

# 準最適制御の一計算法

(状態量に制限のある場合)

松 井 稜 治\*

## A Computational Method for Suboptimal Control Systems with State Constraints

Ryoji MATSUI

### Abstract

We presented a method to simplify the gradient projection method by J. B. Rosen and the method was used to compute the optimal control problem with control constraints.

In this report, the method is applied to an optimal control system with state constraints.

### 1. ま え が き

筆者らは先にローゼンの勾配射影法のアルゴリズム<sup>3)</sup>を簡単化した手法を開発し、操作量のみ制限のある最適制御問題に適用し、一応の成果を得た<sup>1),2)</sup>。その際、課題として更に複雑な問題への適用可能性を調べる必要があることがあげられていた。今回、そのような性質の問題として状態量にも制限のある最適制御問題を取り上げ計算を行なってみたので報告する。

### 2. 問題の記述

『連続系：

$$dx/dt = Ax + bu \quad (1)$$

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$$

$A$  :  $m \times m$  定数行列

$b$  :  $m$  次元定数ベクトル

$u$  : 操作量 (スカラー量)

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

を

$$|u| \leq 1 \quad (3)$$

$$|x^i| \leq 1 \quad (4)$$

という制約のもとで、 $x$  の最終値を

$$x(T_f) = 0 \quad (5)$$

評価関数：

$$J = \int_0^{T_f} u^2 dt \quad (6)$$

を最小にせよ。』という問題に対して、操作量  $u$  をサンプル値制御 (0次ホールド) とすれば、上記問題は

$$x_k = G^k x_0 + \sum_{l=1}^k G^{k-l} h u_l \quad (k=1, \dots, K) \quad (7)$$

但し、

$u_l$  :  $(l-1)T_s \leq t < lT_s$  における  $u$  の値

$K$  : サンプルング区間数

$T_s$  : サンプルング周期

$G$  : 状態遷移行列 ( $=e^{AT_s}$ )

$$h : \int_0^{T_s} e^{A(T_s-t)} b dt$$

$$|u_j| \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, K) \quad (8)$$

$$|x^i| \leq 1$$

のもとで

$$x_K (= x(K \cdot T_s)) = 0 \quad (9)$$

とし、しかも

$$J_s = T_s \sum_{j=1}^K u_j^2 \quad (10)$$

を最小にせよ。』という問題になる。

### 3. サンプル値制御系における制約条件

a) 操作量に対する制約条件

\* 宇部工業高等専門学校機械工学科

文献2)により、(10)式の制約はm個の等式条件であるから、K個の $u_j$ のうちのm個(ここでは最後のm個)は、他の $u_j$  ( $j=1, 2, \dots, K-m$ )により表わすことができる。即ち、

$$u_j = \sum_{l=1}^{K-m} AM(l, j-K-m)u_l + C(j-K+m) \\ = f_{j-K+m}(u) \quad (12)$$

但し、

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{K-m})$$

とすることができる。

従って、操作量に対する制約条件(8)式は、結局

$$u_j \leq 1^* \quad (j=1, 2, \dots, K-m) \quad (13)$$

$$-u_j \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, K-m) \quad (14)$$

$$f_j \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

$$-f_j \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

となる。(\*実際には、計算誤差などを考慮して $1-\epsilon_u$ ,  $\epsilon_u < 1$ としている。)

#### b) 状態量に対する制約条件

連続系の場合、状態量は連続的に変化する。しかし、サンプリング周期 $T_s$ が系の時定数に比べてある程度小さいとすれば、サンプリング区間内の状態量の変化も小さいと仮定することができる。そのとき(9)式は各サンプリング時刻における $x^i$ の値だけに対する制約であると近似することができる。即ち、

$$|x_k^i (=x^i(kT_s))| \leq 1 - \epsilon_x = \Omega_x \quad (17)$$

となる。但し、各サンプリング区間内で $x_1$ が $\Omega_x$ を超えることを考慮して $\epsilon_x$ だけ制約領域を狭めている。

今、

$$G^{K-j}h \text{ を } cc(i, j) \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, K)$$

$$G_k \text{ を } GK(i, j, k) \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots,$$

$$m, k=1, \dots, K)$$

のように表わせば(7)式は

$$x_k^i = \sum_{j=1}^m GK(i, j, k)x_0^j + \sum_{l=1}^k cc(i, l+K-k)u_l \quad (18)$$

