IS-LMモデルの大域的安定性について

佐 久 間　　　敬

I. 序

IS-LMモデルの安定性について論じられる場合、価格水準一定のもとか,[1] もしくは価格水準が変動する場合でも局所的安定性に限られている。[2]

この小論では，はじめに価格水準一定とした基本モデルの大域的安定性について論じ，つぎに価格水準が変動するモデルにおける大域的安定性について検討する。

II. 基本モデル

基本モデルでは次のような仮定がなされている。

(1) 1財経済である。

(2) 短期分析である。

(3) 貨幣は外生的に与えられ、一定である。

(4) 価格水準は一定である。

(5) 閉鎖経済である。

以下で使用される記号の意味は次のとおりである。Y: 実質国民所得 (産出量), I: 実質投資需要, S：実質貯蓄，r：利子率, M：名目貨幣量, N：雇用量, W：貨幣賃金率。

投資を

$$I=I(r),\qquad \frac{dI}{dr}<0$$

とし，貯蓄を

$$S=S(Y),\qquad 1>\frac{dS}{dY}>0$$

注1）この観点からの詳しい分析についてはChang and Swyth［2］を参照.

2）荒［1］,小村［3］を参照.

とすれば，生産物市場の均衡条件は

$$I(r)=S(Y) \qquad (2-1)$$

で表される。 また貨幣需要を

$$M^d=L(Y,r),\ \frac{\partial L}{\partial Y}<0,\ \frac{\partial L}{\partial r}<0$$

とすれば，貨幣市場の均衡条件は

$$L(Y,r)=\frac{M}{P} \qquad (2-2)$$

で表される。

生産物に対する需要が供給より大きくなれば産出量が増加し，貨幣に対する需要が供給より大きくなれば利子率が上昇するとすれば，調整過程は次の微分方程式で示される。[3)]

$$\left.\begin{aligned}\dot{Y}&=k_1\ [I(r)-S(Y)]\\ \dot{r}&=k_2\ [L(Y,r)-\frac{M}{P}]\end{aligned}\right\} \qquad (2-3)$$

ただし，k_1とk_2は正の定数とする。

$\forall(Y,r)\in R^2$について

$$1>\frac{dS}{dY}>0,\ \frac{dI}{dr}<0,\ \frac{\partial L}{\partial Y}>0,\ \frac{\partial L}{\partial r}<0$$

と仮定する。いま

$$\Phi(Y,r)\equiv I(r)-S(Y)$$
$$\Psi(Y,r)\equiv L(Y,r)-\frac{M}{P}$$

とすれば，(2－3) は

$$\left.\begin{aligned}\dot{Y}&=k_1\Phi(Y,r)\\ \dot{r}&=k_2\Psi(Y,r)\end{aligned}\right\} \qquad (2-4)$$

となる。ここで，ΦとΨはC^1級とする。(2－4) 式のヤコビ行列は

$$J=\begin{pmatrix} k_1\frac{\partial\Phi}{\partial Y} & k_1\frac{\partial\Phi}{\partial r}\\ k_2\frac{\partial\Psi}{\partial Y} & k_2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\end{pmatrix}$$

3) 筒井［6］2ページを参照。

4) Olechの定理についてはOlech［5］を参照。

であり、その符号パターンは

$$sgn = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

である。そこで，$\forall (Y\ r) \in R^2$ について

$$trace\ J < 0$$

$$det\ J > 0$$

$$k_1\ k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} \neq 0$$

となり，Olechの定理を満たすので，[4] 均衡点(Y^*, r^*)は大域的に漸近安定である。

ここで解の経路について調べてみよう。

$$\Phi\ (Y, r) = 0 \qquad (2-5)$$

を満す曲線は*IS*曲線と呼ばれる。(2－5) 式の全微分を求めれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} dY + \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = 0$$

となる。これより

$$\frac{dr}{dY} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y} / \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

である。$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} < 0$，$\frac{\partial \Phi}{\partial r} < 0$ であるので

$$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{\dot{Y}=0} < 0$$

となり，*IS*曲線は右下がりの曲線である。

$$\Psi\ (Y, r) = 0 \qquad (2-6)$$

を満たす曲線は*LM*曲線と呼ばれる。(2－6) 式の全微分を求めれば

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} dY + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr = 0$$

となる。これにより

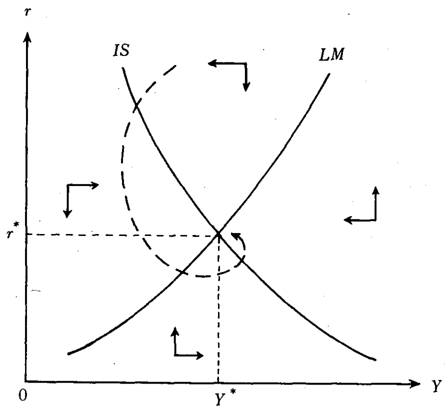
$$\frac{dr}{dY} = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y} / \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

である。$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} > 0$，$\frac{\partial \Psi}{\partial r} < 0$ であるので

$$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{\dot{r}=0} > 0$$

となり，LM曲線は右上がりの曲線である。

IS曲線とLM曲線による4個の領域における，Yとrの変動方向を調べてみよう。IS曲線の上方の領域では$\dot{Y}$は負，下方の領域では正である。LM曲線の上方の領域では$\dot{r}$は負，下方の領域では正である。したがって，変動方向は第1図のような矢印で示され，解の経路は点線のように描かれる。



第 1 図

Ⅲ. 価格水準の変動

価格水準一定という仮定をはずして，変動する場合の安定性について検討しよう。まず，価格の調整メカニズムを考察する。

（2－2）式をrについて解くと

$$r=h\,(Y,P,M),\qquad \frac{\partial h}{\partial Y}>0,\ \frac{\partial h}{\partial P}>0 \qquad (3-1)$$

