有限要素法による弾粘塑性有限長丸棒の2次元動的応答解析

谷　本　　昇*

Two-Dimensional Analysis of Dynamic Behavior of Elastic-Viscoplastic Cylinder with Finite Length by the Finite Element Method

Noboru TANIMOTO

Abstruct

Dynamic behavior of a cylinder with finite length subjected to longitudinal impact is analyzed by the two-dimensional finite element method taking account of radial motion and condition of end faces. Two kinds of cases are presented in which there are no friction and fixation at the the end faces. Constitutive equation of Perzyna type took account of strain rate dependency is used. Analysis is accomplised in curvilinear coordinate system. Input to output energy ratio is examined as error of the results of numerical calculation. As the ressults of numerical analysis by the finite element method, it is found that radial inertia and interface condition should be extremely considered in measuring stress and strain by the thin wafer method.

1. まえがき

衝撃荷重を受ける固体材料の動的挙動の研究において主要な課題の1つとして，構成関係の確立があげられている．動的に変形している固体材料の応力やひずみなどの測定のためには，応力波の伝ぱを考慮しなければならないために，従来の準静的応力やひずみの測定法を使用することができない．このようなもとで，動的に変形している固体材料の応力やひずみなどの測定法として唯一と言って良いほど用いられている方法は，衆知のようにThin Wafer 法，いわゆる Split Hopkinson Pressure Bar 法である．この方法は，小さな試験片ではひずみがほぼ一様になるとの前提のもとに使うことにされている．この方法は動的な変形挙動をとりあつかうために，縦衝撃問題（圧縮あるいは引張り）でも，半径方向に慣性力が生じる．また，この方法は試験片の両端に弾性変形挙動をする固体材料を接続して行うため，試験片両端面での接続条件が試験片の動的変形挙動に影響をおよぼす．したがって，縦衝撃の正しい Thin Wafer 法の実験のためには，試験片の形状・寸法は直径ができるだけ小さく，長さは端面の影響が無視し得るだろうと考えられる程度の短い中実丸棒がしばしば選ばれている．

Thin Wafer 法の精度に関する研究として，1次元的とりあつかいとしては，Lindhom[1]の試験片棒の長さと径の比に関する実験的検討，Conn[2]，山田ら[3]のひずみ速度依存性を無視した構成関係を用いて行った検討，村上[4]，岸田ら[5]のひずみ速度依存性を考慮した構成関係を用いて行った検討などがあり，2次元のとりあつかいとしては，ひずみ速度依存性を無視した構成関係を用いて，試験片長と径との比や，端面摩擦を考慮して有限差分コード（finite difference code）による理論的検討を行った Bertholf[6]らの研究がある．

本研究では，Thin water 法の精度に関して，半径方向の運動と端面条件を考慮して縦衝撃を受ける有限長丸棒の動的変形挙動の有限要素法解析を行い，試験片内の応力やひずみの分布などを求める．簡当にするために，

* 宇部工業高等専門学校機械科

試験片出力端は剛体壁に接しているものとする．端面条件としては，両端面で摩擦が零の場合と固着の場合の両極端の2種類を考える．また，2次元解析の場合と同じ初期条件，衝撃条件（入力条件）のときの1次元近似解析も行い．両者の比較検討も行う．なお変形は微小で，熱エネルギを無視した場合の解析である．

2. 構成関係

固体材料の動的変形挙動の特性の1つとして，ひずみ速度依存性があげられる．本解析で用いる構成関係は，Perzyna[7] によって直交デカルト座標系（x^i）で与えられた次の構成方程式である．

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{ij}&=\frac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij}+\gamma^0<\Phi(F)>\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} && \text{for } F>0 \\ \dot{e}_{ij}&=\frac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij} && \text{for } F\leq 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ii}&=\frac{1}{3K}\dot{\sigma}_{ii} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

また，

$$<\Phi(F)>=\begin{cases}\Phi(F) & \text{for } F>0 \\ 0 & \text{for } F\leq 0\end{cases} \quad (2)$$

ここで，$\Phi(F)$ は種々の函数が与えられているが，ここでは $\Phi(F)=F$ であり，$F=\sqrt{J_2}/k-1$ である．e_{ij}，s_{ij} はそれぞれ偏差ひずみテンソル，偏差応力テンソルであり，ε_{ij}，σ_{ij} はそれぞれひずみテンソル，応力テンソルである．J_2は偏差応力テンソルの第2不変量，k は準静的降伏応力であり，γ^0 は材料定数である．μ，K はそれぞれ剛性率（Lamé の定数），体積弾性係数である．この構成方程式は加工硬化を含み，Hohenemser と Prager[9]の構成方程式の一般化であり[7]，金属材料のひずみ速度依存性を過大応力（over-stress）の関数として導入された Sokolovski-Malvern 型の構成方程式を一般化したものであり，種々の弾粘塑性モデルをその特殊な場合として含んでいる[7)8)]．

