

テレビジョン信号のガウスマルコフモデルと DPCM 系への応用

—第2報 多段平滑化問題の応用—

藤 本 勉*

Gauss-Markov Models of Random Television Signals and, Its
Applications to Differential Pulse Code Modulation Systems

—No.2 Application on of Multi-Stage Smoothing Problems—

Tsutomu FUJIMOTO

Abstract

Continued from the previous report, in this paper the quantizing noise reduction problem is discussed in the differential pulse code modulation system.

First, multi-stage-smoothing theory is developed and is applied to the decoder design of the predicted quantizing system for the transmission of television signals.

As the results, multi-stage-smoothing is very effective, specially when the relative power of quantizing noise is 0.1—1.0, and it can be avoided the decoder become more complicated.

1. ま え が き

本研究はテレビジョン信号のように冗長度の多い信号を、その冗長度を除去して帯域圧縮して伝送する方法に関するものである。

前報¹⁾においては、テレビ信号のガウスマルコフ・モデルを作り、そのモデルに対して、局部復調器に *Kalman* フィルターを採用した予測量子化系を設計し、さらに受信側においては、復調出力に含まれる量子化雑音を低減させるために、復調出力をさらに、濾波または平滑化することを試み、効果のあることを確めた。

本報では、平滑化の効果をさらに高めるために、より複雑な多段平滑化を行なってみるものである、すなわち、前報において用いた平滑器はいわゆる1段平滑といわれるもので、現在までの受信情報を基にして、1サンプル時点前の信号を推定するものであるのに対し、本報告でいう所の多段平滑器は、数サンプル時点過去の信号を推定しようとするものであり、それだけに、雑音低減

効果の著しいことが期待できる。

以下、多段平滑化理論を展開し、前報で求めたモデルについて設計例を示し、その効果について論じる。

2 多段平滑過程^{4),5)}

先ず、多段平滑過程について論じる。前報と同じくテレビジョン信号をガウスマルコフ・モデルで表わす。

すなわち

$$W(k+1) = \Phi W(k) + \eta(k) \dots\dots\dots (2.1)$$

$$E[\eta(k)] = 0$$

$$E[\eta(k)\eta(j)] = Q\delta_{kj}$$

$$E\{W(0)\} = 0$$

$$E\{W(0)\}^2 = \phi(0)$$

$$E\{W(k)\eta(j)\} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (2.1) \\ (2.2) \end{array} \right\} \dots (2.2)$$

ただし、 k はサンプル時点で、 $k=0, 1, 2, \dots$, Φ はテレビ信号の自己相関関数から求まる推移係数、 η はモデルの入力ガウス雑音である。

* 宇部工業高等専門学校電気工学科

予測量子化系における局部復調器の入力は

$$Z(k+1) = W(k+1) + \delta(k+1) \quad \dots\dots (2.3)$$

$$E[\delta(k+1)\delta(j+1)] = R\delta_{kj} \quad \dots\dots (2.4)$$

ここで δ は量子化雑音であり，入力信号と独立なガウス雑音である。

以上のシステムにおいて多段平滑値は次の式で定義される。

ただし

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1 | k+1+N) &\triangleq E[W(k+1) | \{Z(k+1+N)\}] \\ \tilde{Z}(i | i-1) &\triangleq Z(i) - E[Z(i) | \{Z(i-1)\}] \\ &\dots\dots (2.5) \end{aligned}$$

すなわち， \tilde{Z} は局部復調器の入力のうち，次の推定値を生成するに必要な情報成分で，測定残差 (measure mentresidual) と呼ぶものである。これを用いて

$$\begin{aligned} E[W(k+1) | \{Z(k+1+N)\}] &= E[W(k+1) | \{Z(k+N)\}, \tilde{Z}(k+1+N | k+N)] \\ &= E[W(k+1) | \{Z(k+N)\} + \\ &\quad + E[W(k+1) | \tilde{Z}(k+1+N | k+N)] \\ &= \dots\dots \\ &= E[W(k+1) | \{Z(k+1)\}] \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^{k+1+N} E[W(k+1) | \tilde{Z}(i | i-1)] \\ &= \hat{W}(k+1 | k+1) \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^{k+1+N} \frac{E[W(k+1)\tilde{Z}(i | i-1)]}{E[\{\tilde{Z}(i | i-1)\}^2]} \tilde{Z}(i | i-1) \\ &\dots\dots (2.6) \end{aligned}$$

(2.5), (2.6) 式より

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(i | i-1) &= Z(i) - E[Z(i) | \{Z(i-1)\}] \\ &= W(i) + \delta(i) - E[W(i) + \delta(i) | \{Z(i-1)\}] \\ &= W(i) + \delta(i) - \hat{W}(i | i-1) \\ &= \tilde{W}(i | i-1) + \delta(i) \quad \dots\dots (2.7) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} E[\{\tilde{Z}(i | i-1)\}^2] &= E[\{\tilde{W}(i | i-1) + \delta(i)\}^2] \\ &= E[\{\tilde{W}(i | i-1)\}^2] \\ &\quad + E[\{\delta(i)\}^2] \\ &= P(i | i-1) + R \quad \dots\dots (2.8) \end{aligned}$$

