

静的源のあるヤン-ミルズ場の数値解

藤 村 公 男

I はじめに

ワインバーグとサラムはゲージ理論と自発的対称性の破れの考えを組み合わせ、弱相互作用と電磁相互作用に関する統一理論を構成し成功した。これを契機として現在では基本粒子の世界を支配する理論はゲージ原理に基づくゲージ理論だと考えられている。ワインバーグ、サラム理論を拡張して弱相互作用、電磁相互作用と強相互作用を統一しようという研究も行われている。

一方、高エネルギー実験技術の進歩によって新しいクォークも発見され、過去10年の間に高エネルギーの理論、実験の両面で大変革がなしとげられた。理論および実験から得られた基本粒子に関する描像を要約すると以下のとおりである。

- (1) 基本粒子はゲージ原理に基づくゲージ理論によって記述される。
- (2) クォークやゲージボゾンなどの基本粒子は色（赤、青、緑の3色）の自由度をもち、これらは単独では観測されない。
- (3) 実験によって観測されるハドロンは複数のクォークやゲージボゾンが永久に閉じこめられた複合物質であり、ハドロンの色は無色である。
- (4) クォークの種類は少くも6種である。

ゲージ理論が統一理論の基礎となっているばかりでなく、興味あることはゲージ理論からモノポール解やインスタント解が導出されたことである。これらが自然界でどのような役割を演ずるかはまだ不明だが、多くの研究者の注目を集めている。

ゲージ場にはアーベル的なものと非アーベル的なものの2種がある。従来から良く知られている電磁場はアーベル的なゲージ場である。本稿で問題に

するのは非アーベル的なゲージ場であるヤン-ミルズ場である。アーベル的なゲージ場即ち電磁場の場合には、良く知られているとおり、空間の一点に静的な源となる点電荷を置いたときその囲りに生ずるゲージ場（電場）自身は電荷を持たないので、最低のエネルギー状態として、クーロン解が唯一の解として、解析的に求められる。また点電荷が2ヶ以上あるときの解は個々の解の重ね合わせとなる。即ち線型性が成立する。それに反して、ヤン-ミルズ場の場合は源となる色電荷によって生じるゲージ場（グルーオン）自身が色電荷を持ち、これがまたそのまわりにゲージ場を生じる。従ってヤン-ミルズ場は本質的に非線型である。この非線型性が、クォークの閉じ込めが問題となる非摂動領域で、ヤン-ミルズ場の解法に大きな困難をもたらし、モノポール解などの特殊な場合を除いて一般的には解析的な方法がない。

古典論（非量子論）の範囲で、静的源または定常色電流が存在する場合のヤン-ミルズ場の解析はSU(2)の場合につき多くの人々によって行われている¹⁾⁻³⁾。アーベル的なクーロン解がヤン-ミルズ場の解としてあり得ることは良く知られているが、このクーロン解より低エネルギーの解も存在し、また色電荷Qがある値を越えると、同じQの値に対して2つの異なるエネルギー状態に分岐(bifurcation)するという特異な現象がJackiw et al.²⁾によって発見された。更に色電荷と磁気電流が存在する場合のヤン-ミルズ場の解析はMathelitsch et al.³⁾によってなされた。

本稿ではこれらの研究の方向にそって、よりパラメータの広い範囲で解を探した。その結果Qが大きくなる程ポテンシャルが強く振動する解が見出された。これらはいずれも、クーロン解より低エネルギーでbifurcationを持つ。

1) J. Mandula, Phys. Rev. D14, 3497(1976).

P. Sikivie and N. Weiss, Phys. Rev. D20, 487(1979).

2) R. Jackiw, L. Jacobs and C. Rebbi, Phys. Rev. D20, 474(1979).

3) L. Mathelitsch, H. Mitter and F. Widder, Phys. Rev. D25, 1123(1982).

4) SU(2)ヤン-ミルズ理論の古典解の総合報告としてはA. Actor, Rev. Mod. Phys. Vol. 51, No. 3, July 1979.