(1)式は，弾性成分と粘塑性成分を分離して，次式となる．

$$\left.\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}&=b_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^e_{kl} \\ \dot{\varepsilon}^P_{ij}&=\gamma^0<\Phi(F)>\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \\ \varepsilon_{ij}&=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^P_{ij} \\ b_{ijkl}&=\lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\,\delta_{jk}) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで，右肩の添字 e と P はそれぞれひずみの弾性成分，粘塑性成分を示す．λ，μ はそれぞれ Lamé の定数である．ドットは時間微分を表す．

本解析で対象としている丸棒を考慮して，(3)式を曲線座標系（θ^i）に変換する．θ^i系での反変応力テンソル，共変ひずみテンソルをそれぞれ τ^{ij}，γ_{ij} で表すことにする．$\mathbf{x}^i$ 系と θ^i 系での応力増分，ひずみ増分の間にはそれぞれ次の関係が成り立つ[10)11)]．

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma^{ij}&=\frac{\partial x^i}{\partial\theta^u}\frac{\partial x^j}{\partial\theta^w}\Delta\tau^{uw} \\ \Delta\varepsilon_{ij}&=\frac{\partial\theta^u}{\partial x^i}\frac{\partial\theta^w}{\partial x^j}\Delta\gamma_{uw} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$(3)_1$式に(4)式を適用すると，応力増分と弾性ひずみ増分の関係が次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} \Delta\tau^{mn}&=B^{mnkl}\,\Delta\gamma^e_{kl} \\ B^{mnkl}&=\lambda g^{mn}g^{kl}+\mu(g^{mk}g^{nl}+g^{ml}g^{nk}) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ここで，$\mathbf{g}^{ij}$，$\mathbf{g}_{ij}$はそれぞれ反変，共変計量テンソルである．

また，$(3)_2$式に(4)式を適用すると，次の粘塑性ひずみ増分と時間増分の関係式を得る．

$$\Delta\gamma^P_{ij}=\gamma^0<\Phi(F)>\frac{\partial F}{\partial\tau^{ij}}\,\Delta t \quad (6)$$

ここで，Δt は時間増分である．

(6)式をさらに変形すると次式を得る．

$$\Delta\gamma^P_{ij}=\gamma^0<\Phi(F)>\frac{1}{4\sqrt{k}\sqrt{J_2}}\Big\{(g_{ik}g_{jl}\tau'^{kl}+g_{si}g_{tj}\tau'^{st}) -\frac{1}{3}g^{mn}g_{ij}(g_{mk}g_{nl}\tau'^{kl}+g_{sm}g_{tn}\tau'^{st})\Big\}\,\Delta t \quad (7)$$

ただし，

$$J_2=\frac{1}{2}g_{ik}\,g_{jl}\,\tau'^{ij}\,\tau'^{kl}$$

$$\tau'^{ij}=\tau^{ij}-\frac{1}{3}g^{ij}g_{kl}\tau^{kl}$$

ここで τ'^{ij} は偏差応力テンソルである．

(6)式は，軸対称問題のとき円筒座標系で，非弾性成分の非圧縮性を考慮して次式を得る．

$$\Delta\gamma^P_{ij}=\gamma^0<\Phi(F)>\frac{1}{4\sqrt{k}\sqrt{J_2}}(g_{ik}g_{jl}\tau'^{kl}+g_{si}g_{tj}\tau'^{st})\,\Delta t \quad (8)$$

ただし，$i=1$，2，3 をそれぞれ半径，周，軸方向にとり，次式を考慮している．

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=g_{33}=g^{11}=g^{33}=1 \\ &g_{22}=r^2,\quad g^{22}=\frac{1}{r^2} \\ &\text{その他の計量テンソルは零} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(5)，(6)式から次式を得る．

$$\Delta^{ij}=B^{ijkl}\Delta\gamma_{kl}-\Delta A^{ij} \quad (10)$$

ここで，

$$\Delta A^{ij}=\mu\gamma^0<\Phi(F)>(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk})\frac{\partial F}{\partial\tau^{kl}}\Delta t$$

(10)式が増分型の構成式である．

3．要素の増分型運動方程式

熱エネルギを無視した場合，増分変形前後の連続体のエネルギ平衡式は次式で与えられる[11]．

$$\left.\begin{aligned}\int_V\rho\,\ddot{u}^i v_i dV+\int_V\tau^{ij}v_j|_i dV&=\int_S P^i v_i dS+\int_V\rho F^i v_i dV\\ \int_V\rho\,\bar{\ddot{u}}^i\bar{v}_i dV+\int_V\bar{\tau}^{ij}\bar{v}_j|_i dV&=\int_S\bar{P}^j\bar{v}_j dS+\int_V\rho\bar{F}^j\bar{v}_j dV\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

