

PID 制御系の ISE 値

松 井 稜 治*

On the ISE values for PID control systems

Ryoji MATSUI

Abstract

In this report, a simplified method on the calculation of the ISE values in the frequency domain for PID control systems is presented. Using the method, the ISE values on some setting methods are calculated and compared

1. ま え が き

本研究では PID 制御系の ISE (自乗制御面積) 値の周波数領域における簡単な数値計算法を示し、その方法を用いて各種の設定法についてその ISE 値を計算し比較した。

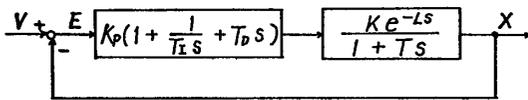


図 1. PID 制御系

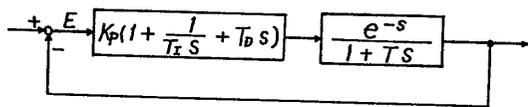


図 2. PID 制御系 (基準化)

図 1 の 1 次おくれ・むだ時間のプロセスを PID 制御するとき、 $K_p K$, T_i/L , T_d/L , T/L , L_s をそれぞれ K_p , T_i , T_d , T , s とおきかえると (時間軸を $1/L$ だけ尺度変換), 図 2 のようになる。図 2 の系に単位ステップ入力を加えたときの自乗制御面積 (ISE) は

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(j\omega) E(-j\omega) d\omega \quad (1)$$

で表される。このとき K_p , K_p/T_i , $K_p T_d$ をそれぞれ K , I , D とおきかえると次式を得る。

$$E(i\omega) E(-j\omega) = (T^2\omega^2 + 1) / f_D(\omega) \quad (2)$$

ただし,

$$f_D(\omega) = (T^2 + D^2 + 2TD \cos \omega) \omega^4 + 2\omega^3 (D - KT) \sin \omega + \{ (1 + K^2 - 2ID) + 2(K - TI) \cos \omega \} \omega^2 - 2I\omega \sin \omega + I^2$$

ISE 値は(2)式を(1)式に代入することにより求めることができる。

2. ISE 値の数値計算法

a. 高周波部を近似的に求める方法

(1) 式の積分は積分区間が半無限であるので数値積分を行なうのは困難である。そこで、 $\omega \gg 1$ では、被積分関数は分母、分子共 ω の最高次のみをとり出すことにすれば、次のような近似が可能となる。

$$E(i\omega) E(-i\omega) = F(\omega) / \omega^2 \quad (3)$$

ここで

$$F(\omega) = T^2 / (T^2 + D^2 + 2TD \cos \omega)$$

今、 $\omega_N = 2\pi x_N \gg 1$ とすると

$$\int_{\omega_N}^{\infty} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} d\omega = \int_{2\pi x_N}^{2\pi(x_N+1)} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} d\omega + \int_{2\pi(x_N+1)}^{2\pi(x_N+2)} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} d\omega + \dots \quad (4)$$

$2\pi(x_N+k) < \omega < 2\pi(x_N+k+1)$ では ($k=0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{1}{\omega^2} \cong \frac{1}{2\pi(x_N+k)} \frac{1}{2\pi(x_N+k+1)} (= \text{const}) \quad (5)$$

と近似すると

$$\int_{\omega_N}^{\infty} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} d\omega \cong \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{x_N} - \frac{1}{x_N+1} \right) + \left(\frac{1}{x_N+1} - \frac{1}{x_N+2} \right) + \dots \right\} \int_0^{2\pi} F(\omega) d\omega$$

* 宇部工業高等専門学校機械工学科

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{x_N} \int_0^{2\pi} F(\omega) d\omega \quad (6)$$

となる。また

$$\int_0^{2\pi} F(\omega) d\omega = \frac{2\pi T^2}{|T^2 - D^2|} \quad (7)$$

であるので

$$\int_{\omega_N}^{\infty} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} d\omega \cong \frac{1}{\omega_N} \cdot \frac{T^2}{|T^2 - D^2|} \quad (8)$$

となる。故に

$$\int_0^{\infty} E(j\omega) E(-j\omega) d\omega \cong \int_0^{\omega_N} E(j\omega) E(-j\omega) d\omega + \frac{1}{\omega_N} \cdot \frac{T^2}{|T^2 - D^2|} \quad (9)$$

と近似することができる。

ここでは、区間 $[0, \omega_N]$ をいくつかの区間に分割して、各区間では Romberg 積分 (シンプソン則、又は台形則) を用いて計算した。その流れ図を図3に示す。