となる。このとき状態量に対する制約条件(17)式は次のように表わせる。

$$\sum_{j=1}^m cc(i, j+K-k)u_j \leq \Omega_x - \sum_{j=1}^m GK(i, j, k)x_0^j \quad (19)$$

$$-\sum_{j=1}^m cc(i, j+K-k)u_j \leq \Omega_x + \sum_{j=1}^m GK(i, j, k)x_0^j \quad (20)$$

しかし、 $k \geq K-m+1$ に対しては $u_j$ が(12)式のように表

わせるので、(19)、(20)式はそれぞれ次のように書きかえられる。

$$\sum_{j=1}^K [cc(i, j+K-k) + \sum_{l=K-m+1}^k AM(j, l-K+m)cc(i, \\ l+K-k)] u_j \\ \leq \Omega_x - \left[ \sum_{j=1}^m GK(i, j, k)x_0^j + \sum_{j=K-m+1}^k cc(i, j+K-k) \right. \\ \left. c(j-K+m) \right] \quad (21)$$

$$-\sum_{j=1}^K [cc(i, j+K-k) + \sum_{l=K-m+1}^k AM(j, l-K+m)cc(i, \\ l+K-k)] u_j \\ \leq \Omega_x + \left[ \sum_{j=1}^m GK(i, j, k)x_0^j + \sum_{j=K-m+1}^k cc(i, j+K-k) \right. \\ \left. c(j-K+m) \right] \quad (22)$$

$$(k=K-m+1, \dots, K-1)$$

以上のようにして、操作量、状態量に対する制約は、結局、(13)、(14)、(15)、(16)、(17)、(18)、(19)、(20)、(21)、(22)式の $u_j$  ( $j=1, 2, \dots, K-m$ )に対する線形制約条件となる。

(なお、操作量のみ制限のある場合、複数個の $u_j$ を含む制約式の数は、(15)、(16)の2mである。ところが、状態量に制約が加わると、(19)(20)のうち $k=1$ を除く全てが、そのような式に相当し、個数は $2(K-2)$ 増加する。)従って、§2の最適制御問題は

$$\min N^T u \leq \lambda \quad (23)$$

$$\text{但し、 } u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (n=K-m)$$

$$N = (n_1, n_2, \dots, n_{nc}), \quad (n_c = 4K-2)$$

なる制約条件のもとで、評価関数

$$J = F(u) \quad (24)$$

を最小にせよ』なる非線形計画問題となる。このような問題の数値解法として勾配射影法が使用できる。

#### 4. 最適値探索法

概略の流れ図を図1に示す。流れ図中のいくつかの事項について説明を加えておく。

##### a) 遷移行列<sup>4)</sup>

遷移行列 $G$ 及び $h$ (17)式)は次のような級数展開を用いて数値計算した。

$$G = e^{AT_s} = I + AT_s + \frac{(AT_s)^2}{2!} + \frac{(AT_s)^3}{3!} + \dots \quad (25)$$

$$h = T_s \left[ I + \frac{AT_s}{2!} + \frac{(AT_s)^2}{3!} + \frac{(AT_s)^3}{4!} + \dots \right] \quad (26)$$