ここで，ρ は密度であり，$\ddot{u}^i$, v_i, P^i, F^i はそれぞれ加速度，速度，表面力，体積力を表す．"｜"は共変微分を表す．添え記号"—"は増分変形後の値を表す．

また，次式を成り立つ．

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\ddot{u}}^i=\ddot{u}^i+\Delta\ddot{u}^i,\ \bar{v}_j=v_j+\Delta v_j,\ \bar{\tau}^{ij}=\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}\\ &\bar{F}^i=F^i+\Delta F^i,\ \bar{P}^i=P^i+\Delta P^i\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

要素内の任意の点における変位増分は変位関数と接点変位増分を用いて

$$\Delta u^i=\psi^N\Delta u^i{}_N,\qquad \Delta u_i=\psi_N\Delta u^N{}_i\qquad(13)$$

となり，また次式も成り立つ．

$$\left.\begin{aligned}&v^i=\psi^N v^i{}_N,\qquad v_i=\psi_N v^N{}_i\\ &\ddot{u}^i=\psi^N\ddot{u}^i{}_N,\qquad \ddot{u}_i=\psi_N\ddot{u}^N{}_i\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

ここで，変位関数 $\psi^M=\psi_M=a_M+b_{Mk}\theta^k$ である．N, Mに対しても総和規約に従うものとする．

また，変位増分の共変微分は接点変位増分を用いて次式で与えられる[11)12)]．

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u_j|_i={}_N\Psi^r{}_{ij}\ \Delta u^N{}_r\\ &\Delta u^j{}_i={}^N\Psi^j{}_{ri}\ \Delta u^r{}_N\\ &{}_N\Psi^r{}_{ij}=\psi_{N,j}\ \delta^r{}_i-\Gamma_{ij}{}^r\ \psi_N\\ &{}^N\Psi^i{}_{rj}=\psi^N{}_{,j}\ \delta^i{}_r+\Gamma_{rj}{}^i\ \psi^N\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

ここで，$\Gamma_{ij}{}^r$ は Christoffel 記号である．

(14)式を Cauchy の微小ひずみ増分に適用すると次式を得る．

$$\Delta\gamma_{ij}=\frac{1}{2}({}_N\Psi^r{}_{ij}+{}_N\Psi^r{}_{ji})\Delta u^r{}_N\qquad(16)$$

任意の要素に対して，(14)₁ 式を(11)式に適用し，零でない接点速度に対して成り立つ条件を考慮すると次式を得る．以下，積分は任意の要素に対して適用することにする．

$$\left.\begin{aligned}\int_V\rho\,\ddot{u}^j\psi_N dV+\int_V\tau^{ik}{}_N\Psi^j{}_{ki}dV&=\int_S P^j\psi_N dS+\int_V\rho F^j\psi_N dV\\ \int_V\rho\,\bar{\ddot{u}}^j\psi_N dV+\int_V\bar{\tau}^{ik}{}_N\psi^j{}_{ki}dV&=\int_S\bar{P}^j\psi_N dS+\int_V\rho\bar{F}^j\psi_N dV\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

(17)式に(12)式を適用すると次式を得る．

$$\int_V\rho\Delta\ddot{u}^j\psi_N dV+\int_V\Delta\tau^{ik}{}_N\Psi^j{}_{ki}dV=\int_S\Delta P^j\psi_N dS+\int_V\rho\Delta F^j\psi_N dV\qquad(18)$$

(10), (16)式を用いると(18)式は次式となり，要素の増分型運動方程式を得る．

$$m^M{}_N\Delta\ddot{u}^j{}_M+K^{jM}{}_{rN}\Delta u^r{}_M=\Delta A^j{}_N+\Delta P^j{}_N+\Delta F^j{}_N\qquad(19)$$

ここで

$$m^M{}_N=\int_V\rho\psi^M\psi_N dV$$

$$K^{jM}{}_{rN}=\int_V B^{imkl}g_{ks}\ {}^M\Psi^s{}_{rl}\ {}_N\Psi^j{}_{mi}dV$$

$$\Delta A^j{}_N=\int_V\Delta A^{is}{}_N\Psi^j{}_{si}dV$$

$$\Delta P^j{}_N=\int_S\Delta P^j\psi_N\ dS$$

$$\Delta F^j{}_N=\int_V\Delta F^j\psi_N\ dV$$

次に，Newmark[13] の加速度係数 $\beta=1/6$，すなわち加速度が時間に関して線形の場合を考えると，接点変位増分，接点速度増分はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\Delta u^r{}_M&=\dot{u}^r{}_M\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{u}^r{}_M(\Delta t)^2+\frac{1}{6}\Delta\ddot{u}^r{}_M(\Delta t)^2\\ \Delta\dot{u}^r{}_M&=\ddot{u}^r{}_M\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\ddot{u}^r{}_M\Delta t\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