前報と同じく， P は推定誤差分散で

$$P(k | j) = E[\{\tilde{W}(k | j)\}^2]$$

また

$$\begin{aligned} E[W(k+1)\tilde{Z}(k+2 | k+1)] &= E[W(k+1)\{\tilde{W}(k+2 | k+1) + \delta(k+2)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E[W(k+1)\tilde{W}(k+2-k+1)] \\ &= E[\{W(k+1)\{\phi\tilde{W}(k+1 | k+1) + \eta(k+1)\}\}] \\ &= P(k+1 | k+1)\phi \quad \dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

であるから (2.8), (2.9) 式より

$$\begin{aligned} &\frac{E[W(k+1)\tilde{Z}(k+2 | k+1)]}{E[\{\tilde{Z}(k+2 | k+1)\}^2]} \\ &= \frac{P(k+1 | k+1)}{P(k+2 | k+1) + R} \\ &= \frac{P(k+1 | k+1)\phi}{P(k+2 | k+1)} G(k+2) \\ &\triangleq A(k+1)C(k+2) \quad \dots\dots 2.10) \end{aligned}$$

上式の誘導において，Kalman フィルターより

$$G(k+2) = \frac{P(k+2 | k+1)}{P(k+2 | k+1) + R} \quad \dots\dots (2.11)$$

を用いた。次に (2.9) 式と同様にして

$$\begin{aligned} E[W(k+1)\tilde{Z}(k+3 | k+2)] &= E[W(k+1)\tilde{W}(k+3 | k+2)] \\ &= E[W(k+1)\tilde{W}(k+2 | k+2)]\phi \dots (2.12) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{W}(k+2 | k+2) &= \tilde{W}(k+2) - \tilde{W}(k+2 | k+2) \\ &= W(k+2) - [\phi\hat{W}(k+1 | k+1) \\ &\quad + G(k+2)\{Z(k+2) \\ &\quad - \phi\hat{W}(k+1 | k+1)\}] \\ &= \{1 - G(k+2)\}W(k+2) \\ &\quad - \{1 - G(k+2)\}\hat{W}(k+2 | k+1) \\ &\quad - G(k+2)\delta(k+2) \\ &= \{1 - G(k+2)\}\tilde{W}(k+2 | k+1) \\ &\quad - G(k+2)\delta(k+2) \quad \dots\dots (2.13) \end{aligned}$$

故に，(2.13) \rightarrow (2.12), (2.12) \rightarrow (2.10) より

$$\begin{aligned} &\frac{E[W(k+1)\tilde{Z}(k+3 | k+2)]}{E[\{\tilde{Z}(k+3 | k+2)\}^2]} \\ &= \frac{E[W(k+1)\{[1 - G(k+2)]\tilde{W}(k+2 | k+1) \\ &\quad - G(k+2)\delta(k+2)\}]\phi}{P(k+3 | k+2) + R} \\ &= \frac{E[\tilde{W}(k+1 | k+1)\{1 - G(k+2)\} \\ &\quad \{ \phi\tilde{W}(k+1 | k+1) + \eta(k+1) \}]\phi}{P(k+3 | k+2) + R} \\ &= \frac{P(k+1 | k+1)\{1 - G(k+2)\}\phi^2}{P(k+3 | k+2) + R} \quad \dots\dots (2.14) \end{aligned}$$

上式の誘導において

$$\begin{aligned} E[W(k+1)\delta(k+2)] &= 0 \\ E[\tilde{W}(k+1 | k+1)\eta(k+1)] &= 0 \end{aligned}$$

を用いた。(2.11)式を用いて、(2.14)式は

$$\begin{aligned} &= \frac{P(k+1|k+1)\phi\{1-G(k+2)\}G(k+3)}{P(k+3|k+2)} \\ &= \frac{P(k+1|k+1)\phi}{P(k+2|k+1)} \cdot \frac{P(k+2|k+2)\phi}{P(k+3|k+2)} \cdot G(k+3) \\ &= A(k+1)A(k+2)G(k+3) \quad \dots\dots (2.15) \end{aligned}$$

上式で、Kalman フィルターより

$$\{1-G(k+2)\} = \frac{P(k+2|k+2)}{P(k+2|k+1)} \quad \dots\dots (2.16)$$

を用いた。(2.15)式と同様にして、一般に

$$\begin{aligned} &\frac{E\{W(k+1)\tilde{Z}(i|i-1)\}}{E\{\tilde{Z}(i|i-1)^2\}} \\ &= A(k+1)A(k+2)\dots A(i-1)G(i) \\ &\triangleq M(k+1|i) \quad \dots\dots (2.17) \end{aligned}$$