II ヤン-ミルズ場の定式化と仮設

局所的ゲージ変換に対して共変なヤン-ミルズ場の運動方程式は

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (1 a)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + g [A^\mu, A^\nu] \quad (1 b)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + g [A_\mu, \] \quad (1 c)$$

と書ける。ここで A_μ はベクトルポテンシャル, $F^{\mu\nu}$ は場の強さ, j^μ は外場の4元電流, g は相互作用の強さの定数である。ここでは古典場として扱うので場の量や電流はすべてC数である。4元ミンコフスキーのメトリックは $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$, $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$ である。内部対称性として $SU(2)$ を採用する⁴⁾。パウリ行列を $\sigma^a (a=1,2,3)$ として, 記号 $A_\mu \equiv A_\mu^a \sigma^a / 2i$, $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a \sigma^a / 2i$ を使うと, $F_{\mu\nu}^a$ と A_μ^a の関係は

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2)$$

となる。 ε^{abc} は3次元の反対称単位テンソルである。以下では0を時間成分, i, j, k を3次元空間の座標, a, b, c を $SU(2)$ 空間の指標とする。電場を E_i^a , 磁場を B_i^a とすると

$$E_i^a = F_{i0}^a, \quad B_i^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \quad (3)$$

E_i^a , B_i^a とベクトルポテンシャル A_μ^a との関係は

$$E_i^a = \partial_i A_0^a - \frac{\partial A_i^a}{\partial t} + g \varepsilon^{abc} A_i^b A_0^c \quad (4 a)$$

$$B_i^a = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^a - \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} A_j^b A_k^c \quad (4 b)$$

となり, ヤン-ミルズ方程式は

$$\partial_i E_i^a - g \varepsilon^{abc} A_i^b E_i^c = j_0^a \quad (5 a)$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j B_k^a - \frac{\partial E_i^a}{\partial t} + g \varepsilon^{abc} (A_0^b E_i^c + \varepsilon_{ijk} A_j^b B_k^c) = j_i^a \quad (5 b)$$

となる。場のエネルギーは

$$\xi = \frac{1}{2} \int d^3x (E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a) \quad (6)$$

となる。(4), (5)式において $g = 0$ とおくと, これは古典電磁場の方程式 (マ

クスウェル方程式) となる。この場合 $j_i = 0$ とおき時間微分を無視すると、 $\nabla A_0 = j_0$ となり、最低エネルギーの解として、クーロン解が得られる。またこれは線型方程式となっていることは自明である。しかし、(4)、(5)式からわかるとおり、ヤン-ミルズ方程式の場合 ($g \neq 0$) は極めて複雑な非線型方程式となるのでマクスウェル方程式のように解析的に解を求めることは困難である。

そこで以下ではポテンシャルに関する Witten⁵⁾ の仮定、ラジアルゲージと球対称な電流密度を仮定する。

$$A_0^a = \frac{1}{g r} \hat{r}^a f \quad (7 a)$$

$$A_i^a = \frac{1}{g r} \varepsilon^{aij} \hat{r}^j (a-1) \quad (7 b)$$

$$j_0^a = \frac{1}{g r_0^3} \hat{r}^a q \quad (8 a)$$

$$j_i^a = \frac{1}{g r_0^3} \varepsilon^{aij} \hat{r}^j m \quad (8 b)$$

ここで \hat{r}^a は 3次元空間の単位ベクトル、 r_0 は任意の長さのスケールである。Witten の仮定 (7) によって 4元時空が時間成分と動径成分の 2次元に縮められ方程式の扱いが容易となる。3次元空間を極座標で表わし、動径成分をとり出し、また静的な解を扱うので、時間微分を無視すると、ヤン-ミルズ方程式は次のような $f(x)$ 、 $a(x)$ に関する 2元連立常微分方程式となる。ここ

$$-\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2a^2(x)}{x^2} f(x) = xq(x) \quad (9 a)$$

$$-\frac{d^2 a(x)}{dx^2} + \frac{a^2(x) - 1 - f^2(x)}{x^2} a(x) = -xg(x) \quad (9 b)$$

5) E. Witten, Phys. Rev. Lett. 38, 121(1977).

もともとの Witten のラジアルゲージに関する表現は本文(7)式より一般的に書かれているが、これらはゲージ変換で結ばれているので等価であることが Jackiw et al.²⁾ によって証明された。

では動径座標 r は無次元の変数 $x = r/r_0$ に書き換えてある。また(9)式には結合常数 g がない。これはもともとのヤン-ミルズ方程式が g に対してスケール不変となっているからである。場のエネルギー(6)を f と a で表わすと

$$\xi = \frac{4\pi}{g^2 r_0} \int_0^\infty dx \left[(a')^2 + \frac{1}{2x^2} (a^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} (f')^2 + \frac{1}{x^2} f^2 a^2 \right] \quad (10)$$