となり，(19)式に(20)₁ 式を適用すると要素の増分型運動方程式は次式となる．

$$Q^{jM}{}_{rN}\Delta\ddot{u}^r{}_M=\Delta R^j{}_N\qquad(21)$$

ここで，

$$Q^{jM}{}_{rN}=m^M{}_N\delta^j{}_r+\frac{1}{6}K^{jM}{}_{rN}(\Delta t)^2$$

$$\Delta R^j{}_N=-K^{jM}{}_{rN}\left\{\dot{u}^r{}_M\ \Delta t+\frac{1}{2}\ddot{u}^r{}_M(\Delta t)^2\right\}+\Delta A^j{}_N+\Delta P^j{}_N+\Delta F^j{}_N$$

要素の増分型運動方程式(21)を連続体全体に適用すると，多元連立１次方程式となる．

4．解析結果と考察

試験の寸法，要素分割は図(1)に示す．Thin Wafer 法で試験片内でひずみが一様になると考えられ，多くの実験で用いられている寸法を考慮して，直径 8 mm，長さ 8 mm の寸法を選んだ．

時間増分は，１次元近似計算の場合は $\Delta t=\sqrt{\rho/E}\,\Delta Z$，２次元計算の場合は $\Delta t=\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}\,\Delta Z$ とした．

剛性マトリクスの計算にはガウスの求積法を用いている．

初期条件は，無応力，無ひずみ，静止状態に縦衝撃負荷が加わった場合を解析するために，応力，ひずみ等全ての物理量を零とした．

衝撃条件は，衝撃端で立ち上がり時間が 5 μsec で静的圧縮初期降伏応力 7 kg/mm² の 5 倍の衝撃力を軸方向に負荷し，その後その値を保つようにした（図2）．その他の方向では衝撃力は零である．

境界条件は，両端面摩擦無しの場合は $Z=L$ での軸方向速度増分を零とした．また，試験片の対称性から $R=0$ での半径方向加速度増分を零とした．その他の加速度増分は未知である．両端面固着の場合は $Z=L$ での軸方向加速度増分を零とし，両端面 $Z=0$，$Z=L$ で半径方向加速度増分を零とした．また，$R=0$ で摩擦無しの場合と同様に，半径方向加速度増分を零とした．その他の加速度増分は未知である．

1次元近似計算の場合には，初期条件，衝撃条件は2次元計算の場合と同じである．

有限要素法解の精度の判定として，各時間増分段階ごとにそれまでの入力エネルギと，試験片の運動エネルギと変形エネルギの和との差を計算した．その結果を図(3)に示す．試験片全体が非弾性域に入ると誤差は時間に対して線形に増加しているが，衝撃直後数 μsec までを除き 100μsec まではいずれの場合も誤差は 0.9% 以内であり，計算精度として信頼できる値であることがわかる．

本解析で使用した Perzyna 型の弾粘塑性構成方程式で用いた準静的応力・ひずみ関係式は2直線硬化型のものであり，非弾性域での傾きは 300kg/mm² である．その他数値計算に用いた材料定数は，$E=6900\mathrm{kg/mm^2}$，$\rho=0.27\times10^{-9}\ \mathrm{kg\cdot sec^2/mm^4}$，$\nu=0.33$，$\gamma^0=150$ である．また，本解析での最大ひずみ速度は軸方向で $2.4\times10^3\mathrm{sec^{-1}}$ であった．

図(4)は縦衝撃負荷後の軸方向各位置における軸ひずみの平均値の分布を示す．実線，一点鎖線，破線はそれぞれ2次元摩擦無し，2次元固着，1次元近似の場合を示し，以下同様である．2次元摩擦無しの場合と固着の場合とを比較すると，軸ひずみ分布に大きな差があることがわかる．摩擦無しの場合端面近傍と中央部との間には軸ひずみに大きな差は無いが，固着の場合端面近傍と中央部との間に軸ひずみに大きな相違が見られ，軸ひずみの一様性は完全に破られていることがわかる．

