パティンキン・マクロモデルにおける大域的安定性と正値性*

佐久間　　敬

I. 序

Olechの定理〔3〕は大域的安定性の十分条件を与えるもので，動学的経済分析にしばしば利用される。しかし，この定理は体系の解の初期値と均衡点が正象現にあっても，体系の解の経路の正値性を保証していない。Ito〔1〕はOlech の定理を修正することにより解の経路の正値性を保証する条件を示した。この小論の目的はIto の示した条件を用いて，パティンキンのマクロモデルの大域的安定性について論ずることにある。

II. モデル

パティンキンの基本的マクロモデルでは，次のような仮定がなされている。[1)]

(1)需要および供給関数に貨幣錯覚は存在しない。

(2)価格の予想弾力性は1である。

(3)分配効果は存在しない。

(4)価格および賃金率は完全に伸縮的である。

(5)名目貨幣量は外生的に与えられ，そして一定である。

以下で使用される記号の意味は次のとおりである。Y＝実質国民所得，N^d＝労働需要量，N^s＝労働供給量，C＝実質消費需要，I＝実質投資需要，B^d＝名目債券需要量，B^s＝名目債券供給量，M^d＝名目貨幣需要量，M^s＝名目

＊　本稿の作成に際し，山岸憲治（徳山大学），三野和雄（広島大学），筒井修二（九州産業大学）の諸先生より多くの御教示を得た。ここに深く感謝の意を表したい。もちろん，ありうべき誤りは全て筆者の責任である。

貨幣供給量，M_0＝総貨幣量，M^H_0＝家計の初期名目貨幣保有量，M^F_0＝企業の初期名目貨幣保有量，W＝貨幣賃金率，P＝価格水準，r＝利子率。

労働，商品，債券および貨幣に対する需要関数および供給関数は次のようにあらわされる。[2]労働に対する需要関数は

$$N^d = N^d \left(\frac{W}{P}\right)$$

であり，供給関数は

$$N^s = N^s \left(\frac{W}{P}\right)$$

である。

商品に対する需要は家計による消費支出と企業による投資支出の合計である。消費関数は

$$C = C\left(Y,\ r,\ \frac{M^H_0}{P}\right)$$

であり，投資関数は

$$I = I\left(Y,\ r,\ \frac{M^F_0}{P}\right)$$

で示される。したがって，商品に対する需要関数は

$$F\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right) \equiv C\left(Y,\ r,\ \frac{M^H_0}{P}\right) + I\left(Y,\ r,\ \frac{M^F_0}{P}\right)$$

である。商品の供給関数は

$$Y = \Phi(N)$$

で示される。

債券に対する実質需要関数は

注　1）Patinkin〔4〕PP. 199—202，邦訳書185—188ページを参照。
　　2）Patinkin〔4〕PP. 202—227，邦訳書188—210ページを参照。

$$\frac{B^d}{rP}=H\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^H}{P}\right)$$

であり，実質供給関数は

$$\frac{B^s}{rP}=V\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^F}{P}\right)$$

である。

貨幣に対する需要関数は

$$M^d=P\cdot L\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)$$

で示され，貨幣の供給関数は仮定より

$$M^s=M_0$$

である。ここでM_0は定数である。

以上より，労働，商品，債券および貨幣市場における均衡条件は次のとおりである。

$$N^d\left(\frac{W}{P}\right)=N^s\left(\frac{W}{P}\right) \qquad \text{労働市場}$$

$$F\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)=Y \qquad \text{商品市場}$$

$$H\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^H}{P}\right)=V\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^F}{P}\right) \qquad \text{債券市場}$$

$$P\cdot L\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)=M_0 \qquad \text{貨幣市場}$$

Ⅲ.　安定分析

パティンキンのマクロモデルの安定性について，完全雇用の仮定のもとで吟味してみよう。ワルラスの法則により労働市場，商品市場そして貨幣市場の３市場における動学過程について検討すればよい。単純化のために，労働市場の均衡状態が攪乱されずに維持されると仮定すれば，動学分析を商品市

場と貨幣市場の2市場に限定しうる。[3]また，ある市場の超過需要がその市場の価格のみに影響すると仮定する。[4]

パティンキンの動学体系は

$$\frac{dP}{dt}=k_1\left[F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-Y_0\right]$$

$$\frac{dr}{dt}=k_2\left[L\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-\frac{M_0}{P}\right] \qquad (PS)$$