となる。また(10)式を、(9)式を使って、 q と m で表わすことが可能である。(10)式の部分積分を行うと

$$\xi = \frac{4\pi}{g^2 r_0} \int_0^\infty dx x \left[(f - x f') q - 2 x m a' \right] \quad (11)$$

(10), (11)において $f' = df/dx$, $a' = da/dx$ である。(9)は2元連立の非線型微分方程式であり、任意の q , m に対して、一般的な解析法はない。以下では(9), (10), (11)から導出できる解の一般的な性質を示す。

(10)のエネルギーを有限値に保つために、 $x \rightarrow 0$ で $a \rightarrow 1$, $f \rightarrow 0$ とならなければならない。また $x \rightarrow 0$ で $xq \rightarrow 0$, $xm \rightarrow 0$ を仮定すると(9)から $f \rightarrow 0(x^2)$, $a \rightarrow \pm 1 + 0(x^2)$ 。また $m \rightarrow -m$, $a \rightarrow -a$ の変換に対して(9 b)は不変となるので $x \rightarrow 0$ で $a \rightarrow 1 + 0(x^2)$ としてよい。また電荷密度の全空間についての積分 $\int_0^\infty dx x^2 q(x)$ を有限値とするため、 $x \rightarrow \infty$ で $q \rightarrow 0(x^{-4})$ と仮定する。この結果 $x \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 0(x^{-1})$, $a \rightarrow \pm 1 + 0(x^{-1})$ となる。以上の $x \rightarrow 0$, ∞ での漸近形をまとめると、 $x \rightarrow 0$ では

$$a(x) = 1 + a_2 x^2 \quad (12 a)$$

$$f(x) = f_2 x^2 \quad (12 b)$$

$x \rightarrow \infty$ での漸近形は2種あり、Jackiw et al.²⁾ の分類に従って、Type I

$$a(x) = 1 + a_{-1}^I x^{-1} \quad (13 a)$$

$$f(x) = f_{-1}^I x^{-1} \quad (13 b)$$

とType II

$$a(x) = -1 + a_{-1}^{II} x^{-1} \quad (14 a)$$

$$f(x) = f_{-1}^{II} x^{-1} \quad (14 b)$$

がある。 $a_2, f_2, a^{-1}, f^{-1}, a^{-1/2}, f^{-1/2}$ は定数パラメータである。

以上の漸近形を満たすように f, a の適当な関数形を決め f, a と q, m の関数関係を分析した論文もある⁶⁾ ここでは q, m の関数形に対して f, a を解くのが正常な方法だと考える。とはいっても、これは非常に困難で、筆者の知る限り、一般的な q, m に対して分析を試みている人はいない。そこで Jackiw et al. や Mathelitsch et al. のように q, m として次の球面一様分布の場合につき解析を行う。

(A) Jackiw et al.²⁾

$$q(x) = Q\delta(x-1), \quad m(x) = 0 \quad (15a)$$

(B) Mathelitsch et al.³⁾

$$q(x) = Q\delta(x-1), \quad m(x) = M\delta(x-1) \quad (15b)$$

(A) は (B) の特殊な場合 $M=0$ である。

$Q \rightarrow -Q, f \rightarrow -f$ の変換に対して (9) 式は不変となる。これは荷電共役変換に対して系が不変なことを意味する。従って $Q \geq 0$ の場合に限定してよい。一方 $x \neq 1$ の領域では (9a) は $d^2f/dx^2 = 2a^2f/x^2$ となる。従ってこの領域で f は単調減少か単調増加関数である。従って $Q=0$ のときは $f=0$ となり、運動方程式は

$$-\frac{d^2a}{dx^2} + \frac{a^2-1}{x^2} a = -xm \quad (16)$$

となる。 $Q=0$ のときの (16) の解はモノポール解に相当する。 $Q \neq 0 (f \neq 0)$ のときは、(15) から (9b) は、 $x \neq 1$ の領域で、

$$d^2a/dx^2 = (a^2 - 1 - f^2) a/x^2$$

となるので、 f が大きくなる領域で a は振動する。

(15b) の q, m を使い、(9) を $x=1$ の近傍で積分すると

$$f'(1_-) - f'(1_+) = Q \quad (17a)$$

$$a'(1_+) - a'(1_-) = M. \quad (17b)$$

ただし $f'(1_-)$ は x を小さい方向から 1 に近づけた $f'(x)$ の極限值であり、

6) L. Jacobs and J. Wudka, Phys. Rev. D25, 1114 (1982).