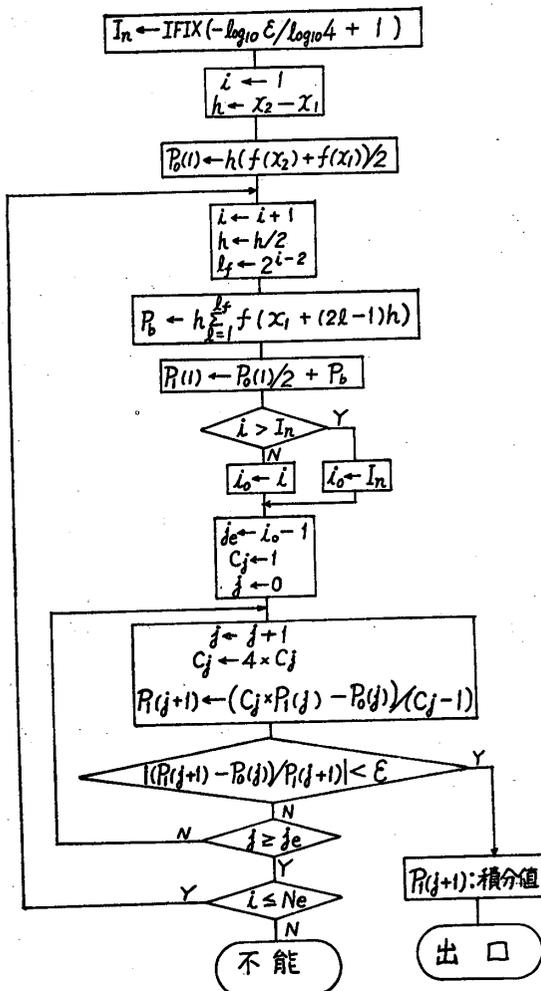


図3. Romberg 積分 (台形則) 流れ図

b. Double exponential (D. E) 変換を用いた数値積分^{3),4)}

積分区間の端点で特異性があつたり、積分区間が無限、半無限であるような場合の数値積分については D. E 変換を用いれば効果的である場合が多い。

積分区間が半無限 $(0, \infty)$ の場合には次の変換

$$\omega = \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) \quad (10)$$

を被積分関数に施すと(1)式の右辺は次のようになる。

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cosh u \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) du \quad (11)$$

ただし、

$$f(\omega) = E(j\omega) E(-j\omega)$$

(11)式の積分は台形則を用いて数値積分されるが、ここでは戸田・小野⁴⁾によるプログラムに若干の修正 (積分区間、Romberg 積分併用など) を加えて実際の計算を行なった。

3. 極値探索法

いろいろのパラメータ設定法に対する ISE 値を比較するとき、基準として ISE 極小値を用いた。極値探索では、評価関数値の計算は計算時間の短い (後述) a. の方法を用いて、探索法としては共役方向法 (Zangwill の方法)⁵⁾ を採用した。この探索法は勾配の計算が不要であり、収束性も良いと思われるからである。この流れ図を図4に示す。図で P_0 は初期点座標、 ξ は探索方向で ξ_n は予め与えられており、 Cr ($r=1, 2, \dots, n$) は座標軸方向ベクトルである。なお線形探索は2次式近似による方法⁶⁾を用いた。

4. 計算結果及び考察

ここでは ① Ziegler-Nichols の限界感度法、② Ziegler-Nichols の過渡応答法、③ Ching-Hrones-Reswick の方法、④高田らの方法⁷⁾ (制御面積最小)、⑤理想調節器近似の方法、⑥ ISE 最適の各設定法によって決定される PID パラメータについて $T=0.333, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ に対して a. の方法を用いて ($\omega_N = 350\pi$) ISE の値を調べた。その結果を表1~表5に示す。極値の近傍では PID パラメータ 10^{-3} の変化に対して ISE は 10^{-6} 程度しか変化しないので ISE 値は 10^{-6} 程度の精度で計算する必要があつた。なお a. の方法で計算するとき要求される精度に応じて積分区間の分割のやり方や ω_N の値を変えてやらなければならない。表に示されているように、いくつかのパラメータについては