で示される。[5]ここで k_1, k_2 は正の定数である。

体系（PS）の大域的安定性について，Ito により示された次の定理を用いて吟味しよう。[6]

定理　自励系

$$\dot{x}=g\ (x,\ y)$$
$$\dot{y}=h\ (x,\ y)$$

を考察する。ここで（x, y）は正象限 R^{+2} にあり，g と h は C^1 級とする。均衡点（x^*, y^*）$\in R^{+2}$ が存在し，次の条件が満されるならば，（x^*, y^*）は R^{+2} において大域的に漸近安定である。

（i）$g_x-g\ (x,\ y)/x+h_y-h\ (x,\ y)/y<0:\ \forall(x,\ y)\in R^{+2}$,

（ii）$[g_x-g\ (x,\ y)/x]\,[h_y-h\ (x,\ y)/y]-g_y h_x>0$
$:\ \forall(x,\ y)\in R^{+2}$,

（iii）$[g_x-g\ (x,\ y)/x]\,[h_y-h\ (x,\ y)/y]\neq 0$
$:\ \forall(x,\ y)\in R^{+2}$

または $g_y h_x\neq 0\ :\ \forall(x,\ y)\in R^{+2}$.

注3）Patinkin〔4〕P. 230，邦訳書212ページを参照。
4）Patinkin〔4〕P. 235，邦訳書217ページを参照。
5）Patinkin〔4〕P. 487，邦訳書447ページを参照。完全雇用が仮定されているので，Y は Y_0（Y_0 は定数）で示されている。
6）Ito〔1〕P. 313を参照。

いまR^{+2}において体系（PS）の均衡点（P^*，r^*）が存在すると仮定する。さらに，定理が用いられるために次の仮定が必要である。

仮定1　$\forall(P,\ r)\in R^{+2}$について

$$\frac{\partial F}{\partial r}<0,\quad \partial F/\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)>0,\quad \frac{\partial L}{\partial r}<0,\quad 0<\partial L/\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)<1$$

が成立する。

仮定2　$\forall(P,\ r)\in R^{+2}$について

$$[(1+\eta_F)-Y_0/F]>0$$

が成立する。ここで$\eta_F=-\dfrac{\partial F}{\partial P}\dfrac{P}{F}>0$とする。

この仮定は商品市場が超過需要のときは常に成立するが，超過供給のときにはη_Fが十分大きいこと，すなわち商品に対する需要の価格弾力性が十分大きい場合に成立する。

仮定3　$\forall(P,\ r)\in R^{+2}$について

$$[(1+\eta_L)-\left(\frac{M_0}{P}\right)/L]>0$$

が成立する。ここで$\eta_L=-\dfrac{\partial L}{\partial r}\ \dfrac{r}{L}>0$とする。

この仮定は貨幣市場が超過需要のときは常に成立するが，超過供給のときにはη_Lが十分大きいと，すなわち貨幣に対する需要の利子弾力性が十分大きい場合に成立する。

命題　仮定1，2，3のもとでは均衡点（P^*，r^*）はR^{+2}において大域的に漸近安定である。

証明　いま

$$k_1\left[F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-Y_0\right]\equiv f\ (P,\ r)$$

$$k_2\left[L\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-\frac{M_0}{P}\right]\equiv l\ (P,\ r)$$

とすれば

$$f_p - f\ (P\ ,\ r)\ /\ P = k_1\ \left[\frac{\partial F}{\partial P} - (F - Y_0)\ /\ P\right]$$

$$= - k_1\ \left(\frac{F}{P}\right)\ \left[(1 + \eta_F) - Y_0\ /\ F\right] < 0\ ,$$

$$l_r - l\ (P\ ,\ r)\ /\ r = k^2\ \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \left(L - \frac{M_0}{P}\right)\ /\ r\right]$$

$$= - k_2\ \left(\frac{L}{r}\right)\ \left[(1 + \eta_L) - \left(\frac{M_0}{P}\right)\ /\ L\right] < 0\ ,$$

$$f_r \cdot l_p = k_1 k_2 \frac{\partial F}{\partial r}\ \left[\frac{\partial L}{\partial P} - \left(-\frac{M_0}{P^2}\right)\right]$$

$$= k_1 k_2 \frac{\partial F}{\partial r}\ \left(-\frac{M_0}{P^2}\right)\ \left[\partial L\ /\ \partial\left(\frac{M_0}{P}\right) - 1\right] < 0$$