$f'(1_+)$ は大きい方向から1に近づけたときの極限值である。場のエネルギーは(15b)を使って(11)から得られる。

$$\xi = \left(\frac{4\pi}{g^2 r_0} \right) \left[Q \left\{ f(1) - \frac{1}{2} f'(1_-) - \frac{1}{2} f'(1_+) \right\} - M \left\{ a'(1_-) + a'(1_+) \right\} \right] \quad (18)$$

III 数値解析

数値解析は境界条件(12), (13)または(14)を満たし、かつポテンシャルの連続性が成立するように(9)の微分方程式を解くことである。数値計算は $0 \leq x < 1$ の領域と $1 < x < \infty$ の領域とで別々に行う。 $0 \leq x < 1$ の領域では境界条件(12)のもとで微分方程式

$$-f'' + \frac{2a^2}{x^2} f = 0, \quad -a'' + (a^2 - 1 - f^2) a / x^2 = 0 \quad (19)$$

を解く。 $1 < x < \infty$ の領域では変数を x から $y=1/x$ に変換して $y \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) の境界条件として、Type I では

$$a(y) = 1 + a_{-I} y, \quad f(y) = f_{-I} y \quad (20a)$$

Type II では

$$a(y) = -1 + a_{-II} y, \quad f(y) = f_{-II} y \quad (20b)$$

のもとで、微分方程式

$$-d^2 f / dy^2 - \frac{2}{y} df / dy + \frac{2a^2}{y^2} f = 0 \quad (21a)$$

$$-d^2 a / dy^2 - \frac{2}{y} da / dy + (a^2 - 1 - f^2) a / y^2 = 0 \quad (21b)$$

を解く。4つの自由パラメータ $a_2, f_2, a_{-I}^{I, II}, f_{-I}^{I, II}$ の無数の組み合わせで計算されたものの中から、ポテンシャルの連続性 $f(1_-) = f(1_+)$, $a(1_-) = a(1_+)$ を満足するものが解となる。この解の $f(1), a(1), f'(1_+), a'(1_+)$ の値を使って(17)から Q と M , (18)から ξ が計算される。与えられた境界条件のもとで微分方程式を解くには変数領域を N ケの微小区間に分割し、基点を $x_n = nh$ ($n=0,$

1, ..., N) として, 次のように微分を差分で近似させる。

$$df/dx = [f(x_n+h) - f(x_n)]/h \quad (22 a)$$

$$d^2f/dx^2 = [f(x_n+h) - 2f(x_n) + f(x_n-h)]/h^2 \quad (22 b)$$

2階微分方程式の場合は, そのまま解く方法と2元連立1階微分方程式に直して, 解く方法がある。後者の場合は(19)は

$$\frac{df}{dx} = g, \quad \frac{dg}{dx} = \frac{2a^2}{x^2} f \quad (23 a)$$

$$\frac{da}{dx} = b, \quad \frac{db}{dx} = (a^2 - 1 - f^2) a/x^2 \quad (23 b)$$

となり, f , a とそれぞれの微分 g , b に関する4元1階微分方程式となる。(23)の左辺を(22)の差分で置き換える。(23)の右辺を評価するのにいくつかの方法がある。Euler法, Runge-Kutta法, Milneの予測子修正法などが代表的なものである。⁷⁾ いづれも境界値 $f(0)$, $a(0)$, $g(0)$, $b(0)$ の値から出発して, 逐次に $f(x_n)$, $a(x_n)$, $g(x_n)$, $b(x_n)$ の値を計算してゆく。もし解があるとすれば $h \rightarrow 0$ の極限で, このように求めた関数が真の関数に収束すると仮定する。実際には充分小さくないつかの h に対して近似解を求め, 両者の差が必要な誤差内におさまれば, それを解として採用する。本稿では4次のRunge-Kutta法を使い, 念のためいくつかの場合について他の方法を使って両者の結果が一致することを確認した。 h の値が誤差に関係する。一般に f , g , a , b の値が大きい程, 即ちパラメータ a_2 , f_2 , a_{-1} , f_{-1} の値が大きい程 h を小さくしなければならない。しかし, h を小さくする程, 計算量が多くなり, 計算機の使用時間が多くなる。コンピュータは電子計算機センターのものを利用した。解の存在を探したり, 図形を描く目的でMZ-80B, 2000を用い, この結果から精度を上げる目的でM130Fを用いた。表1は $a_2=2, f_2=3$ に対する $f(x)$ の値をいくつかの h に対して計算した数値例である。 $h \leq 0.02$ で良い精度が得られることが判明できる。困難で最も時間を要する作業は無数の解の中から特定の Q , M (例えば $Q=50, M=0$) のものを探し出すことである。本稿

