パティンキン・マクロモデルの大域的安定性について

佐久間　敬

序

パティキンは彼の代表的著作 *Money, Interest, and Prices* の数学付録において，マクロモデルの安定性について論じているが，それは局所的安定性についてである。[1] この小論の目的は Olech の定理を用いることにより，パティンキンのマクロモデルの大域的安定性について論ずることにある。

注(1) パティンキンのマクロモデルの局所的安定性については，佐久間 [4] を参照。

I　パティンキン・マクロモデル

パティンキンの基本的マクロモデルでは，次のような仮定がなされている。[1]

(1) 経済主体は家計，企業および政府からなり，それらの経済行動は次のように規定されている。

家計：家計は生産用役を企業に提供することにより収入を得る。その収入で租税を支払い，消費財を購入する。残りは債券および現金の保有に当てられる。

企業：企業は消費財を家計と政府に，債券を家計に販売する。その売上げは，賃金・利子の支払い，消費財の購入，発行した債券の償還，現金残高の追加に当てられる。

政府：政府は家計より租税を受け取り，その金額を消費財の購入に当てる。

そして，その消費財は経済に無償で提供される。政府は債券および現金を保有しない。

(2) 需要および供給関数に貨幣錯覚は存在しない。

(3) 価格の予想弾力性は１である。

(4) 分配効果は存在しない。

(5) 価格および賃金率は完全に伸縮的である。

以下で使用される記号の意味は次のとおりである。

Y ： 実績国民所得

N^d ： 労働に対する需要量

N^s ： 労働に対する供給量

C ： 消費財に対する実質需要量

I ： 投資財に対する実質需要量

G ： 政府支出

B^d ： 債券に対する名目需要量

B^s ： 債券に対する名目供給量

M^d ： 貨幣に対する名目需要量

M^s ： 貨幣に対する名目供給量

M_0 ： 総貨幣量

M_0^H ： 家計の初期名目貨幣保有量

M_0^F ： 企業の初期名目貨幣保有量

W ： 貨幣賃金率

P ： 価格水準

r ： 利子率

労働，商品，債券および貨幣に対する需要関数および供給関数は次のようにあらわされる。(2) 労働に対する需要関数は

$$N^d = N^d\left(\frac{W}{P}\right), \quad \frac{\partial N^d}{\partial\left(\frac{W}{P}\right)} < 0$$

であり，供給関数は

$$N^s = N^s\left(\frac{W}{P}\right),\quad \frac{\partial N^s}{\partial\left(\frac{W}{P}\right)} > 0$$

である。

商品に対する需要は家計による消費支出と，企業による投資支出，それに政府支出の合計である。消費関数は

$$C = C\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^H}{P}\right),\quad \frac{\partial C}{\partial Y} > 0,\quad \frac{\partial C}{\partial r} < 0,\quad \frac{\partial C}{\partial\left(\frac{M_0^H}{P}\right)} > 0$$

であり，投資関数は

$$I = I\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^F}{P}\right),\quad \frac{\partial I}{\partial Y} > 0,\quad \frac{\partial I}{\partial r} < 0,\quad \frac{\partial I}{\partial\left(\frac{M_0^F}{P}\right)} > 0$$

で示される。そして単純化のため政府支出は一定とし

$$G = G_0$$

で表わす。ここで G_0 は定数である。したがって，商品に対する需要関数は

$$F\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right) \equiv C\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^H}{P}\right) + I\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^F}{P}\right) + G_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} > 0,\quad \frac{\partial F}{\partial r} < 0,\quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)} > 0$$

である。商品に対する供給関数は

$$Y = \phi(N)$$

で示される。

債券に対する実質需要関数は

$$\frac{B^d}{rP} = H\left(Y,\ r,\ \frac{M_0^H}{P}\right),\quad \frac{\partial H}{\partial Y} > 0,\quad \frac{\partial H}{\partial r} > 0,\quad \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{M_0^H}{P}\right)} > 0$$

であり，実質供給関数は

$$\frac{B^s}{rP}=V\left(Y,\ r,\ \frac{M_0{}^F}{P}\right),\ \frac{\partial V}{\partial Y}>0,\ \frac{\partial V}{\partial r}<0,\ \frac{\partial V}{\partial\left(\frac{M_0{}^F}{P}\right)}<0$$

である。

貨幣に対する需要関数は

$$M^d=P\cdot L\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right),\ \frac{\partial L}{\partial Y}>0,\ \frac{\partial L}{\partial r}<0,\ 1>\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)}>0$$

で示され，貨幣の名目供給量は一定と仮定されるので，

$$M^s=M_0$$

である。ここで M_0 は定数である。

以上より，労働，商品，債券および貨幣市場における均衡条件は次のとおりである。

$$N^d\left(\frac{W}{P}\right)=N^s\left(\frac{W}{P}\right) \qquad \text{労働市場}$$

$$F\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)=Y \qquad \text{商品市場}$$

$$H\left(Y,\ r,\ \frac{M_0{}^H}{P}\right)=V\left(Y,\ r,\ \frac{M_0{}^F}{P}\right) \qquad \text{債券市場}$$

$$P\cdot L\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)=M_0 \qquad \text{貨幣市場}$$