##### b) 初期実行可能解

最適制御の計算に勾配射影法を用いるとき、初期点は

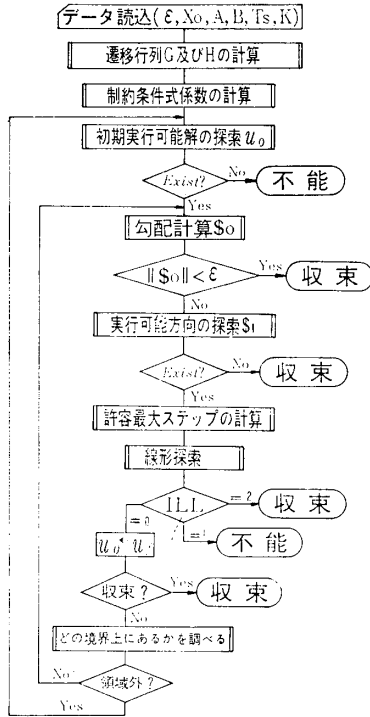


図 1 概略流れ図

制約領域内に (境界を含む) 存在しなければならない (実行可能解)。初期実行可能解を探索するについても、後述の実行可能方向探索法を用いている。即ち、満たされていない条件があればその制約境界へ向かう法線方向ベクトルを、最適値探索における勾配におきかえることによって実行可能解を探索する。実行可能方向がなければ実行不能とするわけである。

c) 勾配計算

勾配是最急降下方向である。勾配ベクトルを  $s_0$  とする。

d) 実行可能方向の探索

詳細については、文献 1) 2) を参照されたい。ここでは概略のみについて説明する。

今、原勾配  $s_0$  を  $q (\leq n)$  個の制約境界 (超平面) の交わり上に射影してそれを  $s_1$  とすれば

$$s_1 = (I - N_q(N_q^T N_q)^{-1} N_q^T) s_0 = P_q s_0 \quad (27)$$

いう関係がある<sup>3)</sup>。

ローゼンの勾配射影法では、 $u$  が  $r$  個の制約境界 (超平面,  $H_1, H_2, \dots, H_r$ ) の交わり上にあるとき、まずその交わり上に射影を行ない、実行可能方向があればその方向に進む。ただし、射影を重ねれば重ねる程勾配ベクトルの大きさは小さくなる。従って、収束性も悪くなるのが推測される。そのために、ここでは射影をできるだけ重ねない方法を探ってみた。

今、既に  $q-1$  次元の交わり上へ射影が行なわれてい

るとき ( $s_1$ )、まだ射影勾配  $s_1$  が複数個の制約境界に対して外向き (制約条件を優す方向) であるとき

$$\max_i n_i^T s_1 / \| P_{q-1} n_i \|^2$$

となるような制約境界  $H_i$  への射影を行なう。実行可能方向が見つかるまでこれを繰り返す。この方法を用いると交わりを構成する全ての制約超平面への射影を行なわなくともよい場合がある。この場合、全ての超平面へ射影するより勾配ベクトルは大きく、従って収束もよいと察せられる。

なお、 $u_j = \text{const}$  (制約式内には単独の  $u_j$  のみが含まれる) なる超平面への射影は、文献 2) よりわかるように、射影計算は簡単になる。

e) 許容最大ステップ

制約領域内で動きうる最大の距離のことであり、求め方は文献 2) による。

f) 線形探索

$u_0$  から実行可能方向  $s_1$ 、許容最大ステップ  $\rho$  内での極値を求める。線形探索の手法については、文献 2) を参照されたい。なお、ILL の値は、0 のとき他方向へ探索続行すべき、1 のとき不能、2 のとき収束であることを示す。

g) 収束判定

極値をとる点では勾配または射影勾配は 0 となるはずである。従って、勾配または射影勾配がある程度 ( $\epsilon$ ) 小さくなれば収束と判定する。但し、勾配のみにより収束判定すると繰返し回数が多く、計算時間が長くなることがあるので、ここでは収束判定条件として、評価関数値の変化、探索点  $u$  の動きに対しても、これらの値がある程度小さくなる場合も収束条件に加えている。但し、十分に収束していない場合でも、一回だけの変化値は小さいことがあるので、これら変化値については 2 回分の和を収束判定の基準にとっている。