7) J. M. マコーミック, M. G. サルパドリ。清水留三郎訳「FORTRANによる数値計算プログラム」, サイエンス社。

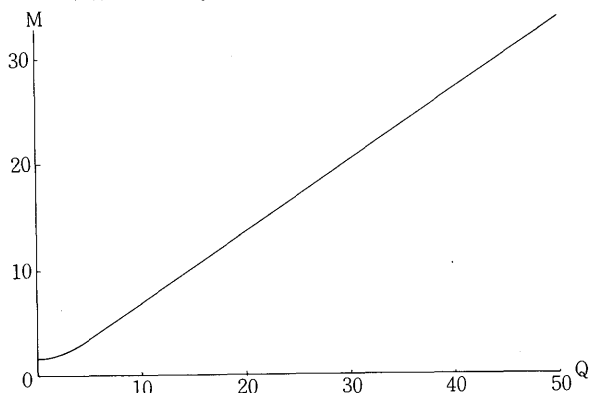
表1 $a_2=2, f_2=3$ のときの $f(x)$ の計算値

$x \backslash h$	0.1	0.05	0.02	0.01
0	0	0	0	0
0.2	0.1239249	0.12374061	0.12372233	0.12372273
0.4	0.54730815	0.54748626	0.54756122	0.54757231
0.6	1.4729942	1.4738449	1.474079	1.47411
0.8	3.3738307	3.3747969	3.3751901	3.3752492
1	6.766054	6.7632475	6.7633101	6.7633564

の計算では4つのパラメータを入力値として与え、その結果として、 Q, M を計算するので一般に予期しない Q, M の値が得られる。そのためMathelitsch et al.³⁾が示したように、1つの解を $Q-M$ 座標系の1点としてプロットする方法が有効である。パラメータを変化させると $Q-M$ 座標系に1つの軌跡が描かれる。このようにして得られた沢山の軌跡の中から必要な Q, M に最も近いものをいくつかひろい出し、多重補間法で、目標とする Q, M に対応するパラメータを決定した。以上の方法で数値計算は $0 \leq Q \leq 50$ の範囲で行った。得られた結果を以下に示す。

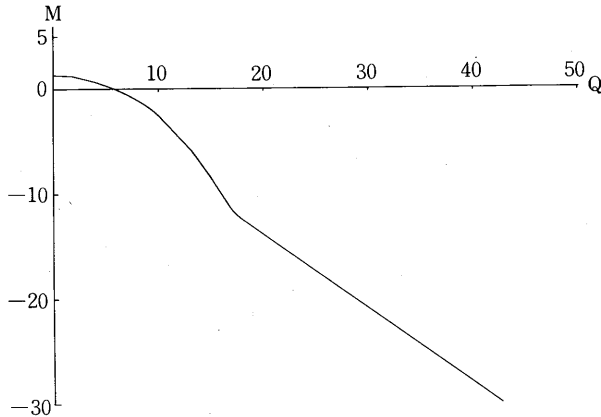
(a) 解の存在範囲

- (i) Type I では、任意の Q の値($Q \geq 0$)に対して解が存在する。また与えられた Q に対して M の上限 $M_{\max}(Q)$ が存在し、 $M \leq M_{\max}(Q)$ が解の存在範囲である。数値的に求められた $M_{\max}(Q)$ を第1図に示す。 $Q \geq 5$ では $M_{\max}(Q) \approx 0.68Q$ である。 M の下限は見出されなかった。



第1図 M の上限, $M_{\max}(Q)$, Type I

- (ii) Type II では M の上限はないが、下限が存在する。与えられた Q に対して $M_{\min}(Q)$ が存在し、 $M \geq M_{\min}(Q)$ が解の存在範囲となる。数値的に求められた $M_{\min}(Q)$ を第2図に示す。 $Q \geq 17$ で $M_{\min}(Q) \approx -0.70Q$ である。また $Q=0$ のとき $M_{\min}=1.289$, $Q=5.8$ のとき $M_{\min}=0$ となる。Jachiw et al.²⁾ の解析は $M=0$ に相当しており、このとき $Q \geq 5.8$ が Type II の解の存在範囲であった。これは第2図の $M=0$, $Q \geq 5.8$ の横軸に対応する。第1, 2図の $Q-M$ 図形は $Q \approx 0$ の附近で Mathelitsch et al.³⁾ の結果と一致しない。ここでは詳細を省くが、彼等の論文には多少の誤解があるように思える。