と表わすことができる。以上の試論により(2.17)式を(2.6)式に代入して、一般にN段平滑値は次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1|k+1+N) &= \hat{W}(k+1|k+1) \\ &+ \sum_{i=k+2}^{k+1+N} M(k+1|i)\tilde{Z}(i|i-1) \\ &= \hat{W}(k+1|k+1) + M(k+1|k+2)\tilde{Z}(k+2|k+1) \\ &+ \sum_{i=k+3}^{k+1+N} M(k+1|i)\tilde{Z}(i|i-1) \quad \dots\dots (2.18) \\ &= \hat{W}(k+1|k+2) + \sum_{i=k+3}^{k+1+N} M(k+1|i)\tilde{Z}(i|i-1) \\ &\quad \dots\dots (2.19) \\ &= \dots\dots \\ &= \hat{W}(k+1|k+N) + \\ &\quad M(k+1|k+1+N)\tilde{Z}(k+1+N|k+N) \\ &\quad \dots\dots (2.20) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} M(k+1|k+1+N) &= \prod_{j=k+1}^{k+N} A(j)G(k+1+N) \\ &= \prod_{j=k+1}^{k+N} \frac{P(j|j)}{P(j+1|j)}G(k+1+N) \\ &\quad \dots\dots (2.21) \end{aligned}$$

(2.20)式においては、 $\hat{W}(k+1|k+N)$ がN-1段平滑値であるので、別に求めなければならず、複雑化する。そのため、(2.20)式を次のようにして変形する。

まず、前報(8)式より

$$\begin{aligned} \hat{W}(k|k+1) &= \hat{W}(k|k) + A(k)[\hat{W}(k+1|k+1) \\ &\quad - \hat{W}(k+1|k)] \quad \dots\dots (2.22) \end{aligned}$$

(2.20)式より、 $k+1 \rightarrow k$, $N=1$ とし、(2.22)

式を用いて

$$\begin{aligned} \hat{W}(k|k+2) &= \hat{W}(k|k+1) \\ &\quad + A(k)A(k+1)G(k+2)\tilde{Z}(k+2|k+1) \\ &= \hat{W}(k|k) + A(k)[\hat{W}(k+1|k+1) \\ &\quad - \hat{W}(k+1|k)] \\ &\quad + A(k)A(k+1)[\hat{W}(k+2|k+2) \\ &\quad - \hat{W}(k+2|k+1)] \\ &= \hat{W}(k|k) + A(k)[\hat{W}(k+1|k+2) \\ &\quad - \hat{W}(k+1|k)] \end{aligned}$$

さらに、(2.20)式より $k+1 \rightarrow k$, $N=2$ として、(2.23)式を用いて

$$\begin{aligned} \hat{W}(k|k+3) &= \hat{W}(k|k+2) \\ &\quad + A(k)A(k+1)A(k+2)G(k+3)\tilde{Z}(k+3|k+2) \\ &= \hat{W}(k|k) + A(k)[\hat{W}(k+1|k+2) \\ &\quad - \hat{W}(k+1|k)] \\ &\quad + A(k)[\hat{W}(k+1|k+3) - \hat{W}(k+1|k+2)] \\ &= \hat{W}(k|k) + A(k)[\hat{W}(k+1|k+3) \\ &\quad - \hat{W}(k+1|k)] \quad \dots\dots (2.24) \end{aligned}$$

以下同様にして、(2.20)式を用いて

$$\begin{aligned} \hat{W}(k|k+N) &= \hat{W}(k|k) \\ &\quad + A(k)[\hat{W}(k+1|k+N) - \hat{W}(k+1|k)] \\ &\quad \dots\dots (2.25) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1|k+N) &= \frac{1}{A(k)}[\hat{W}(k|k+N) \\ &\quad - \hat{W}(k|k)] + \phi \hat{W}(k|k) \quad \dots\dots (2.26) \end{aligned}$$

上式の両辺に $\phi \hat{W}(k|k+N)$ を加えると

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1|k+N) &= \frac{1}{A(k)}[\hat{W}(k|k+N) \\ &\quad - \hat{W}(k|k)] + \phi \hat{W}(k|k) - \phi \hat{W}(k|k+N) \\ &\quad + \phi \hat{W}(k|k+N) \\ &= \left[\frac{1}{A(k)} - \phi \right] [\hat{W}(k|k+N) - \hat{W}(k|k)] \\ &\quad + \phi \hat{W}(k|k+N) \quad \dots\dots (2.27) \end{aligned}$$

したがって(2.27) \rightarrow (2.20)に代入して、N段平滑値は次式で求まる。

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1|k+1+N) &= \phi \hat{W}(k|k+N) \\ &\quad + \prod_{j=k+1}^{k+N} A(j)G(k+1+N)\tilde{Z}(k+1+N|k+N) \\ &\quad + \left[\frac{1}{A(k)} - \phi \right] [\hat{W}(k|k+N) - \hat{W}(k|k)] \\ &\quad \dots\dots (2.28) \end{aligned}$$

上式で、 $\hat{W}(k|k+N)$ は1段前の出力を遅延回路に通すことで得られ、 $\hat{W}(k|k)$ は Kalman フィルターの出力として得られる。また A, G はゲイン係数は後述のように信号値とは関係なく、オフラインで計算できる。