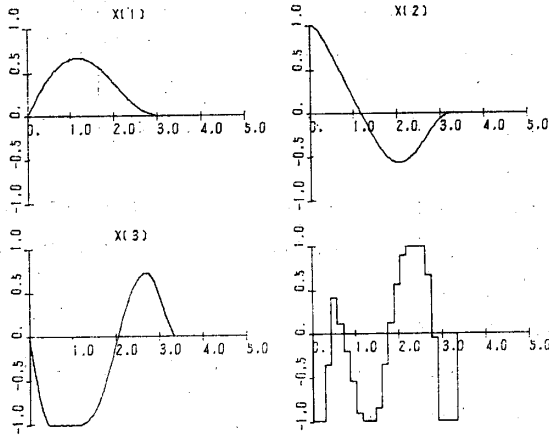
h) 領域内にあるかどうかのチェック

勾配射影法を用いて最適値探索を行なう時、初期点が領域内であれば、原理的には制約領域外へ出ることはない。しかし、場合によっては計算誤差などのため外部に出ることもある。このような場合を考慮して領域内にあるかどうかをチェックして、外部に出ている場合には再び実行可能解の探索を行なうようプログラミングされている。

5. 計算例, 結果及び考察

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2.63 & -1.77 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$|u| \leq 1, |x^3| \leq 1$ , サンプルング区間数  $K=23$  について計算を行なった。

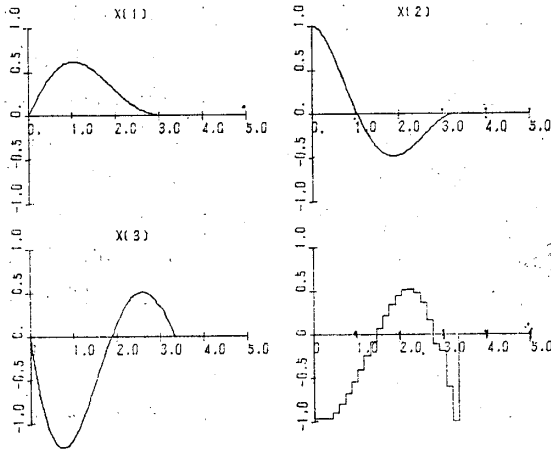


TS=0.1450 KK= 23 A(I,J),B(I)=

0.	1.000	0.	0.
0.	0.	1.000	0.
-1.000	-2.630	-1.770	1.000

図2 状態量・操作量共に制限のある場合

状態量，操作量共制約のある場合の最短時間制御の状態量，操作量の時間経過を図2に示す。 ( $T_s=0.145$ )

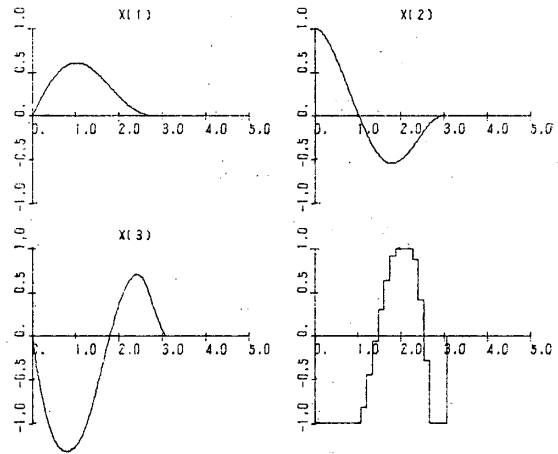


TS=0.1450 KK= 23 A(I,J),B(I)=

0.	1.000	0.	0.
0.	0.	1.000	0.
-1.000	-2.630	-1.770	1.000

図3 図2の例で操作量のみ制限のある場合

同一のサンプルング周期に対して，操作量のみ制限をつけて最適化したものを図3に示す。図2と図3とを比較してみると状態量  $x(3)$  の形状及び操作量のパターンに違いのあることがわかる。