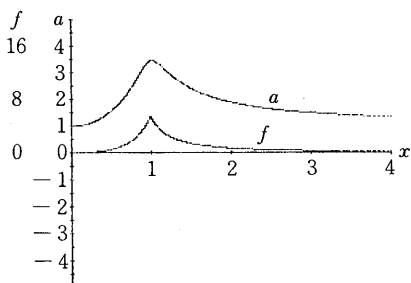


第2図 M の下限, $M_{\min}(Q)$, Type II

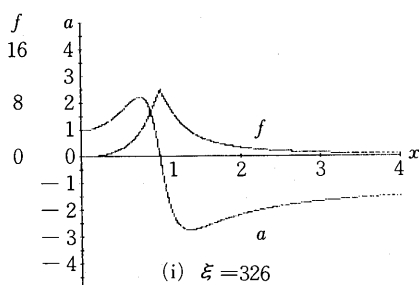
(b) f , a の関数形

$Q=50$, $M=0$ に対応する f , a の関数形を第3~10図に示す。第3図を除いて, a は節 (node) n を持つ。 n が偶数のもの ($n=0, 2, 4, 6$) が Type I であり, 奇数のもの ($n=1, 3, 5, 7$) が Type II である。図中の (i), (ii) は bifurcation で分岐したもののうち, エネルギー ξ が大きい方が (i), 小さい方が (ii) である。一般に a が強く振動する程 (n が大きい程) ξ は大きくなる。前章で説明した如く, f が大きい領域で a が振動する様子

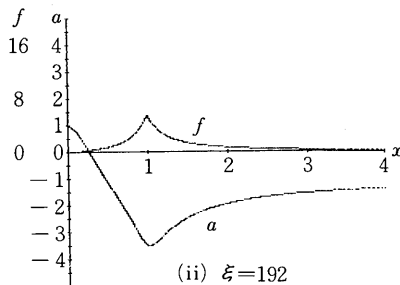
がわかる。



第3図 $Q=50, M=0, n=0$ (Type I)
 $\xi=178$

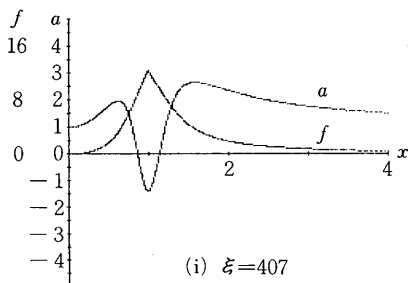


(i) $\xi=326$

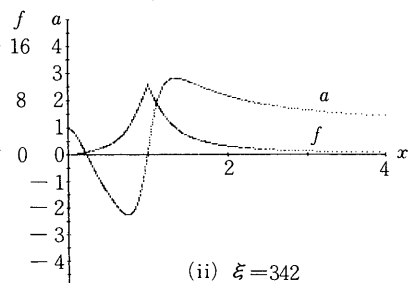


(ii) $\xi=192$

第4図 $Q=50, M=0, n=1$ (Type II)

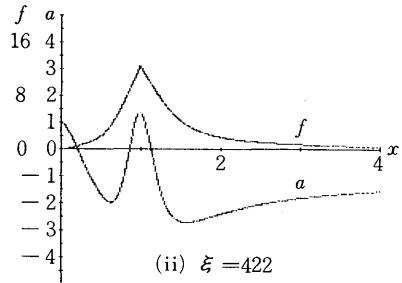
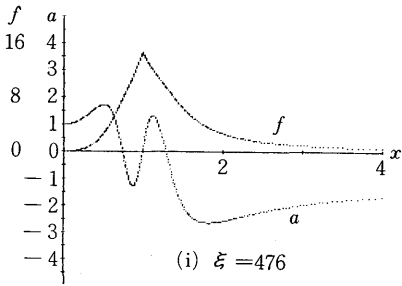