注(1)　Patinkin [3] pp. 199～202，邦訳書pp. 185～188 を参照。
(2)Patinkin [3] pp. 202～227，邦訳書pp. 188～210 を参照。

II　安定分析

パティンキンのマクロモデルの大域的安定性を，完全雇用の仮定のもとで吟味してみよう。パティンキン・モデルの動学分析はワルラスの法則により3市

場について検討すればよい。単純化のために，労働市場の均衡状態が攪乱されずに維持されると仮定すれば，２市場（ここでは商品市場と債券市場）に限定しうる。[1] また，ある市場の超過需要がその市場のみに影響すると仮定する。[2]

いま

$$B(r,\ P)\equiv H\left(Y,\ r,\ \frac{M_0{}^H}{P}\right)-V\left(Y,\ r,\ \frac{M_0{}^F}{P}\right)$$

$$E(r,\ P)\equiv F\left(Y,\ r,\ \frac{M_0}{P}\right)-Y_0$$

とすれば，[3] パティンキン・モデルにおける動学方程式は

$$\frac{dr}{dt}=-k_1\ B(r,\ P)$$

$$\frac{dP}{dt}=k_2\ E(r,\ P) \qquad (2\cdot1)$$

で示される。[4] ここでk_1，k_2は正の定数である。均衡値を（r_0，P_0）として，変数の変換

$$\boldsymbol{r}=r-r_0,\ \boldsymbol{P}=P-P_0$$

を行うと，（２・１）式は

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-k_1\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{P})$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=k_2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{P}) \qquad (2\cdot2)$$

と書きかえられる。

$$\boldsymbol{B}(0,\ 0)=0$$
$$\boldsymbol{E}(0,\ 0)=0$$

である。（２・２）式のヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} -k_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{r}} & -k_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{P}} \\ k_2 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{r}} & k_2 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{P}} \end{pmatrix}$$

であり，その符号パターンは

$$\begin{pmatrix} - & + \\ - & - \end{pmatrix}$$

である。(5) ここで

$$\text{trace } J < 0$$

$$\det J > 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{r}} \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{P}} \neq 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{P}} \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{r}} \neq 0$$

となる。この条件が，いたるところで成立するならば，Olech の定理が適用され，$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}) = (0, 0)$ は大域的安定となる。したがって，均衡値 (r_0, P_0) も大域的に安定となる。

注(1) Patinkin [3] p. 230，邦訳書p. 212を参照。

(2) パティンキンによれば，このような仮定が，多くの経済動学の理論において当然のように考えられているが，この仮定は部分均衡分析のなごりであって，一般均衡分析においては当然視されないとしている（Patinkin [3] p. 235，邦訳書p. 217を参照）。

(3) 完全雇用が仮定されているので，YはY_0（Y_0は定数）で示されている。

(4) Patinkin [3] p. 260，邦訳書p. 240を参照。

(5) $\dfrac{\partial B}{\partial r} > 0$．$\dfrac{\partial E}{\partial r} < 0$．$\dfrac{\partial E}{\partial P} = \left(-\dfrac{M_0}{P^2}\right) \dfrac{\partial F}{\partial \left(\dfrac{M_0}{P}\right)}$，$\dfrac{\partial F}{\partial \left(\dfrac{M_0}{P}\right)} > 0$ より $\dfrac{\partial E}{\partial P} < 0$．

$$\frac{\partial B}{\partial P}=\left(-\frac{M_0}{P^2}\right)\frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)},\ \frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{P}\right)}>0 \text{ より } \frac{\partial B}{\partial P}<0. \text{ これより } \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{r}}>0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{r}}<0,\ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{P}}<0,\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{P}}<0 \text{ である。}$$

(6)　Olech の定理は次のようなものである（Olech [2] p. 395）。

$$\dot{x}_i = f_i\,(x_1,\ x_2) \qquad (i=1,\ 2)$$

を考える。ここでf_i　（$i=1$，2）はE^2におけるC^1級の関数とする。以下の条件（i）～（iii）を満たすとき，（x_1，x_2）＝（0，0）は大域的において漸次安定である。

（i）　$f_i\,(0,\ 0)=0 \qquad (i=1,\ 2)$

(ii)　ヤコビ行列

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

が負の実数部分をもつ特性根を有すること。すなわち

trace　$J<0$　on E^2,

det　$J>0$　on E^2.

(iii)　$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \fallingdotseq 0$　　on E^2,

$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \fallingdotseq 0$　　on E^2

のどちらか一方が成立する。

参考文献

]1]　Chang, W, W and D. J. Smyth, "Stability and Instability of IS-LM Equilibrium", *Oxford Economic Papers*, vol. 24, No. 3, 1972.

[2]　Olech, C. "On the Global Stability of an Autonomous System on the Plane", *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, no. 3, 1963.

[3]　Patinkin, D., *Money, Interest, and Prices* (2nd edition), Harper & Rowe, 1965.〔貞木展生訳『貨幣・利子および価格』勁草書房, 1971〕。

[4]　佐久間敬「パティンキン・マクロモデルの安定性について」『徳山大学論叢』第7号，1976。