となり，定理の（ i ）（ ii ）そして（ iii ）を満す。(証明終り)

すなわち，体系（PS'）が仮定１，２，３を満足するならば，解の経路の正値性が保証されながら，均衡点（P^*，r^*）は大域的に漸近安定であるといえる。

Ⅳ．　解の経路

体系（PS）を満す（P，r）の経路を調べてみよう。いま

$$F\ \left(Y_0\ ,\ r\ ,\frac{M_0}{P}\right) - Y_0 \equiv E\ (P\ ,\ r) \tag{1}$$

とする。(1)式の全微分を求めれば

$$\frac{\partial E}{\partial P} dP + \frac{\partial E}{\partial r} dr = 0$$

となる。これより

$$\frac{dr}{dP}=-\frac{\partial E}{\partial P}\Big/\frac{\partial E}{\partial r}$$

である。$\frac{\partial E}{\partial P}<0$ ，$\frac{\partial E}{\partial r}<0$ であるので

$$\left.\frac{dr}{dP}\right|_{\dot{P}=0}<0$$

となり，$\dot{P}=0$ 曲線は右下りの曲線である。

いま

$$L\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-\frac{M_0}{P}\equiv X(P,\ r) \tag{2}$$

とする。(2)式を全微分すれば

$$\frac{\partial X}{\partial P}dP+\frac{\partial X}{\partial r}dr=0$$

となる。これより

$$\frac{dr}{dP}=-\frac{\partial X}{\partial P}\Big/\frac{\partial X}{\partial r}$$

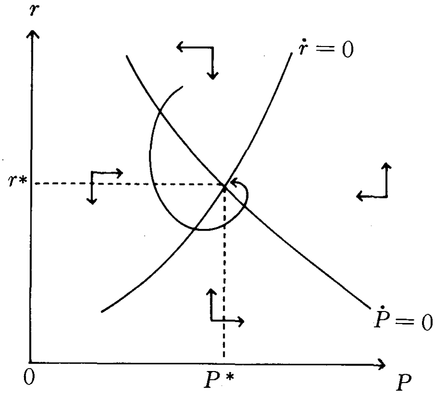
である。$\frac{\partial X}{\partial P}>0$ [7] ，$\frac{\partial X}{\partial r}<0$ より

$$\left.\frac{dr}{dP}\right|_{\dot{r}=0}>0$$

となり，$\dot{r}=0$ 曲線は右上りの曲線である。

$\dot{P}=0$ 曲線と $\dot{r}=0$ 曲線による4個の領域における P および r の変動方向を調べてみよう。$\dot{P}=0$ 曲線の上方の領域では $\dot{P}$ は負，下方の領域では正である。$\dot{r}=0$ 曲線の上方の領域では $\dot{r}$ は負であり，下方の領域では $\dot{r}$ は正である。したがって変動方向は第1図のような矢印で示される。

解の経路の正値性と変動方向により，解の経路を第１図のように描くことができよう。



第　1　図

注7）$\dfrac{\partial X}{\partial P}=\dfrac{\partial L}{\partial P}+\dfrac{M_0}{P^2}$

$$=\left(-\frac{M_0}{P^2}\right)\cdot\partial L\,/\,\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)+\frac{M_0}{P^2}$$

$$=\frac{M_0}{P^2}\left[1-\partial L\,/\,\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)\right]>0\,.$$

参　考　文　献

〔1〕 Ito , T. , "A Note on the Positivity Constraint in Olech's Theorem", *Journal of Economic Theory* , Vol. 17, 1978, PP. 312 318 .

〔2〕 三野和雄「ケインズ体系の『準均衡』への覚書」『経済論叢』第3巻1号，1979，119−138ページ.

〔3〕 Olech, C., "On the Global Stability of an Autonomous System on thePlane", *Contributions to Differential Equations*, Vol . 1 , No. 3 , 1963, PP. 389—400.

〔4〕 Patinkin , D., *Money* , *Interest and Prices* （2 nd edition）, Harper & Rowe , 1965. 貞木展生訳『貨幣・利子および価格』勁草書房，1971.

〔5〕 佐久間　敬「パティンキン・マクロモデルの大域的安定性について」『徳山大学論叢』第15号，1980，25−31ページ.