よって (2.28) 式の N 段平滑器は簡単に作る事ができる。この平滑器は、サンプル時点が 0 ~ N まで進む間は停止しており、N+1 段目になって初期値 $\hat{W}(0|N)$ を基にして動き始める。この初期値 $\hat{W}(0|N)$ は次のようにして求まる。すなわち、 $j \geq k$ について、(2.20) 式より、 $k=0$ として

$$\begin{aligned} \hat{W}(0|j) &= \hat{W}(0|j-1) \\ &+ \prod_{j=0}^{j-1} A(j) \{W(j|j) - \hat{W}(j|j-1)\} \\ &\dots \quad (2.29) \end{aligned}$$

この初期値計管の初期値は $\hat{W}(0|0)$ で、前報と同じく値は 1 である。すなわち、 j が 0 ~ N の間、 $\hat{W}(0|0)$, $\hat{W}(0|1)$, ..., $\hat{W}(0|N)$ として進行する。

3. 多段平滑誤差^{4),5)}

次に多段平滑を行なった場合の誤差について論じる。

(2.19) 式に Kalman フィルターの結果、前報(54) 式

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1+N|k+1+N) - \hat{W}(k+1+N|k+N) \\ = G(k+1+N) \tilde{Z}(k+1+N|k+N) \end{aligned}$$

を代入して

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1|k+1+N) - B(k+1+N) \\ \hat{W}(k+1+N|k+1+N) \\ = \hat{W}(k+1|k+N) - B(k+1+N) \\ \hat{W}(k+1+N|k+N) \quad \dots \quad (3.1) \end{aligned}$$

ここで、 $B(k+1+N) = \prod_{j=k+1}^{k+N} A(j)$ とおいた。

(3.1) 式の両辺に $W(k+1)$ を加えると

$$\begin{aligned} \tilde{W}(k+1|k+1+N) + B(k+1+N) \hat{W}(k+1+N) \\ = \tilde{W}(k+1|k+N) \\ + B(k+1+N) \hat{W}(k+1+N|k+N) \end{aligned}$$

両辺を自束し平均を取って分散を求めると

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1+N) \\ + \{B(k+1+N)\}^2 E[\{\hat{W}(k+1+N|k+1+N)\}^2] \\ = P(k+1|k+N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \{B(k+1+N)\}^2 E[\{\hat{W}(k+1+N|k+N)\}^2] \\ \dots \quad (3.2) \end{aligned}$$

上式において、前報 (91), (92) 式より、全ての k, j について

$$E[\tilde{W}(k|j) \hat{W}(k|j)] = 0$$

を用いた。よって

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1+N) &= P(k+1|k+N) \\ &+ \{B(k+1+N)\}^2 \{E[\{\hat{W}(k+1+N|k+N)\}^2] \\ &- E[\{\hat{W}(k+1+N|k+1+N)\}^2]\} \dots \quad (3.3) \end{aligned}$$

ここで、前報 (94) 式と同様にして、(3.3) 右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} E[\{\hat{W}(k+1+N|k+N)\}^2] \\ - E[\{\hat{W}(k+1+N|k+1+N)\}^2] \\ = P(k+1+N|k+1+N) - P(k+1+N|k+N) \\ \dots \quad (3.4) \end{aligned}$$

さらに前報 (49) 式

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) &= \{1-G(k+1)\} P(k+1|k) \\ \text{より } k+1 \rightarrow k+N \text{ として、(3.4) 式は} \\ P(k+1+N|k+1+N) - P(k+1+N|k+N) \\ = -G(k+1+N) P(k+1+N|k+N) \\ \dots \quad (3.5) \end{aligned}$$

よって (3.3), (3.4), (3.5) 式より

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1+N) &= P(k+1|k+N) \\ &- \{B(k+1+N)\}^2 G(k+1+N) P(k+1+N|k+N) \\ \dots \quad (3.6) \end{aligned}$$

上式は N 段平滑誤差分散を求める式である。同式において、 $P(k+1+N|k+N)$ は既に前報で求めた予測誤差分散であり、B, G はゲイン係数であるので後述の如くして求めることができる。ところが $P(k+1|k+N)$ は N-1 段平滑誤差分散であるので、別に求めねばならず不便である。よってこの項を異った形で表わすことにする。

それには (2.25) 式を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{W}(k+1|k+1+N) &= W(k+1) \\ &- \hat{W}(k+1|k+1+N) \\ &= W(k+1) - \hat{W}(k+1|k+1) \\ &- A(k+1) \{\hat{W}(k+2|k+1+N) \\ &- \hat{W}(k+2|k+1)\} \\ &= \tilde{W}(k+1|k+1) \\ &- A(k+1) \{\hat{W}(k+2|k+1+N) \\ &- \hat{W}(k+2|k+1)\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \tilde{W}(k+1 | k+1+N) + A(k+1)\hat{W}(k+2 | k+1+N) \\ &= \tilde{W}(k+1 | k+1) + A(k+1)\hat{W}(k+2 | k+1) \end{aligned} \quad \dots (3.7)$$