となる。[5]（3－1）式を（2－1）式に代入すると

$$I[h\,(Y,P,M)]=S\,(Y)$$

となる。この式を書きかえて

$$Y=C\,(Y)+I[h\,(Y,P,M)]$$

とする。いま

$$D(Y, P) \equiv C(Y) + I[h(Y, P, M)]$$

とする。[6)]

ここで，生産物に対する需要が供給より大きくなれば市場価格を上昇させるという，いわゆる「ワルラス的」調整のメカニズムを想定すれば，次のように定式化される。[7)]

$$\dot{P} = \alpha_1 [D(Y, P) - Y]$$

ただし，α_1は正の定数である。

つぎに，産出量の調整メカニズムを考えてみよう。生産関数を

$$Y = F(N),\ \frac{dF}{dN} > 0,\ \frac{d^2F}{dN^2} < 0$$

で示す。利潤の極大条件から

$$P = W\frac{dY}{dN}$$

である。そこで，所与のWおよびYに対してPが決定され、そのPを短期における「供給価格」と呼べば，供給価格P^sは

$$P^s = P^s(Y, W)$$

で表される。[8)]

賃金率を一定とした場合に市場価格が供給価格より大きくなれば、企業は期待以上の利潤が得られ，産出量を増加させる。このような、いわゆる「マーシャル的」調整のメカニズムは,

$$\dot{Y} = \alpha_2 [P - P^s(Y)]$$

で示される。[9)]ただし，α_2は定数である。

以上より，価格と産出量の調整過程は次の微分方程式で示される。

$$\left.\begin{aligned} \dot{P} &= \alpha_1 [D(Y, P) - Y] \\ \dot{Y} &= \alpha_2 [P - P^s(Y)] \end{aligned}\right\} \quad (3-3)$$

$\forall (Y, P) \in R^2$について

$$\frac{\partial D}{\partial Y} < 1,\ \frac{\partial D}{\partial P} < 0,\ \frac{\partial P^s}{\partial Y} > 0$$

と仮定する。[10] ここで，DとP^SはC^1級とする。(3－3) 式のヤコビ行列は

$$J=\begin{pmatrix} \alpha_1\dfrac{\partial D}{\partial P} & \alpha_1\left(\dfrac{\partial D}{\partial Y}-1\right) \\ \alpha_2 & -\alpha_2\dfrac{\partial P^S}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

であり，その符号パターンは

$$sgn=\begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

である。そこで，$\forall (Y, P) \in R^2$について

$$trace\ J < 0$$

$$det\ J > 0$$

$$\alpha_1\alpha_2\frac{\partial D}{\partial P}\ \frac{\partial P^S}{\partial Y} \neq 0$$

となり，Olechの定理を満たすので，均衡点（Y^*，P^*）は大域的に漸近安定である。

5）いま

$$g\ (Y, r, P, M) \equiv L\ (Y, r) - \frac{M}{P} = 0$$

とすれば

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial r} \neq 0$$

となり陰関数定理を満たす。

6）以上の導出過程については小村[3]15ページを参照。

7）「ワルラス的」調整メカニズムについての説明は森本[4]44～47ページを参照。このような定式化は小村[3]16ページを参照。

8）荒[1]406ページを参照。

9）「マーシャル的」調整メカニズムについての説明は森本[4]44—47ページを参照。このような定式化は荒[1]407ページを参照。

10）$\dfrac{\partial D}{\partial Y} = \dfrac{\partial C}{\partial Y} + \dfrac{\partial I}{\partial r}\ \dfrac{\partial h}{\partial Y}$．　$1 > \dfrac{\partial C}{\partial Y} > 0$ なので $\dfrac{\partial D}{\partial Y} < 1$．

$\dfrac{\partial D}{\partial P} = \dfrac{\partial I}{\partial r}\ \dfrac{\partial h}{\partial P}$．　$\dfrac{\partial I}{\partial r} < 0$，$\dfrac{\partial h}{\partial P} > 0$ なので $\dfrac{\partial D}{\partial P} < 0$．

いま

$$f\,(P^s,\ N)\equiv\frac{W}{P^s}-\frac{dF}{dN}=0$$

とする。

$$df=\frac{\partial f}{\partial P^s}\,dP^s+\frac{\partial f}{\partial N}\,dN=0\,.$$

$$dN=\frac{dN}{dF}\,dY\text{より}$$

$$df=\left(-\frac{W}{P^{s2}}\right)dP^s-\left(\frac{d^2F}{dN^2}\bigg/\frac{dF}{dN}\right)dY=0\,.$$

$$\therefore\ \frac{dP^s}{dY}=\left(-\frac{P^{s2}}{W}\right)\left(\frac{d^2F}{dN^2}\bigg/\frac{dF}{dN}\right)>0\,.$$

参　考　文　献

〔1〕 荒憲治郎「ケインズ体系における産出量と価格水準の決定機構」『一橋論叢』第71巻4号，1974年4月，397-415ページ。

〔2〕 Chang, W. W. and D. J. Smyth, " Stability and Instability of IS—LM Equilibrium", *Oxford Economic Papers*, Vol. 24, No. 3, November, 1972, pp. 372-384.

〔3〕 小村衆統『貨幣とインフレーションの理論』春秋社，1981.

〔4〕 森本好則『経済変動と均衡分析』有斐閣，1980.

〔5〕 Olech, C., "On the Global Stability of an Autonomous System on the Plane", in J. P. Lasalle and J. B. Diaz eds., *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1, Wiley, 1963, pp. 389-400.

〔6〕 筒井修二「マクロ経済モデルの動学的構造」『白鷺論叢』第11号，1978年9月，1-9ページ。