

非対称非線形要素 (第5報)

(記述関数のALGOL Programming)

嶺 勝 敏*・吉 岡 敏 彦**

Unsymmetrical Nonlinear Elements (5)

KATSUTOSHI MINE AND TOSHIHIKO YOSHIOKA

Abstract

In this paper, We describe the ALGOL programming for the unsymmetrical saturation with the dead zone and unsymmetrical backlash.

1. は し が き

最近の制御理論においては、計算機の使用を前提としたような最適制御理論¹⁾²⁾が脚光をあびている。すなわち、計算機をオンライン的に使用する制御系の実現にすべての自動制御に関する研究の焦点がしぼられていると云われている³⁾。

一方計算機の応用分野は、理科学計算、調査統計や経営方面での計算のみならず、国際政治の方面にまで応用 (INS: Inter-Nation Simulation)⁴⁾ されているようである。

我々は、計算機応用の一例として非対称非線形要素のうちで非対称バックラッシュと不感帯付非対称飽和要素の記述関数のALGOLプログラミングを行った。このようなプログラムを作っておけば使用目的に応じてパラメータを変えてやるだけで容易に記述関数値をうることができる。

2. 記述関数のALGOLプログラミング

非線形要素の特性を記述関数で表現する場合は、つぎの大きな仮定を行う。すなわち、非線形要素の入力は純正弦波形である、非線形要素の出力の高調波は無視できる、の2項目である。この仮定のもとに、非線形特性の等価線形化を行うものが記述関数法である。

したがって、記述関数 $N(X, j\omega)$ は、線形化伝達関数の形として、純正弦波入力と出力の基本波成分の比として表わされ、非線形の基本的性格である入力依存性を

内蔵しており原理的に理解しやすい特長をもっている。しかし、実際的には、数値計算になることが多いので面当である。

したがって、理科学用計算機でよく用いられているALGOL⁵⁾⁶⁾またはFORTRANのプログラムの形で $N(X, j\omega)$ 計算の定形化を行い、使用目的に応じてパラメータを変えてやる事が出来れば便利と考え、代表的な非対称非線形要素のプログラムを作成したので報告する。

2-1 非対称バックラッシュ要素

Fig. 1 に示するような非対称バックラッシュ要素の記述関数 $N(X, j\omega)$ は、下式のようになる⁷⁾。

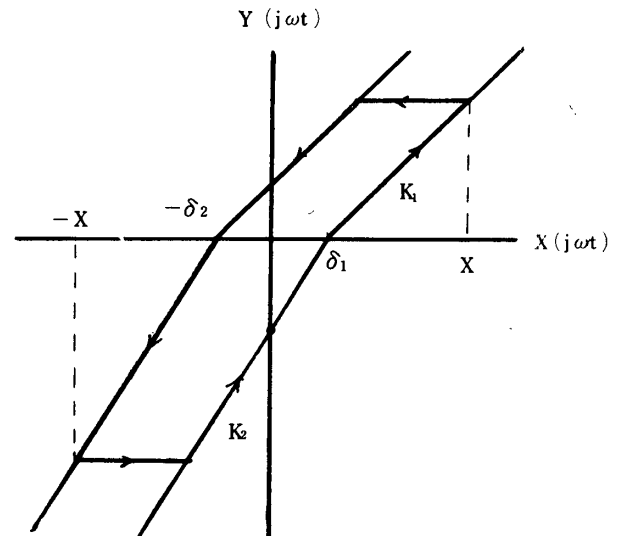


Fig. 1 Formalistic extension for unsymmetrical backlash

* 電気工学教室

** 山口大学工学部

$$N(X, j\omega) = \frac{a_1}{X} + j \frac{b_1}{X} = a - jb = \frac{K_1 + K_2}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) + \frac{X - 2\delta}{X} \cos \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) \right\} \right\} - j \frac{2\delta(K_1 + K_2)}{\pi X} \left(1 - \frac{\delta}{X} \right) \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

上式において、 \arcsin は FACOM 231 の ALGOL の標準関数として用意されていないので、下記の公式を利用する。

$$\sin^{-1} X = X + \frac{1}{2} \frac{X^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{X^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{X^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{X^{2n+1}}{2n+1} + \dots\dots(2)$$