(3.2) 式の誘導と同じく、両辺を自乗して平均をとり分散を求めると

$$\begin{aligned} P(k+1 | k+1+N) &= P(k+1 | k+1) \\ &+ \{A(k+1)\}^2 \{E[\{\hat{W}(k+2 | k+1)\}^2] \\ &- E[\{\hat{W}(k+2 | k+1+N)\}^2]\} \quad \dots (3.8) \end{aligned}$$

ここで、(3.4) 式と同じく

$$\begin{aligned} E[\{\hat{W}(k+2 | k+1)\}^2] &= P(k+2) - P(k+2 | k+1) \\ E[\{\hat{W}(k+2 | k+1+N)\}^2] &= P(k+2) - P(k+2 | k+1+N) \end{aligned}$$

を代入して、(3.8) 式は

$$\begin{aligned} P(k+1 | k+1+N) &= P(k+1 | k+1) \\ &+ \{A(k+1)\}^2 [P(k+2 | k+1+N) \\ &- P(k+2 | k+1)] \quad \dots (3.9) \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} P(k+2 | k+1+N) &= \frac{1}{\{A(k+1)\}^2} [P(k+1 | k+1+N) \\ &- P(k+1 | k+1)] + P(k+2 | k+1) \end{aligned} \quad \dots (3.10)$$

よって、 $k+1 \rightarrow k$ として

$$\begin{aligned} P(k+1 | k+N) &= P(k+1 | k) \\ &+ \frac{1}{\{A(k)\}^2} [P(k | k+N) - P(k | k)] \quad (3.10) \end{aligned}$$

(3.10) 式を (3.6) 式に代入して、N 段平滑誤差分散は次式で求まる。

$$\begin{aligned} P(k+1 | k+N) &= P(k+1 | k) \\ &+ \frac{1}{\{A(k)\}^2} [P(k | k+N) - P(k | k)] \\ &- \{B(k+1+N)\}^2 G(k+1+N) P(k+1+N | k+N) \end{aligned} \quad \dots (3.11)$$

上式において、 $P(k+1 | k)$ 、 $P(k+1+N | k+N)$ は予測誤差分散、 $P(k | k)$ は濾波誤差分散であるので、前報の Kalman フィルターで求められている。よって同式においては、容易に誤差分散を計算することができる。

くり返し計算の初期値は $P(0 | N)$ であり、次のようにして求める。すなわち (3.6) 式より

$$\begin{aligned} P(k+1 | j) &= P(k+1 | j-1) \\ &- \{B(j)\}^2 G(j) P(j | j-1) \end{aligned}$$

$$j = k+1, k+2, \dots \quad \dots (3.12)$$

において、 $k=0$ として、 $P(0 | 1)$ 、 $P(0 | 2)$ 、 \dots 、 $P(0 | N)$ と順次求める。

4. 計算例

例として、前報に続き、2 段平滑について論じる。

(2.28) 式において $N=2$ として

$$\begin{aligned} \hat{W}(k+1 | k+3) &= \phi \hat{W}(k | k+2) \\ &+ A(k+1)A(k+2)G(k+3)\tilde{Z}(k+3 | k+2) \\ &+ \left\{ \frac{1}{A(k)} - \phi \right\} [\hat{W}(k | k+2) - \hat{W}(k | k)] \end{aligned} \quad \dots (4.1)$$

初期値の計算は (2.29) 式より

$$\begin{aligned} \hat{W}(0 | j) &= \hat{W}(0 | k-1) \\ &+ \prod_{i=0}^{k-1} A(i) \{ \hat{W}(k | k) - \hat{W}(k | k-1) \} \quad (4.2) \\ k &= 1, 2 \end{aligned}$$

として、 $\hat{W}(0 | 2)$ を求める。ただし前報 (46) 式より $\hat{W}(0 | 0) = 0$ であり、 $\hat{W}(j | j)$ 、 $\hat{W}(j | j-1)$ は Kalman フィルターの出力である。(4.2) 式を図示すると Fig. 4.1 のようになる。その構造は Kalman フ

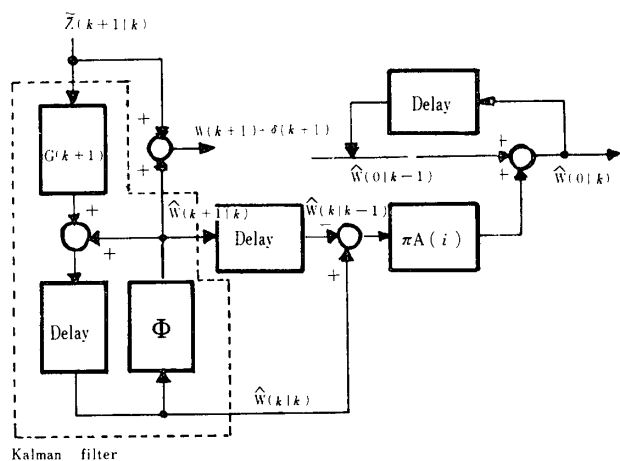


Fig. 4.1 Computation of Initial Value

ィルターに、遅延要素、ゲイン要素及び和、差回路が附加したものである。初期値として、 $k=1$ において $\hat{W}(0 | 0)$ を必要とする他は、遅延回路を通った前段の出力を使って動作する。N=2 の場合は受信信号は $\tilde{Z}(2 | 1)$ のみ初期値の計算に用いられ、その後の $\tilde{Z}(3 | 2)$ 以後は次の 2 段平滑器の入力となる。サンプル時点が進んで $k=2$ になると $\hat{W}(0 | 2)$ を初期値として、(4.1) 式の 2 段