図(5)は縦衝撃負荷後の軸方向各位置における半径方向ひずみの平均値の分布を示す．この場合も図(4)の軸ひずみ分布の場合と同様に，2次元摩擦無しと固着の場合と

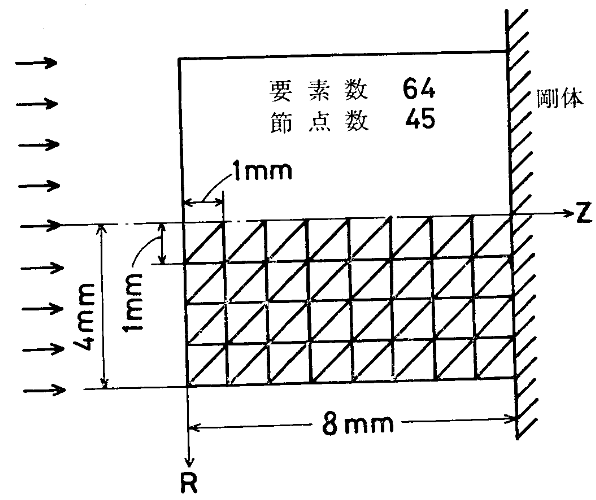

図1 要素分割

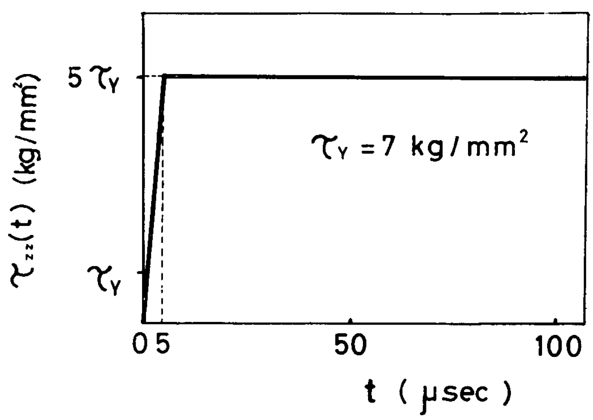

図2 負荷条件

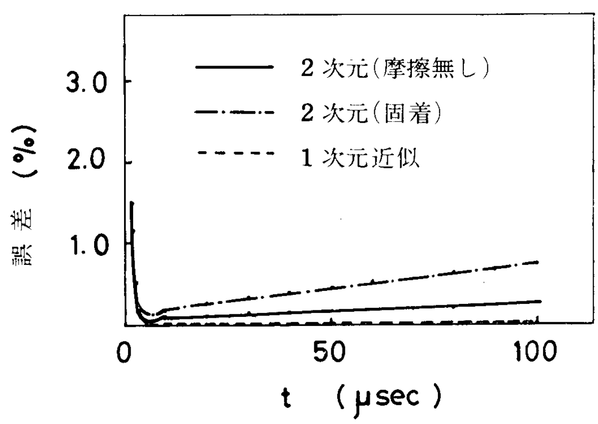

図3 計算誤差

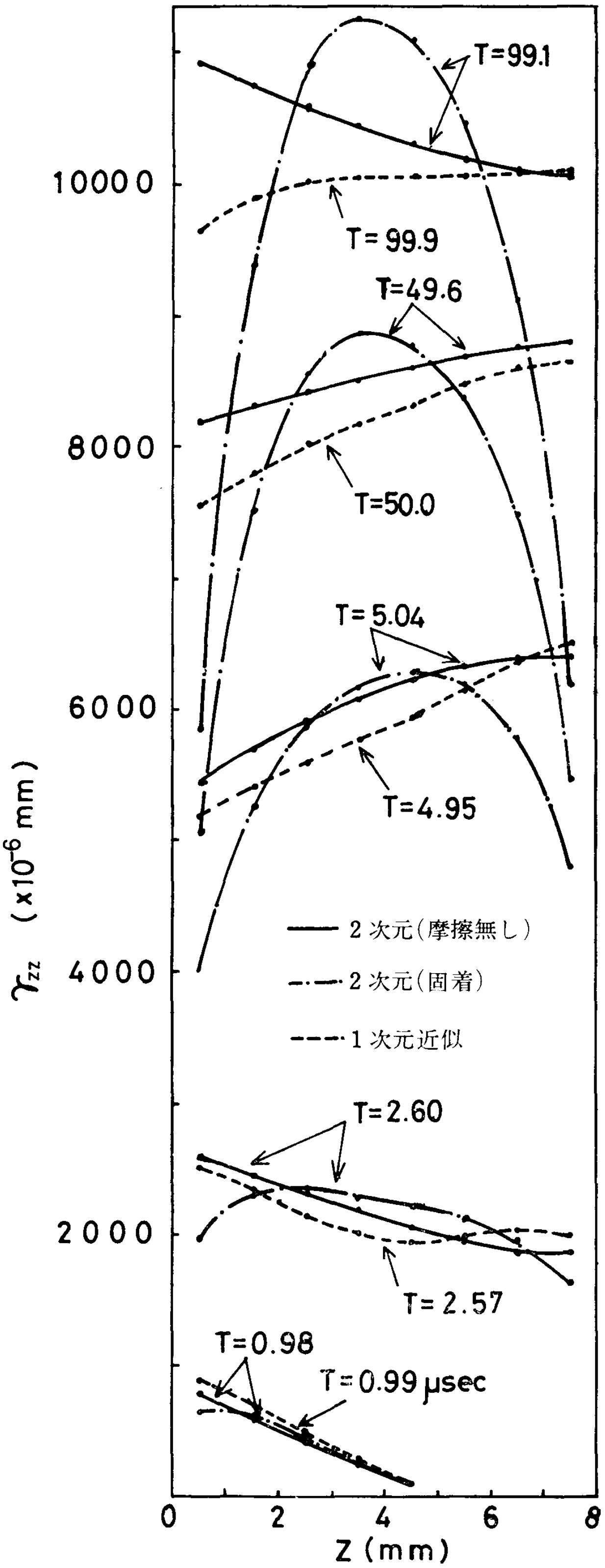

図 4　軸方向各位置における軸における軸ひずみ分布

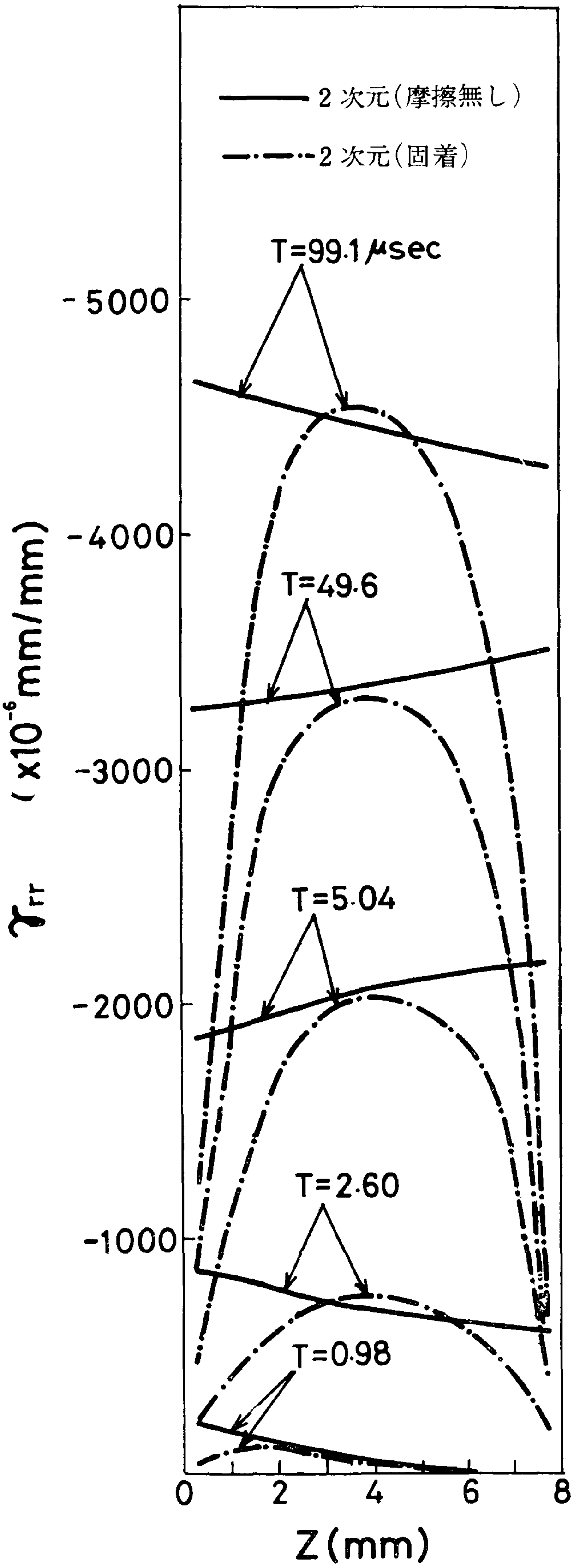

図 5　軸方向位置における半径方向ひずみ分布

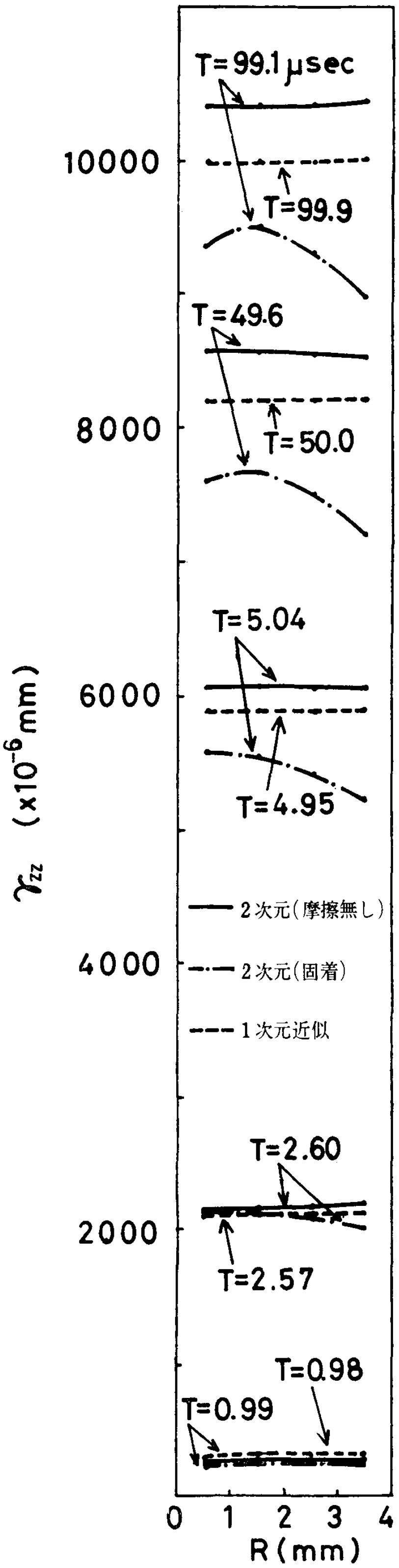

図 6 半径方向位置における軸ひずみ分布

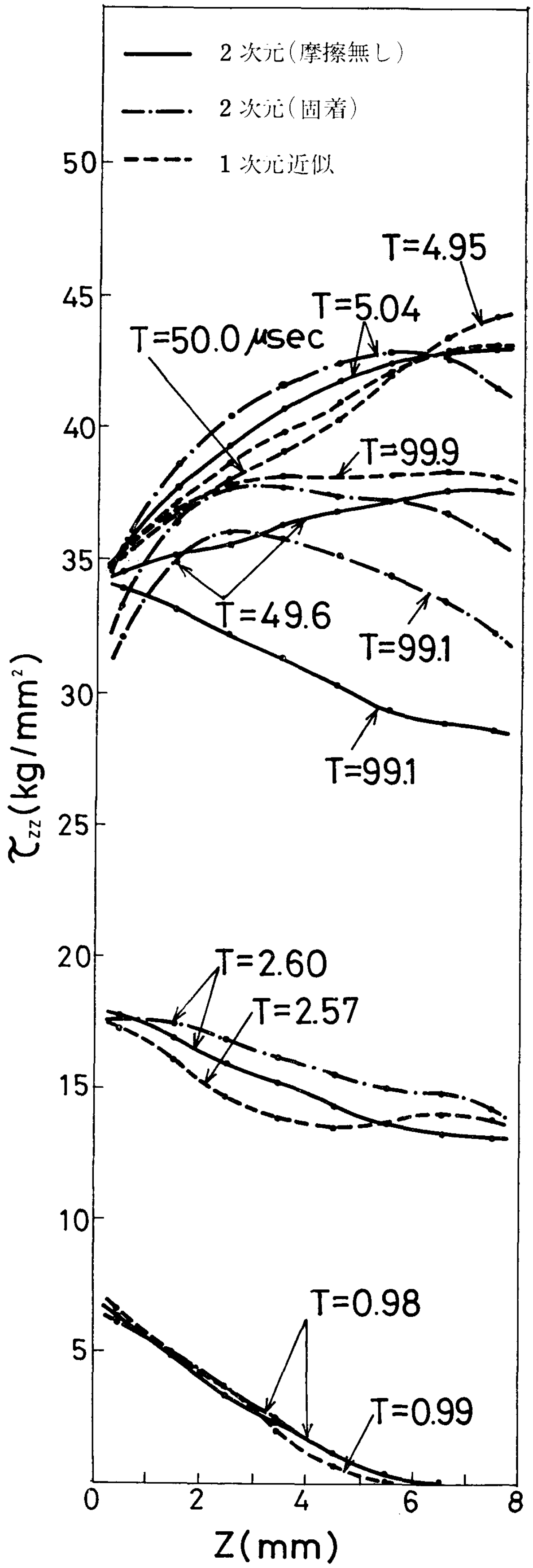

図 7 軸方向各位置における軸応力分布

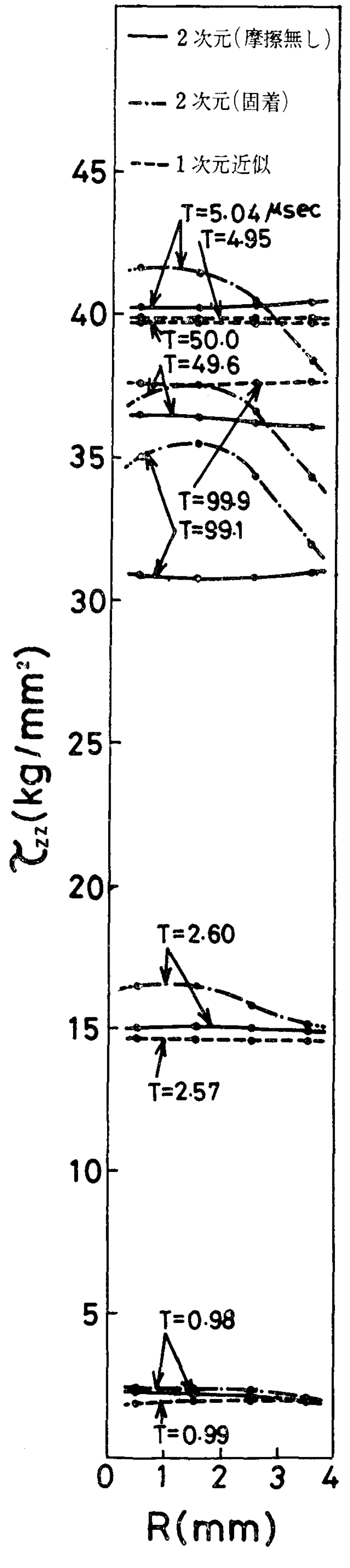