ただし $-1 < X < 1$

ここで、上式を近似的に下式で表わす。

$$\sin^{-1} X = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 = ((b + cx^2)x^2 + a)x^2 + 1)x$$

この $N(X, j\omega)$ の ALGOL プログラミングのフローチャートは Fig. 2 のようになる。

ただしこの場合は、 $K_1 = \delta_1 = \delta_2 = \delta = 1$ としている。

ここで下記の記号を用いている。

$$\frac{K_1 + K_2}{2\pi} = A$$

$$\frac{X - 2\delta}{X} = B$$

$$\sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) = S(B)$$

$$\cos \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{X - 2\delta}{X} \right) \right\} = \cos S(B)$$

$$A \left\{ \frac{\pi}{2} + S(B) + B \cos S(B) \right\} = N1$$

$$(N1)^2 = C$$

$$j \frac{4A}{X} \left(1 - \frac{\delta}{X} \right) = N2$$

$$(N2)^2 = D$$

$$|N(X, j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{sqrt}(C + D) = F$$

$$\phi = \tan^{-1}(-b/a) = -N2 / N1 = -D/C$$

\sin^{-1} については $-1 < x < 1$ について

$$\sin^{-1} x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 = (((b + cx^2)x^2 + a)x^2 + 1)x = U$$

\tan^{-1} は $x^2 > 1$ と $x^2 < 1$ の場合について、つぎの式を用いてスイッチで選択させた。なお $x^2 = E$ としている。

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots = L1 \quad E > 1.0$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = L2 \quad E < 1.0$$

FACOM 231 ALGOL

begin

real K1, K2, PAI, X, DELTA, A, B, C, D, E, F, N1, N2 ;

real procedure S(x) ;

value x ; real x ;

S := (((3/40 + 5/112*x↑2)*x↑2 + 1/6)*x↑2 + 1)*x ;

real procedure V(y) ;