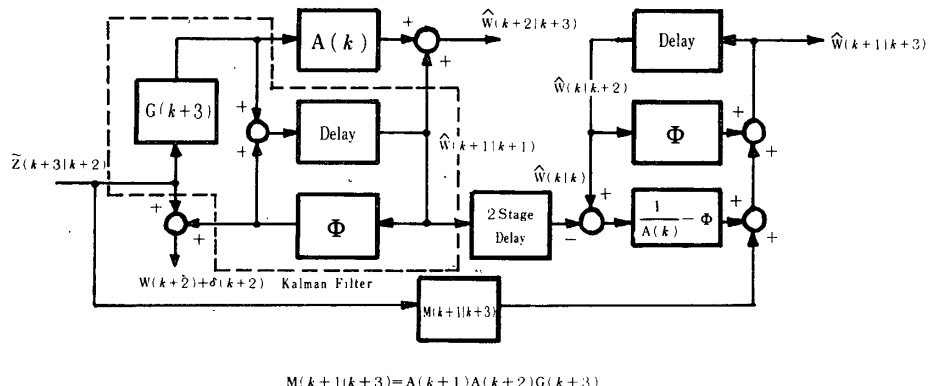


Fig. 4-2 Block Diagram of 2-stage smoothing

平滑器が動作する。

ブロック・ダイアグラムを Fig. 4. 2 に示している。その動作は、(4. 1) 式の第1項を、受信信号より作られる第2項、および1段前の出力と濾波値との差より作られる第3項で修正しながら、2段平滑値を作り出す。

次に誤差分散は(3. 11)式より

$$P(k+1|k+3) = P(k+1|k) + \frac{1}{\{A(k)\}^2} \{P(k|k+2) - P(k|k)\} - \{A(k+1)A(k+2)\}^2 G(k+3)P(k+3|k+2) \dots (4. 3)$$

このくり返し計算の初期値は $P(0|2)$ であり、(3. 12) 式より求まる。すなわち

$$P(0|2) = P(0|1) - \{A(0)A(1)\}^2 G(2) \cdot P(2|1) \dots (4. 4)$$

ここで、 $P(0|1)$ 、 $P(2|1)$ および A 、 G はいずれも、前報で求められている。これらの計算の流れ図を示すと Fig. 4. 3 のようになる。同図において、2段平滑器を設計するに必要なものは、ゲイン係数 A 、 G のみであるので、点線のように、 $P(k+1|k)$ 、 $G(k+1)$ 、 $A(k)$ 、 $P(k+1|k)$ のみの計算を、オフ・ラインで前もって計算しておけば良い。このようにして、ゲイン係数 $M(1|3)$ および $1/A(k) - \Phi$ の値を各量子化誤差分散について求めたものを Table 4. 1 に示す。(3段平滑化の場合のゲイン係数 $M(1/4)$ についても示している)

ゲイン係数について、2段平滑器の動作を考察してみる。 $1/A(k) - \Phi$ の値は量子化雑音分散 R の値が増加するに伴い、単調に減少し、 M の値は、 $R=1$ 、すなわち信号電力と雑音電力が等しくなるまでは増加している。前報で論じたように、 A の値は R が大なるにつれて増

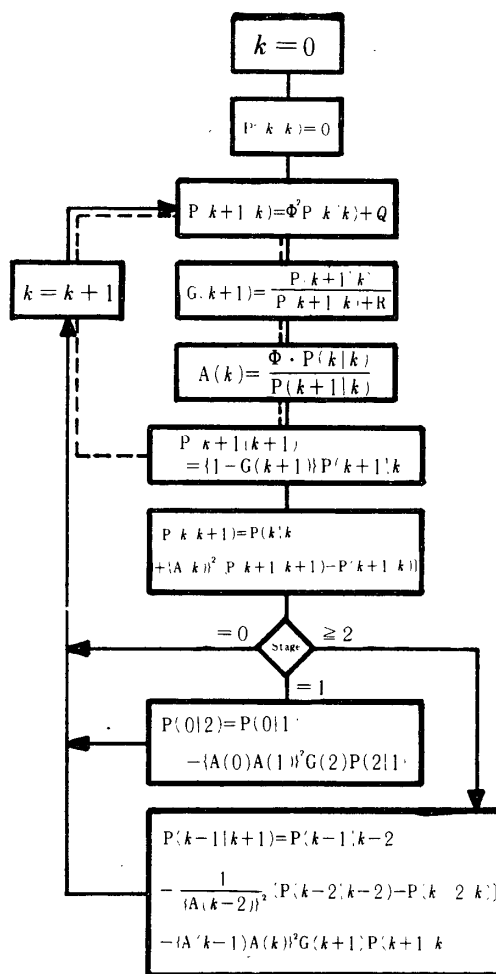


Fig. 4-3 Flow Chart of Computation

加する傾向をもっている。例えば、 R が非常に小さい時は、前報(47)式より $G(k+1) \approx 1$ 、よって Fig. 4. 3 の流れ図において、 $P(k+1|k+1) \approx 0$ となり、 $A(k)$ の値も非常に小さくなる。この時 $M \approx 0$ である。同じ時 $1/A(k) - \Phi$ は逆に非常に大きくなる。このような状