図 8　半径方向各位置における軸応力分布

の間に半径方向ひずみ分布に大きな相違が見られる．摩擦無しの場合は半径方向ひずみの一様性がほぼ保たれており，固着の場合半径方向ひずみの一様性は大きく破れていることがわかる．

図(6)は半径方向各位置での軸ひずみの平均値の分布を示す．1次元近似の場合や2次元固着の場合の軸ひずみ分布は2次元摩擦無しの軸ひずみ分布と大きくかけはなれていることがわかる．

これら図(4)，(5)，(6)の軸ひずみ分布や半径方向ひずみ分布から，2次元摩擦無しの場合ほぼひずみの一様性が保たれているが，固着の場合はひずみの一様性から大きく離れていることがわかり，Thin Wafer 法による実験に際してのひずみの測定に関し，試験片端面の潤滑を良くし，可能な限り摩擦を零に近くする必要があることがわかる．

図(7)，(8)はそれぞれ軸方向各位置，半径方向各位置での軸応力の平均値の分布を示す．2次元摩擦，2次元固着，1次元近似の場合それぞれ互いに異った応力分布をしている．

5. む　す　び

(1) Perzyna によって与えられた直交直線座標系でのひずみ速度依存性を示す弾粘塑性構成方程式を丸棒の動的変形挙動の解析に用いるために一般曲線座標系に変換した．