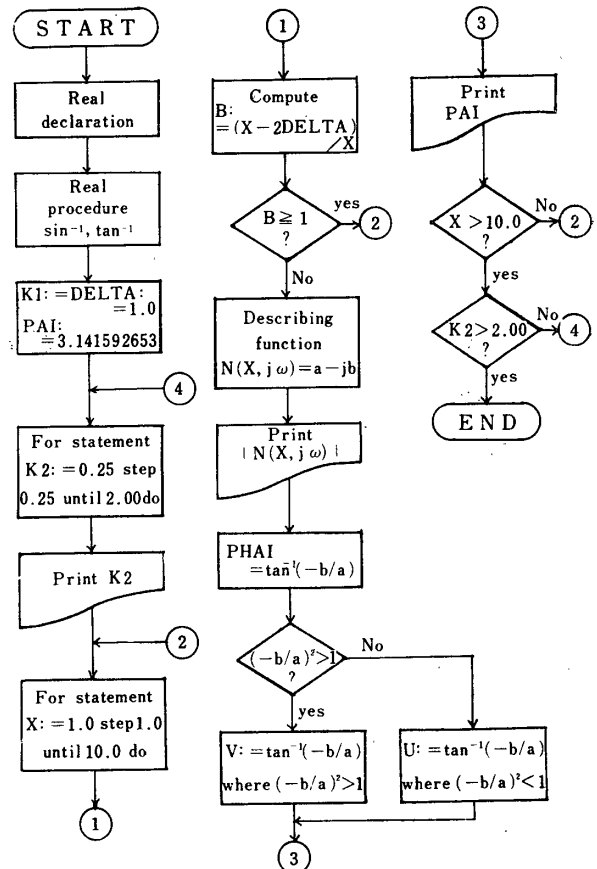


Fig. 2 Simplified flow chart about the backlash $N(X, j\omega)$

```

value y ; real y ;
V:=3.141592653/2-1/y*(1-1/y↑2*(1/3-1/y↑2*(1/5-1/(7*y↑2)))));
real procedure U (z) ;
value z ; real z ;
U:=((((1/5-z↑2/7)*z↑2-1/3)*z↑2+1)*z;
K1:=DELTA:=1.0; PAI:=3.141592653;
for K2:=0.25 step 0.25 until 2.00 do
begin
CRLF; CRLF; Printstring ('K2 ='); Printfix (K2, 1, 2);
for X:=1.0 step 1.0 until 10.0 do
begin
A:=(K1+K2)/(2*PAI);
B:=(X-2*DELTA)/X;
if B>=1.0 then go to END;
N1:=A*(PAI/2+S (B) +B*cos (S (B)));
C:=N1↑2;
N2:=4*DELTA*A/X*(1-DELTA/X);
D:=N2↑2; F:=sqrt (C+D); E:=-N2/N1;
CRLF;
Space (5); Printstring ('X='); Printinteger (fix (X))
Space (10); Printstring ('ABS N=') Printreal (F, 5);
if E>1.0 then go to L1 else go to L2;
L1 : Space (5); Printstring ('PHAI='); Printreal (V (E), 5);
L2 : Space (5); Printstring ('PHAI='); Printreal (U (E), 5);
CRLF;
END: end;
end;
end

```

FACOM 231による計算結果を Table 1 に示す。この結果は、手動計算機による計算結果と一致している³⁾。

Table 1

FACOM 231 ALGOL
1 v 5 s 26 × 2 7 s 8 u
end of compilation

K2 = 0.25

X =	1	ABS N = +7.6033 ¹⁰ -04	PHAI = -0.0000 ¹⁰ -51
X =	2	ABS N = +3.7045 ¹⁰ -01	PHAI = -5.6547 ¹⁰ -01
X =	3	ABS N = +4.7664 ¹⁰ -01	PHAI = -3.8006 ¹⁰ -01
X =	4	ABS N = +5.2447 ¹⁰ -01	PHAI = -2.8847 ¹⁰ -01
X =	5	ABS N = +5.5087 ¹⁰ -01	PHAI = -2.3323 ¹⁰ -01
X =	6	ABS N = +5.6727 ¹⁰ -01	PHAI = -1.9608 ¹⁰ -01
X =	7	ABS N = +5.7826 ¹⁰ -01	PHAI = -1.6931 ¹⁰ -01
X =	8	ABS N = +5.8605 ¹⁰ -01	PHAI = -1.4906 ¹⁰ -01
X =	9	ABS N = +5.9181 ¹⁰ -01	PHAI = -1.3319 ¹⁰ -01