Table 4.1 Gain Coefficients

k	M(1 3)	$\frac{1}{A(k)} - \phi$	M(1 4)
R=0.001			
1.	0.000692	0.0360	0.000018
2.	0.000674	36.03	0.000017
3.	0.000674	36.99	0.000017
R=0.01			
1.	0.0326	0.0360	0.006030
2.	0.0278	3.636	0.005142
3.	0.0276	4.401	0.005112
4.	0.0276	4.432	0.005111
R=0.1			
1.	0.2084	0.0360	0.1133
2.	0.1651	0.3960	0.0859
3.	0.1405	0.6525	0.0776
4.	0.1357	0.7664	0.7510
5.	0.1343	0.8063	0.0743
6.	0.1338	0.8190	0.0709
R=1.0			
1.	0.2329	0.0360	0.1769
2.	0.1865	0.0720	0.1460
3.	0.1589	0.1055	0.1268
4.	0.1416	0.1348	0.1143
5.	0.1305	0.1588	0.1062
6.	0.1232	0.1777	0.1007
7.	0.1183	0.1920	0.0971
8.	0.1150	0.2025	0.0946
9.	0.1128	0.2100	0.0929
.....
∞ .	0.1081	0.2274	0.0894
R=10.0			
1.	0.0741	0.0360	0.0617
2.	0.0689	0.0396	0.0630
3.	0.0646	0.0430	0.0593
4.	0.0610	0.0467	0.0562
5.	0.0580	0.0495	0.0535
6.	0.0554	0.0524	0.0513
.....
∞ .	0.0387	0.0819	0.0363

$$M(k+1 | k+1+N) = \prod_{j=k+1}^{k+N} A(j)G(k+1+N)$$

R : Variance of Quantizing Noise

況下においては、2 段平滑値を生成するに受信信号はさほど重要な修正項とはならず、 $\hat{W}(k | k+2) - \hat{W}(k | k)$ すなわち同じ信号を同じ時点で推定したもの（濾波）と 2 段後の受信信号を得た後で推定したもので、どの程度の変化があったかという情報の方がより重要な要素となることを示している。

逆に R が非常に大なる場合は、 $G(k+1) \approx 0$ となり、 $A(k)$ の値は大きくなる。よって $1/A(k) - \phi$ は小さくなり、受信信号の方が有効な修正項となる。以上のことは検討した結果 3 段平滑化の場合についても言える。

Fig. 4.4, Fig. 4.5 にはそれぞれ、各分散 R に対する、2 段および 3 段平滑誤差分散 $P(k | k+2)$, $P(k | k+3)$ の値を示している。さらに Fig. 4.6 には濾波、1 段および 2 段、3 段平滑化して定常時に得られる量子化雑音低減効果を示している。すなわち本来、予測量子化系の復調出力は $W(k+1) + \delta(k+1)$ であるので誤差分散は R である。濾波、平滑化を行なった場合の誤差分散は P であるので、 P/R が、量子化誤差低減効果を示すことになる。

なお、3 段平滑化については、(4.1), (4.3) 式を導いたと同じ方法で、(2.28), (3.6) 式において $N=3$ として求めたものである。

Fig. 4.6 について、量子化雑音低減効果を考察してみると、平滑化は各平滑化共、同様の傾向を示しているが、段数が増すに従ってその効果は著しい。特に R が 0.1~1.0 の間で顕著に現われている。