(i) $\xi=407$

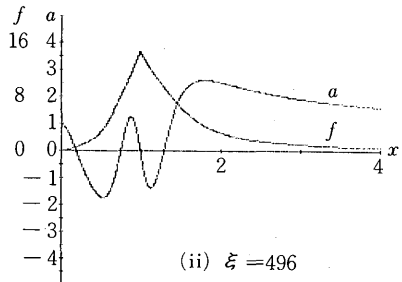
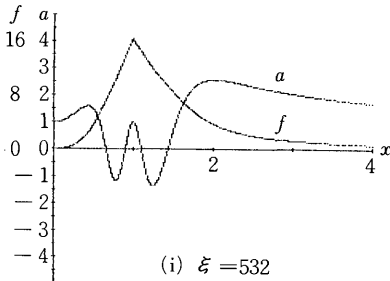


(ii) $\xi=342$

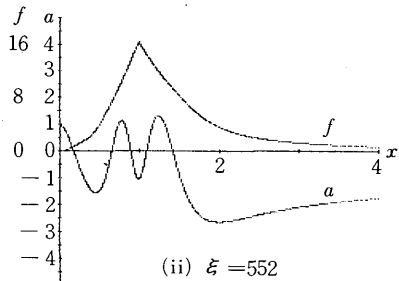
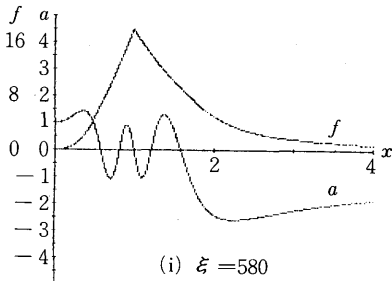
第5図 $Q=50, M=0, n=2$ (Type I)



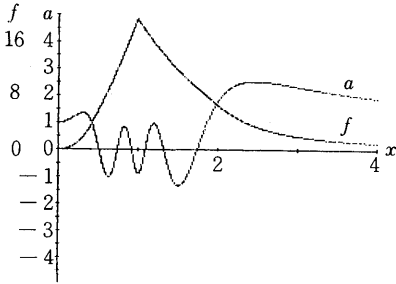
第 6 图 $Q=50, M=0, n=3$ (Type II)



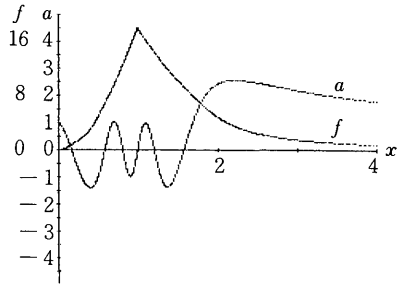
第 7 图 $Q=50, M=0, n=4$ (Type I)



第 8 图 $Q=50, M=0, n=5$ (Type II)

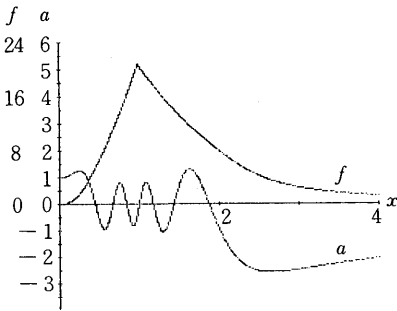


(i) $\xi = 621$

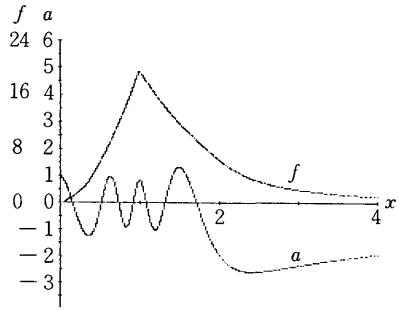


(ii) $\xi = 607$

第9図 $Q=50, M=0, n=6$ (Type I)