X =	10	ABS	$N = +5.9621^{10-01}$	PHAI	$= -1.2041^{10-01}$
K 2 = 0.50					
X =	1	ABS	$N = +9.1240^{10-04}$	PHAI	$= -0.0000^{10-51}$
X =	2	ABS	$N = +4.4454^{10-01}$	PHAI	$= -5.6547^{10-01}$
X =	3	ABS	$N = +5.7197^{10-01}$	PHAI	$= -3.8005^{10-01}$
X =	4	ABS	$N = +6.2936^{10-01}$	PHAI	$= -2.8847^{10-01}$
X =	5	ABS	$N = +6.6105^{10-01}$	PHAI	$= -2.3323^{10-01}$
X =	6	ABS	$N = +6.8072^{10-01}$	PHAI	$= -1.9608^{10-01}$
X =	7	ABS	$N = +6.9391^{10-01}$	PHAI	$= -1.6931^{10-01}$
X =	8	ABN	$N = +7.0327^{10-01}$	PHAI	$= -1.4906^{10-01}$
X =	9	ABS	$N = +7.1018^{10-01}$	PHAI	$= -1.3319^{10-01}$
X =	10	ABS	$N = +7.1545^{10-01}$	PHAI	$= -1.2041^{10-01}$
K 2 = 0.75					
X =	1	ABS	$N = +1.0644^{10-03}$	PHAI	$= -0.0000^{10-51}$
X =	2	ABS	$N = +5.1863^{10-01}$	PHAI	$= -5.6547^{10-01}$
X =	3	ABS	$N = +6.6730^{10-01}$	PHAI	$= -3.8006^{10-01}$
X =	4	ABS	$N = +7.3426^{10-01}$	PHAI	$= -2.8847^{10-01}$
X =	5	ABS	$N = +7.7122^{10-01}$	PHAI	$= -2.3323^{10-01}$
X =	6	ABS	$N = +7.9417^{10-01}$	PHAI	$= -1.9608^{10-01}$
X =	7	ABS	$N = +8.0957^{10-01}$	PHAI	$= -1.6931^{10-01}$
X =	8	ABS	$N = +8.2048^{10-01}$	PHAI	$= -1.4906^{10-01}$
X =	9	ABS	$N = +8.2854^{10-01}$	PHAI	$= -1.3319^{10-01}$
X =	10	ABS	$N = +8.3469^{10-01}$	PHAI	$= -1.2041^{10-01}$
K 2 = 1.00					
X =	1	ABS	$N = +1.2165^{10-03}$	PHAI	$= -0.0000^{10-51}$
X =	2	ABS	$N = +5.9272^{10-01}$	PHAI	$= -5.6547^{10-01}$
X =	3	ABS	$N = +7.6263^{10-01}$	PHAI	$= -3.8006^{10-01}$
X =	4	ABS	$N = +8.3915^{10-01}$	PHAI	$= -2.8847^{10-01}$
X =	5	ABS	$N = +8.8140^{10-01}$	PHAI	$= -2.3323^{10-01}$
X =	6	ABS	$N = +9.0763^{10-01}$	PHAI	$= -1.9608^{10-01}$
X =	7	ABS	$N = +9.2522^{10-01}$	PHAI	$= -1.6931^{10-01}$
X =	8	ABS	$N = +9.3769^{10-10}$	PHAI	$= -1.4906^{10-01}$
X =	9	ABS	$N = +9.4690^{10-01}$	PHAI	$= -1.3319^{10-01}$
X =	10	ABS	$N = +9.5393^{10-01}$	PHAI	$= -1.2041^{10-01}$
K 2 = 1.25					
X =	1	ABS	$N = +1.3686^{10-03}$	PHAI	$= -0.0000^{10-51}$
X =	2	ABS	$N = +6.6681^{10-10}$	PHAI	$= -5.6547^{10-01}$
X =	3	ABS	$N = +8.5796^{10-01}$	PHAI	$= -3.8006^{10-01}$
X =	4	ABS	$N = +9.4405^{10-01}$	PHAI	$= -2.8847^{10-01}$
X =	5	ABS	$N = +9.9157^{10-01}$	PHAI	$= -2.3323^{10-01}$
X =	6	ABS	$N = +1.0210^{10+00}$	PHAI	$= -1.9608^{10-01}$
X =	7	ABS	$N = +1.0408^{10+00}$	PHAI	$= -1.6931^{10-01}$
X =	8	ABS	$N = +1.0549^{10+00}$	PHAI	$= -1.4906^{10-01}$