(2) 熱エネルギを無視し，微小変形をとりあつかった有限要素法による要素の増分型運動方程式をエネルギ平衡式を用いて導出し，加速度増分と荷重増分の一般的な関係式を求めた．

Thin Wafer 法の精度に関して，端面条件が摩擦無しの場合と固着の場合に縦衝撃を受ける有限長丸棒の2次元有限要素法解析を行い，その結果

(3)，1次元近似解によるによる応力，ひずみは2次元数値計算のそれらと大きく相違していることがわった．

また

(4)，2次元摩擦無しの場合のひずみの一様性はほぼ保たれ，固着の場合両端面と中央部の間にひずみの大きな相違が生じることがわかった．

その結果

(5) Thin Wafer 法によってひずみの一様性を得るためには，試験片端面の潤滑を良くし端面摩擦を零に近づける必要があることがわかった．

参 考 文 献

1）Lindholm, U. S., J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12 (1964), 317.
2）Conn, A. F., J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13 (1965), 311.
3）山田ほか2名，塑性と加工，Vol. 9, No. 84 (1968), 55.
4）村上ほか2名，機論集，39巻，318号（1973）556.
5）岸田ほか2名，材料，Vol. 28, No. 304 (1979) 74.
6）Bertholf, L. D. and Karnes, C. H., J.Mech. Phys. Solids, Vol. 23 (1975), 1.
7）Perayna, P., Qart. Appl. Math., Vol. 20, No. 4 (1963), 321.
8）Cristescu, N.（黒崎訳），衝撃塑性（1970），コロナ社.
9）Prager, W., Introduction to Mechanics of Continua (1961), Ginn and Company.
10）Yung, Y. C.,（大橋ほか2名訳），固体の力学（1970），培風館.
11）北川ほか2名，機論集，38巻，307号（1972），479.
12）瀬口，材料，Vol. 22, No. 237 (1973), 68.
13）Newmark, N. M., Proc. ASCE., 85, EM 3 (1959), 67.

（昭和54年9月8日受理）