0.5$ の場合の ISE 近似パラメータ (ISEA, 上図) と ITAE 近似パラメータ (ITAEA, 下図) によるステップ応答を図20に、各数値を表1に示す。 $T=2$ 、 $T_s=0.2$ の場合の最適パラメータ、近似パラメータによるステップ応答図をそれぞれ図21、図22に示し、数値を表2に示す。いずれの場合もステップ応答図ではほとんど差異は見られず、ITAE 値にやや差異の認められる程度である。又、近似パラメータによる制御評価値は既存の方法のいずれにも優っている。但

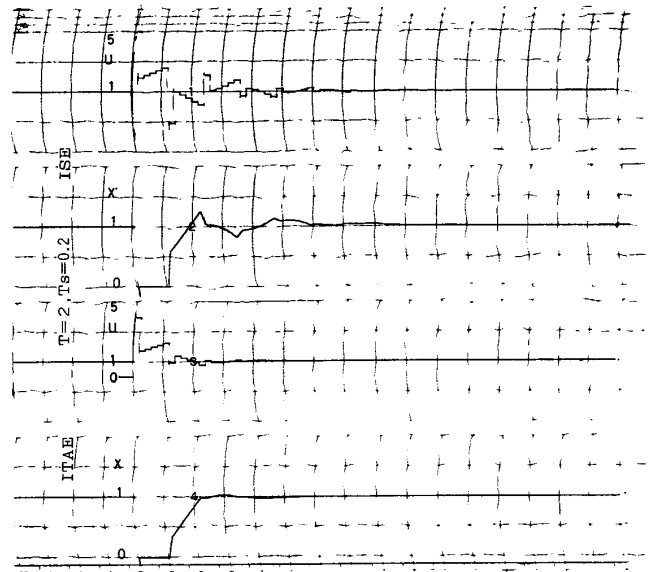


図21 $T=2$ 、 $T_s=0.2$ 、最適パラメータ (ISE, ITAE) によるステップ応答

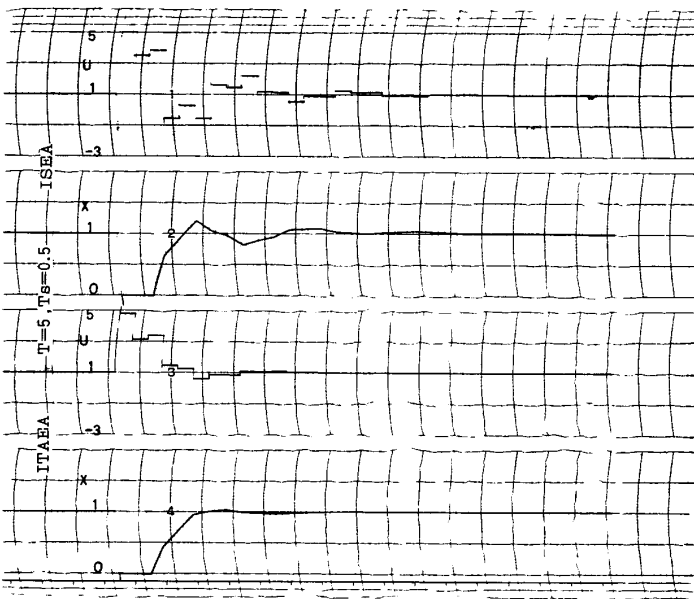


図20 $T=T_s=0.5$ 、近似パラメータ (ISEA, ITAEA) によるステップ応答

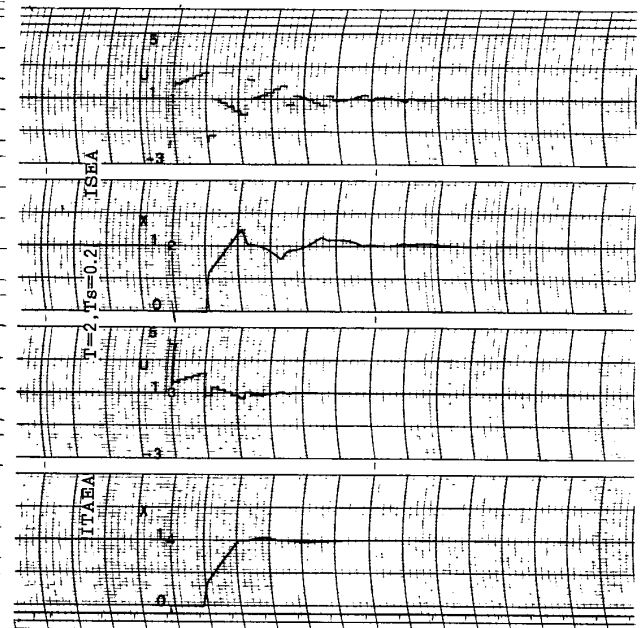


図22 $T=2$ 、 $T_s=0.2$ 、近似パラメータ (ISEA, ITAEA) によるステップ応答

表2 最適パラメータと近似パラメータにおける 評価値 ($T/L=2$ 、 $T_s/L=0.2$ の場合)

	K_P	K_P/T_I	$K_P T_D$	ITAE	ISE	IAE
ITAE	1.50	0.63	0.47	1.390	1.270	1.537
ISE	1.64	0.83	0.94	2.508	1.169	1.631
IAE	1.56	0.64	0.60	1.519	1.222	1.515
ITAEA	1.51	0.63	0.48	1.396	1.264	1.531
ISEA	1.65	0.83	0.96	2.573	1.170	1.643
IAEA	1.57	0.65	0.60	1.507	1.222	1.515

し、以上のことはあくまでも前記の T/L , T_s/L の値の
囲内範囲でいえることで、両端の値で誤差が大きくなって
いることから、 $T/L > 5$, $T/L < 1.5$, $T_s/L > 1$ への適
用については注意を払わなければならない。

5. 今後の問題

ここでは、 T/L や T_s/L の限られた範囲での最適パラ
メータの近似表現を示したが、指定範囲外への適用の妥
当性については、今後更に調べてみなければならない。
又、高次の制御対象を1次おくれ+むだ時間に近似した
ものに本方法を適用した時の問題も今後調べるべきこと
であろう。

本研究を進めるにあたって、九大工学部高田勝教授よ
り有益なる御助言をいただきましたことに謝意を表しま
す。プログラム作製にあたっては卒業研究の諸君より、
計算にあたっては九大工学部蒲地辰雄氏より多大なる御
協力をいただきましたことに謝意を表します。

なお、本計算には本校電算機室 TOSBAC-3400及び
九大工学部生産機械工学教室 PANAFACOM U-100

を使用した。

参 考 文 献

- 1) 計測自動制御学会：自動制御便覧，コロナ社
- 2) 増淵：自動制御基礎理論，第5章，コロナ社
- 3) 高田ほか：長いむだ時間をもつプロセス制御系の最
適調整について，九大工学集報，Vol 39, No 2, 昭
41
- 4) 高橋：システムと制御（下），第VII章，岩波
- 5) Zangwill, W. I. : Minimizing a function
without calculating derivatives, Compt. J., Vol
10., 1967
- 6) 松井：PID 制御系の ISE 値，宇部高専研究報告，
Vol 24, 昭53
- 7) 北森：制御対象の部分的知識に基づくサンプル値制
御系の設計法，計測自動制御学会論文集，第15巻第5
号，昭54.

（昭和56年9月14日受理）