TS=0.1330 KK= 23 A(I,J),B(I)=

0.	1.000	0.	0.
0.	0.	1.000	0.
-1.000	-2.630	-1.770	1.000

図4 操作量のみ制限のある場合の最短時間制御

図4は，操作量のみ制限をつけた場合の最短時間制御の例であり，操作量パターンがバングバング形に近いことがわかる。(サンプルング周期と切替時間との関係で完全なバングバング形にならない。)

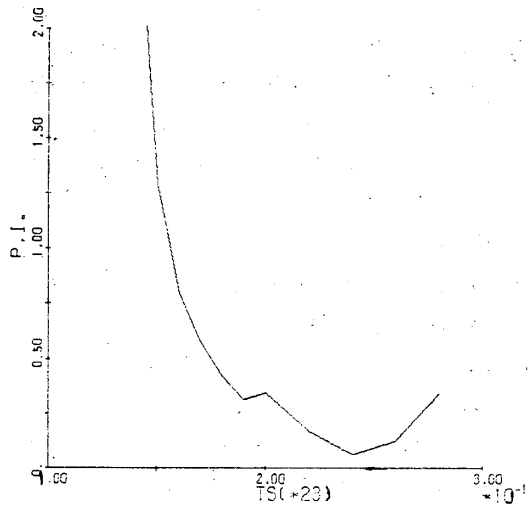


図5 サンプルング周期  $T_s$  に対する最適評価関数値

サンプルング区間数を同一 ( $K=23$ ) にして  $T_s$  を変化させ，それぞれの  $T_s$  に対する最適な評価関数値を求めて，図5に示す。評価関数を最小とするのは最短時間制御の  $T_s$  よりやや大きい  $T_s$  の場合であることがわかる。そのときの操作量，状態量を図6に示す。