X =	9	ABS	N = +1.0652 ¹⁰ +00	PHAI = -1.3319 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.0731 ¹⁰ +00	PHAI = -1.2041 ¹⁰ -01
K 2 = 1.50				
X =	1	ABS	N = +1.5206 ¹⁰ -03	PHAI = -0.0000 ¹⁰ -51
X =	2	ABS	N = +7.4090 ¹⁰ -01	PHAI = -5.6547 ¹⁰ -01
X =	3	ABS	N = +9.5329 ¹⁰ -01	PHAI = -3.8006 ¹⁰ -01
X =	4	ABS	N = +1.0489 ¹⁰ +00	PHAI = -2.8847 ¹⁰ -01
X =	5	ABS	N = +1.1017 ¹⁰ +00	PHAI = -2.3823 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +1.1345 ¹⁰ +00	PHAI = -1.9608 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +1.1565 ¹⁰ +00	PHAI = -1.6931 ¹⁰ -01
X =	8	ABS	N = +1.1721 ¹⁰ +00	PHAI = -1.4906 ¹⁰ -01
X =	9	ABS	N = +1.1836 ¹⁰ +00	PHAI = -1.3319 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.1924 ¹⁰ +00	PHAI = -1.2041 ¹⁰ -01
K 2 = 1.75				
X =	1	ABS	N = +1.6727 ¹⁰ -03	PHAI = -0.0000 ¹⁰ -51
X =	2	ABS	N = +8.1499 ¹⁰ -01	PHAI = -5.6547 ¹⁰ -01
X =	3	ABS	N = +1.0486 ¹⁰ +00	PHAI = -3.8006 ¹⁰ -01
X =	4	ABS	N = +1.1538 ¹⁰ +00	PHAI = -2.8847 ¹⁰ -01
X =	5	ABS	N = +1.2119 ¹⁰ +00	PHAI = -2.3323 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +1.2479 ¹⁰ +00	PHAI = -1.9608 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +1.2721 ¹⁰ +00	PHAI = -1.6931 ¹⁰ -01
X =	8	ABS	N = +1.2893 ¹⁰ +00	PHAI = -1.4906 ¹⁰ -01
X =	9	ABS	N = +1.3019 ¹⁰ +00	PHAI = -1.3319 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.3116 ¹⁰ +00	PHAI = -1.2041 ¹⁰ -01
K 2 = 2.00				
X =	1	ABS	N = +1.8248 ¹⁰ -03	PHAI = -0.0000 ¹⁰ -51
X =	2	ABS	N = +8.8908 ¹⁰ -01	PHAI = -5.6547 ¹⁰ -01
X =	3	ABS	N = +1.1439 ¹⁰ +00	PHAI = -3.8006 ¹⁰ -01
X =	4	ABS	N = +1.2587 ¹⁰ +00	PHAI = -2.8847 ¹⁰ -01
X =	5	ABS	N = +1.3221 ¹⁰ +00	PHAI = -2.3323 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +1.3614 ¹⁰ +00	PHAI = -1.9608 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +1.3878 ¹⁰ +00	PHAI = -1.6931 ¹⁰ -01
X =	8	ABS	N = +1.4065 ¹⁰ +00	PHAI = -1.4906 ¹⁰ -10
X =	9	ABS	N = +1.4203 ¹⁰ +00	PHAI = -1.3319 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.4309 ¹⁰ +00	PHAI = -1.2041 ¹⁰ -01

2-2 不感帯付非対称飽和要素

Fig. 3 に示すような不感帯付非対称飽和要素の記述
関数 $N(X, j\omega)$ は、下式のようになる。

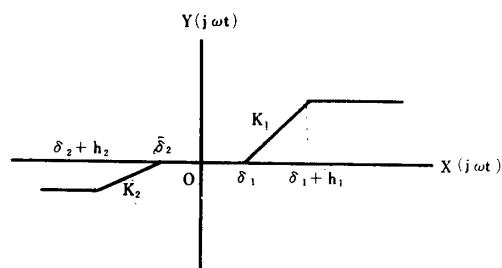


Fig.3 Formalistic excitation for
Unsymmetrical saturation with dead zone

$$N(X, j\omega) = \frac{K_1}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \sin^{-1} \frac{\delta_1}{X} + \frac{\delta_1}{X} \cos \left(\sin^{-1} \frac{\delta_1}{X} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots(3)$$

ただし, $\delta_2/X \geq 1 \geq \delta_1/X$

ここで, Fig. 3において, $K_1 = \delta_1 = 1.0$, $K_2 = \delta_2 = 0.5$ の場合について, $A = k_1/\delta_1$ として ALGOL プログラミングを行えば, 下記のようなになる.

```
begin real K1, DELTA1, X, h2, A, N, PAI, DELTA2, h1, K2, B, C, D, E, F;
  real procedure S(x);
  value x; real x;
  S: = (((3/40 + 5/112*x^2)*x^2 + 1/6)*x^2 + 1)*x;
  K2 := DELTA1 := 0.5; K1 := DELTA2 := 1.0; PAI := 3.141592653;
  for A := 1.0 step 1.0 until 7.0 do
  begin
    h1 := A*DELTA1; h2 := A*DELTA2;
    CRLF; Printstring('A='); Printinteger(fix(A));
    for X := 1.0 step 1.0 until 10.0 do
    begin
      B := (h1 + DELTA1)/X; C := (h2 + DELTA2)/X; D := DELTA1/X; E := DELTA2/X;
      if B >= 1.0 or C >= 1.0 then go to END;
      N := K1/PAI*(S(B) - S(D) + D*cos(S(D)) - (DELTA1 - h1)/X*cos(S(B)))
        + K2/PAI*(S(C) - S(E) + E*cos(S(E)) - (DELTA2 - h2)/X*cos(S(C)));
      F := abs(N);
      CRLF; Printstring('X='); Printinteger(fix(X));
      Printstring('ABS N='); Printreal(F, 5);
      CRLF;
    END: end;
  end;
end
```

FACOM 231 による計算結果を Table 2 に示す.