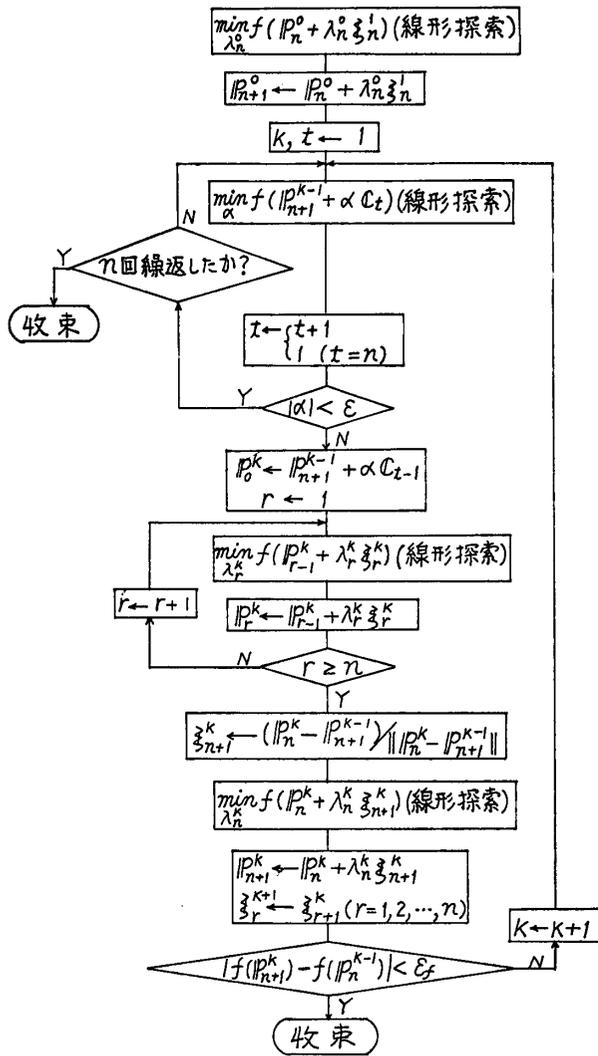


図 4. Zangwill 法流れ図

表 1 T=0.333

	K _P	T _I	T _D	ISE(a)	ISE(b)
①	0.774	1.282	0.321	1.190029	
②	0.4	2.0	0.5	2.344793	
③	0.316	0.450	0.47	1.263095	
④	0.625	0.791	8.22	1.100027	
⑤	0.693	0.693	0.303	1.061617	1.061618
⑥	0.673	0.715	0.331	1.056155	

b. の方法でも計算を行なって、a. による結果と比較した。a. と b. とでは数値的にはほぼ等しい結果（いずれも誤差は 10^{-6} 以下である）を得たのでこれらの数値はほぼ信頼できるものと思われる。一方、計算時間につ

表 2 T=0.5

	K _P	T _I	T _D	ISF(a)	ISE(b)
①	0.914	1.366	0.341	1.133444	
②	0.6	2.0	0.5	1.656268	
③	0.475	0.675	0.47	1.202905	
④	0.75	0.95	0.275	1.099670	
⑤	0.86	0.86	0.357	1.065384	1.065383
⑥	0.788	0.819	0.398	1.058926	1.058925

表 3 T=1.0

	K _P	T _I	T _D	ISE(a)	ISE(b)
①	1.352	1.555	0.389	1.090187	1.090187
②	1.2	2.0	0.5	1.158960	
③	0.95	1.35	0.47	1.130055	
④	1.125	1.425	0.367	1.098972	
⑤	1.3	1.33	0.455	1.080945	
⑥	1.165	1.192	0.483	1.068602	

表 4 T=2.0

	K _P	T _I	T _D	ISE(a)	ISE(b)
①	2.3	1.7	0.43	1.132814	
②	2.4	2.0	0.5	1.137706	
③	1.9	2.7	0.47	1.102030	
④	1.875	2.375	0.44	1.099751	
⑤	2.28	2.28	0.476	1.099774	
⑥	1.953	1.996	0.535	1.076983	1.076983

表 5 T=5.0

	K _P	T _I	T _D	ISE(a)	ISE(b)
①	5.17	1.835	0.459	1.303965	
②	6.0	2.0	0.5	1.347550	
③	4.75	6.75	0.47	1.100729	
④	4.125	5.225	0.5	1.100737	
⑤	5.45	5.45	0.61	1.252417	
⑥	4.358	4.449	0.571	1.083255	1.083255

いては a. では1~2分 (TOS BAC-3400) に対して b. では45分~90分 (TOS BAC-3400, FACOM 230-75では10~20秒:倍精度計算) となり, a. の方が大幅に計算時間が節約できることがわかった。そのため極値探索では a. の方法を用いて ISE 値を計算した。極値探索に要する計算時間は90~260秒 (FACOM230-75) であった。