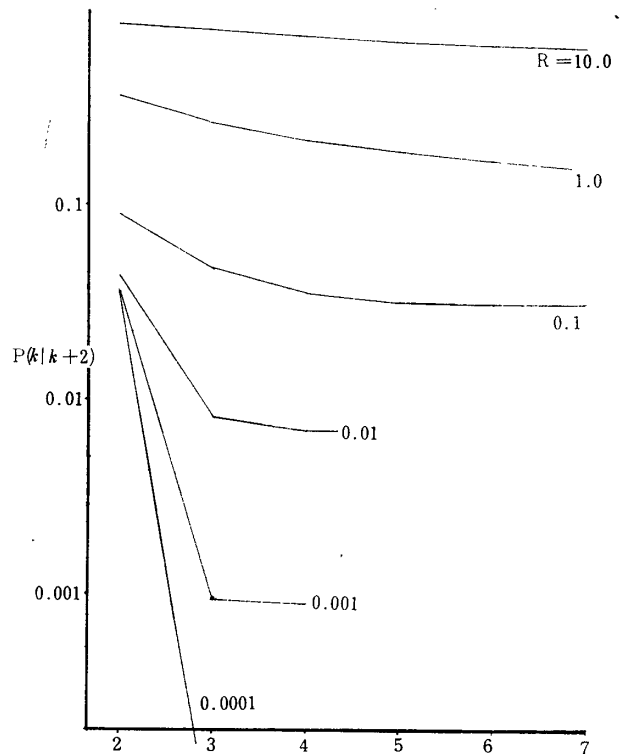


Fig. 4.4 Error Covariance 2- stage Smoothing

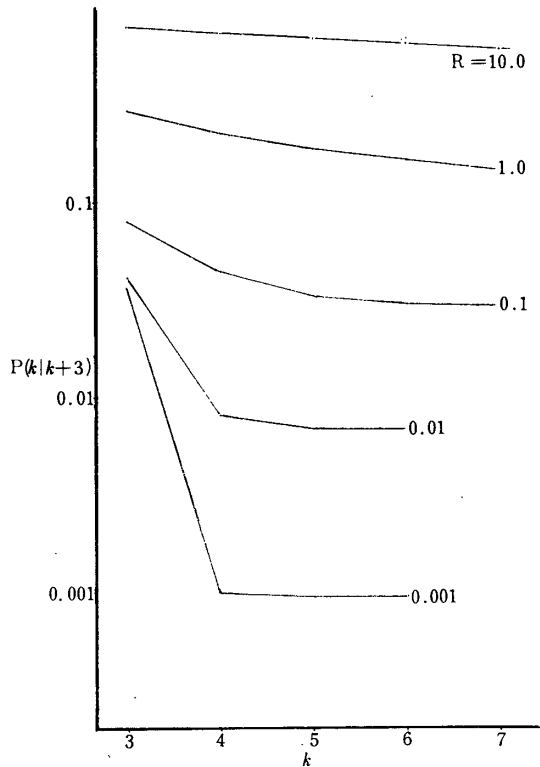


Fig. 4-5 Error Covariance 3-stage Smoothing

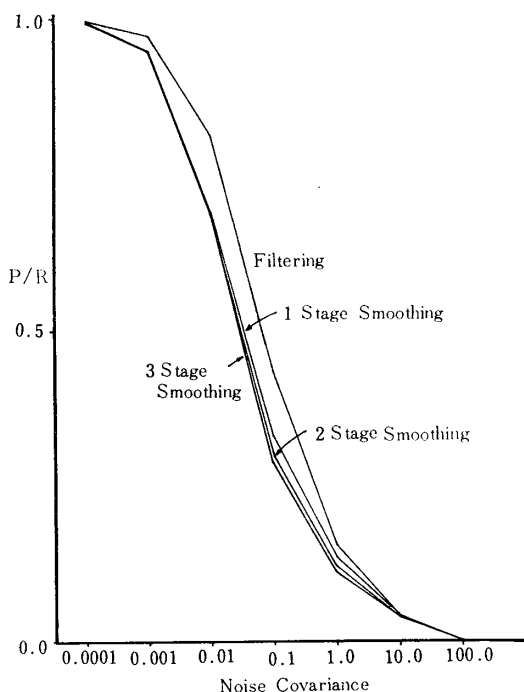


Fig. 4-6 Noise Reduction Ratio

5. む す び

以上、前報に引き続いて、多段平滑化を行なって量子化誤差分散を低減する問題について検討した。

1. その結果、濾波、1段、2段、3段平滑化となるに従って、用いる情報が多くなるので雑音低減効果は著しくなる。
2. しかし、量子化雑音の分散が0.1~1.0以外の場合は、大きい改善はない。
3. 平滑器の設計に当っては、ゲイン係数の計算を前もってオフラインで行えるので、サンプル時点の進むに従って、順次前もって求められたゲイン係数を切換えて行くだけで、最適な推定ができる。
4. 装置の複雑化については、

$$M(k+1 | k+1+N) = \prod_{i=k+1}^{k+N} A(i)G(k+1+N)$$

のみで、さほどデメリットとはならないが、

5. 初期値を別の平滑器（固定点平滑器）を用いて求める必要がある。

等が明らかとなった。最後に本報では、前報に引き続いて量子化雑音は、テレビ信号とは無関係であるという仮定を行なっている。この点について前報でも指適したように、実際には量子化雑音は量子化器入力と相関があり、したがって予測量子化系においては、 $E[W(k+1)\delta(k+1)] \neq 0$ である。この点を考慮した場合については現在検討を行なっているので、近い機会に報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) 藤本：“テレビジョン信号のガウスマルコフモデルとDPCM系への応用”，宇部高専研究報告，11, p. 13 (昭45年7月)
- 2) 藤本：“テレビ信号の予測量子化”，昭46電気四学会中国支部連大，51708
- 3) 藤本：“カルマンのフィルター理論によるテレビ信号伝送用予測量子化系の設計”，テレビ学会誌，24, 11, p. 914
- 4) J. S. Meditch: Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, Mc Graw Hill (1969)
- 5) Sage, Melsa: Estimation Theory with Applications to Communications and Control, Mc Graw Hill (1971)

(昭和47年5月1日受理)