この結果は, 手動計算機による計算結果と一致している⁸⁾.

Table 2

A =	1		
X =	3	ABS	N = +2.1906 ¹⁰ -01
X =	4	ABS	N = +1.6164 ¹⁰ -01
X =	5	ABS	N = +1.2851 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +1.0676 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +9.1355 ¹⁰ -02
X =	8	ABS	N = +7.9848 ¹⁰ -02
X =	9	ABS	N = +7.0923 ¹⁰ -02
X =	10	ABS	N = +6.3798 ¹⁰ -02
A =	2		
X =	4	ABS	N = +3.1790 ¹⁰ -01
X =	5	ABS	N = +2.5410 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +2.1179 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +1.8159 ¹⁰ -01

X =	8	ABS	N = +1.5894 ¹⁰ -01
X =	9	ABS	N = +1.4131 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.2720 ¹⁰ -01
A =	3		
X =	5	ABS	N = +3.7317 ¹⁰ -01
X =	6	ABS	N = +3.1310 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +2.6950 ¹⁰ -01
X =	8	ABS	N = +2.3647 ¹⁰ -01
X =	9	ABS	N = +2.1061 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +1.8981 ¹⁰ -01
A =	4		
X =	6	ABS	N = +4.0810 ¹⁰ -01
X =	7	ABS	N = +3.5366 ¹⁰ -01
X =	8	ABS	N = +3.1156 ¹⁰ -01
X =	9	ABS	N = +2.7821 ¹⁰ -01
X =	10	ABS	N = +2.5120 ¹⁰ -01
A =	5		
X =	7	ABS	N = +4.3203 ¹⁰ -01

X =	8	A B S	N = +3.8307 ¹⁰ -01
X =	9	A B S	N = +3.4341 ¹⁰ -01
X =	10	A B S	N = +3.1087 ¹⁰ -01
A =	6		
X =	8	A B S	N = +4.4938 ¹⁰ -01
X =	9	A B S	N = +4.0528 ¹⁰ -01
X =	10	A B S	N = +3.6826 ¹⁰ -01
A =	7		
X =	9	A B S	N = +4.6250 ¹⁰ -01
X =	10	A B S	N = +4.2258 ¹⁰ -01

3. む す び

従来、可成りの手数をかけて数値計算を行って来た非対称非線形要素のうち、不感帯付非対称飽和要素と非対称バックラッシュについてALGOLプログラミングを行い、FACOM 231による計算結果を示し、何れも手動計算による結果と一致することを確認した。

今後は、他の非対称非線形要素についても同様にプログラムを作成すると共に、非対称非線形最適制御の勉強を進め度いと思っている。

最後に、常々御指導を賜わっている京都大学 榎木教授、得丸教授ならびに本校山県校長、計算機に関して御厚情を賜わっている山口大学佐々木教授、御熱心に御手

伝を戴いた卒業研究の学生、松島、品川両君に深謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) R. Bellman: Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton Univ. Press, (1961)
- 2) L. S. Pontryagin et al: The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley & Sons, (1962)
- 3) 榎木: これからの自動制御の動向と問題点, オートメーション, Vol. 12, No. 1, PP. 5~8, (1967)
- 4) 武者小路: 国際政治研究におけるシミュレーションの役割, 数理科学, 1, PP. 2~8, (1967)
- 5) D. D. Mc Cracken: a guide to ALGOL Programming, John Wiley & Sons, (1965)
- 6) 森口: ALGOL 入門, JUSE 出版社, (1965)
- 7) 嶺, 足立: 非対称非線形要素 (第1報), 宇部工短大高専研究報告, Vol. 1-1, No. 1, P. 74, (1964)
- 8) 嶺: 非対称非線形要素 (第3報), 宇部工短大高専研究報告, Vol. 2-2, No. 3, P. 46 & P. 50, (1966)

(昭和41年12月26日受理)