収束性を調べるため， $T_s=0.145$  と  $T_s=0.24$  の場合の各計算回と評価関数値の関係を図7，図8に示す。

図7は  $T_s=0.145$  の例で， $u_j$  の最終値のいくつか

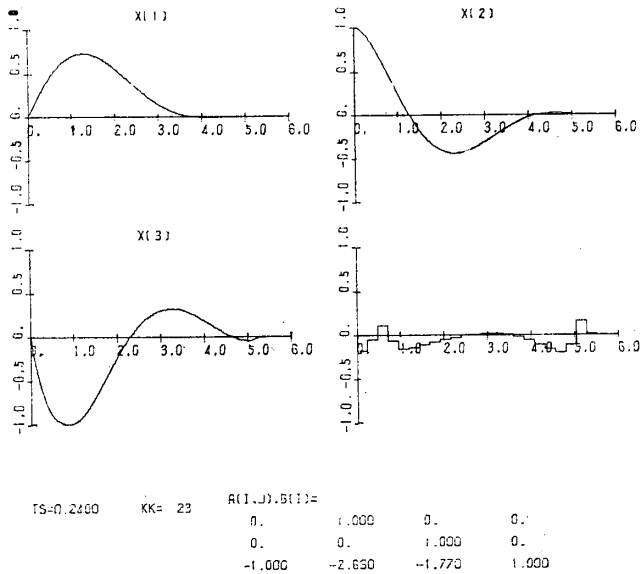


図 6 評価関数値を最小にする  $T_s$  における最適操作量, 状態

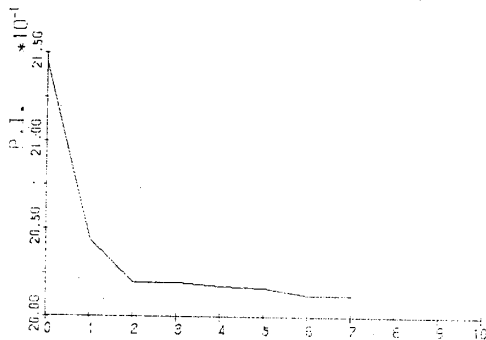


図 7  $T_s=0.145$ における収束状況

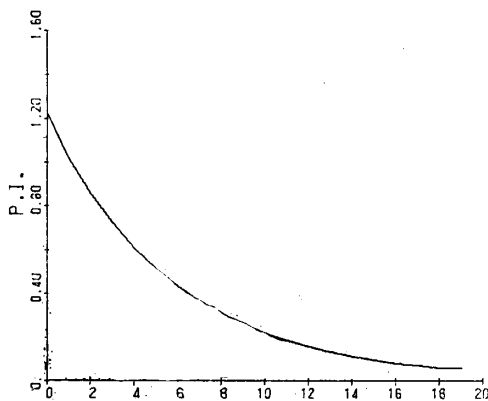


図 8  $T_s=0.24$ における収束状況

境界上の値をとって、勾配射影が行なわれている場合で収束性もかなり良いことがわかる。特に第一回目の計算で 4d) の手法が有効に働いている。また、2回目

と3回目の間でも評価関数値は殆んど変化していないが 4g) で説明されているように2回分の値の和を収束判定の基準にしているため更に計算は進められている。

1回分の値だけを収束判定の基準にとると、十分な収束が得られないことがわかる。

図8は  $T_s=0.24$  の例で、 $T_s$  にゆとりがあるため  $u_j$  の最終値が全て領域内部にあり、制限のない場合と等価になっているので、最急降下法の収束性を示しているものとしてよい。

以上のように状態量に制限のある場合に対しても、本手法は十分に適用できることがわかった。しかしながら、次のような問題点がまだ残されている。

1) ローゼンのアルゴリズムを実行可能解の探索に用いると、計算結果が実行不能となれば、線形制約条件の場合、その問題は理論的にも実行不能であることが証明できる。ところが本手法については、まだそのような証明を得ていない。本手法による計算結果が実行不能となった場合、真に実行不能といえるかどうか、或いはそうでないときの程度の問題にまで適用できるかどうかを明らかにする必要がある。

2) 図2は、 $\epsilon_x=0.001$ とした結果であるが、サンプリング区間の途中で  $x^8$  の値が所により1.0を0.005程度超えている。工学的にはこの程度の誤差は大きいとはいえないが、この量を減少させるには  $\epsilon_x$  の値を大きくとればよい。例えば、 $\epsilon_x=0.005$  とすると超過量は0.001程度、更に  $\epsilon_x=0.01$  とするとサンプリング区間内でも超過はなくなった。ただし、 $\epsilon_x$  の値は一般的には系の時定数などとの関係で決めてやるべきであろう。

## 6. おわりに

本研究を進めるにあたって、九州大学工学部高田勝教授、毛利彰助教授より多大なる御助言をいただいたことに感謝いたします。また、計算に際して卒業研究の諸君より多大なる協力をいただきましたことに謝意を表します。

なお計算及び作図には、本校計算機室 TOSBAC 3400, 九州大学大型計算機センター FACOM 230-75 及び FACOM M-190を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) 松井, 高田, 毛利: 準最適制御の一計算手法, 第17回自動制御連合講演会前刷, 昭49.
- 2) 高田, 毛利, 松井: 準最適制御の一計算手法, 九大工学集報, Vol. 49, No. 4, 昭51.
- 3) Rosen, J.B.: The Gradient Projection Method

for Nonlinear Programming, J. SIAM, Mathematics, Vol. 8, No. 1, 1960.

- 4) 毛利: 線形系の最適サンプル値制御の計算法, 計測自動制御学会論文集, Vol. 6, No. 5, 昭45.

(昭和53年9月1日受理)