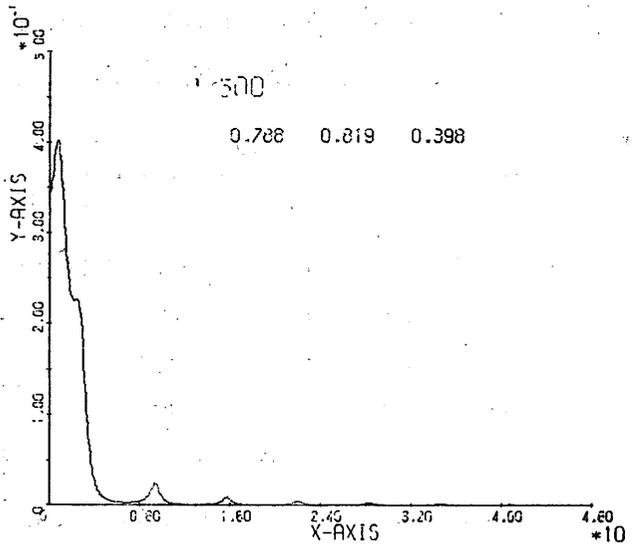


図5. 被積分関数(1)

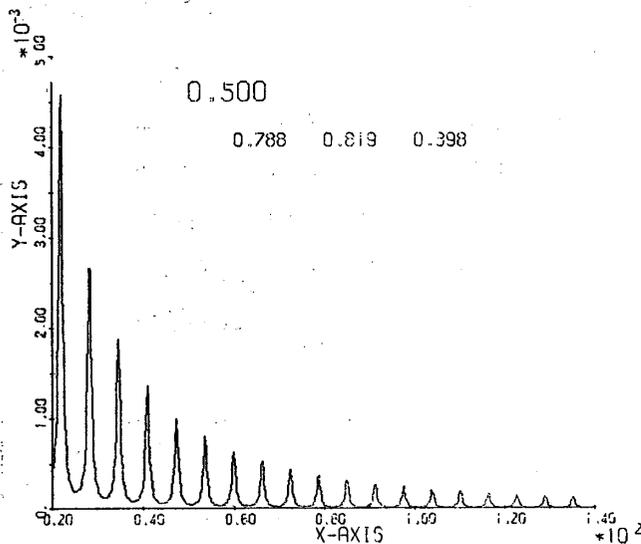


図6. 被積分関数(2)

なお(1)式の被積分関数は図5, 6のように周期性に似た成分をもち数値計算はかなり困難であり, シンプソン則による Romberg 積分の場合は所要の精度で計算できたが, 台形則による場合は 10^{-7} の精度で計算して他の方法による結果と 10^{-6} までの一致をみた。このような関

数を数値積分する場合, 一方法のみで計算した結果は必ずしも信頼性があるとは限らず, いくつかの方法で計算して確かめておく必要がある。

表1~5の結果を比較すると, ISE 基準の意味で $T/L > 1$ では③又は④が最良であり, $T/L \leq 1$ では⑤が非常に良い成績(最適値に近い)をあげているが $T/L \gg 1$ ではかなり悪化している。 T/L のすべての範囲で比較的良い成績を与えるのは④だけである。プロセス制御などで広く用いられている Ziegler-Nichols の方法は $T/L = 1$ の近傍ではある程度の成績を与えるが, どちらかといえば①の限界感度法の方がより良い成績をあげるといえる。

7. おわりに

本研究では制御系を連続系として取扱ってきたが, 現在ではマイクロコンピュータ等の発達によりプロセス制御系にもどんどん電算機がとり入れられつつあり, これを考慮すれば本問題もサンプル値系としての取扱いを進めて行く必要があるものと思われる。

なお本研究を進めるにあたって, D, E変換による数値積分については昭和51年度高専情報処理担当者講習会において, 戸田英雄, 小野令美両先生に御教示頂き, 又九大工学部高田勝教授, 久留米高専森田保房教授より多大の御助言を頂いたことに感謝します。

本計算には, 本校電算機室 TOS BAC-3400及び九大大型計算機センター FACOM 230-75を使用した。計算にあたり電算機室山岡技官より多大の御協力を頂きましたことに謝意を表します。

参考文献

- 1) 計測自動制御学会編: 自動制御便覧, コロナ社
- 2) 情報処理学会編: 情報処理ハンドブック, オーム社
- 3) 森正武: 曲線と曲面, 教育出版
- 4) 戸田英雄, 小野令美: 数値解析(1), 昭51年度高専情報処理担当者講習会テキスト
- 5) Zangwill, W. I.: Minimizing a function without calculating derivatives, *Compt. J.*, Vol 10, pp 263/296, 1967
- 6) Powell, M. J. D.: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Compt. J.*, Vol 7, pp155/162, 1964
- 7) 高田ほか: 長いむだ時間をもつプロセス制御系の最適調整について, 九大工学集報, Vol 39 No 2, pp 322/328, 昭41

(昭和52年9月10日受理)