(i) $\xi = 669$

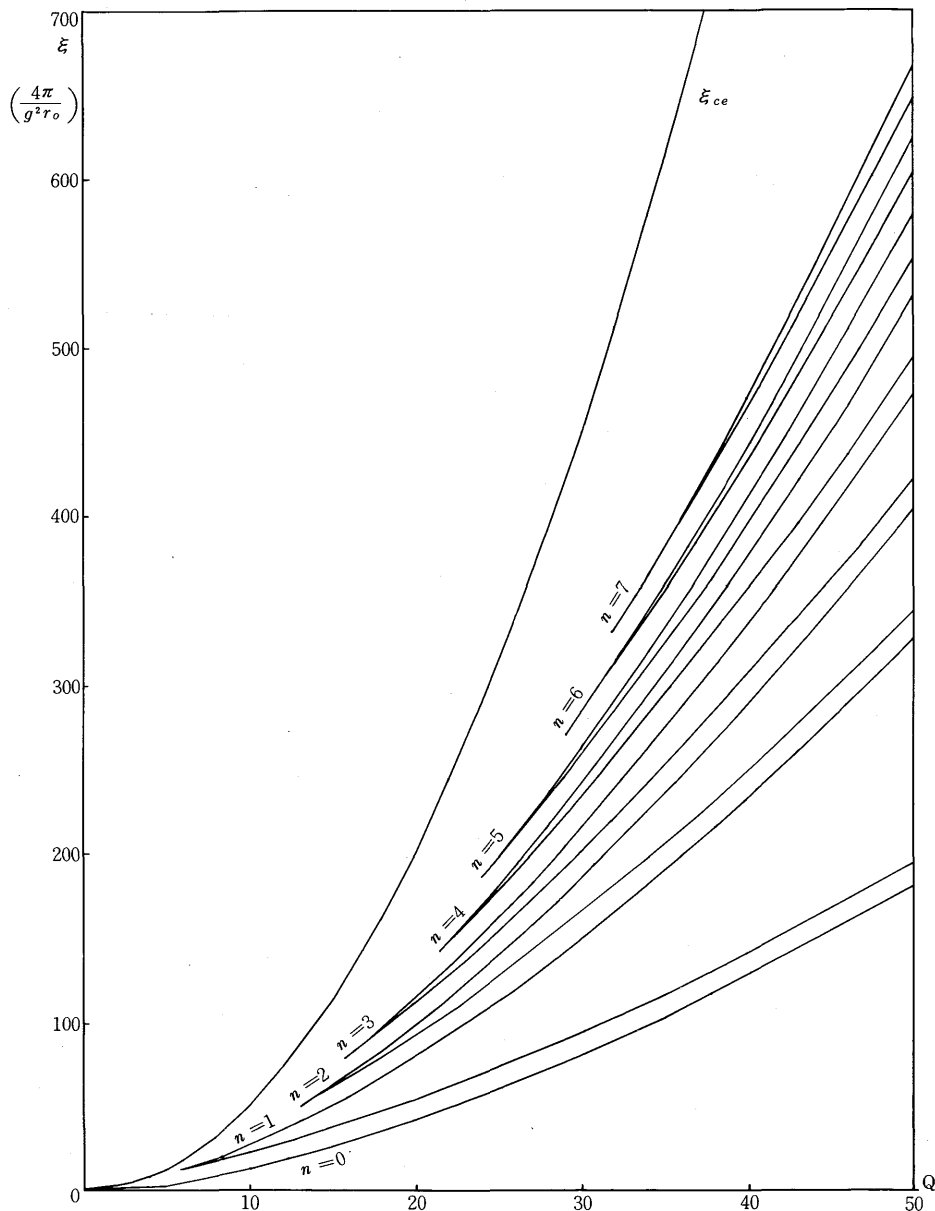


(ii) $\xi = 651$

第10図 $Q=50, M=0, n=7$ (Type II)

(c) $M=0$ における $Q-\xi$ 曲線

$M=0, 0 \leq Q \leq 50$ における $Q-\xi$ 曲線を第11図に示す。 Q が小さいときは $n=0$, Type I の解だけ存在し, Q が大きくなるに従いエネルギーの大きい, bifurcationをもつ解が現われる。 $n=0$ が最低のエネルギーレベルで n が大きくなるに従い, 高エネルギーレベルとなる。しかし, いずれもクーロンエネルギー ξ_{ci} よりは低い。bifurcationが現われる臨界電荷 Q_c と Q_c におけるエネルギー ξ_c を表2に示す。



第11図 $M=0$ のときの $Q-\xi$ 曲線。図中の n は a の節である。比較のためアーベル的ゲージ場のクーロンエネルギー ξ_{ce} も示してある。

表2 $M=0$ のときのbifurcationが現われる臨界電荷 Q_c とエネルギー ξ_c 。

n	Q_c	$\xi_c \left(\frac{4\pi}{g^2 r_0} \right)$	Type
1	5.8	11.8	II
2	13.2	50.8	I
3	15.8	79.2	II
4	21.5	142.3	I
5	24.0	185.4	II
6	29.2	269.8	I
7	32.0	331.1	II

IV 結 語

静的な源が存在する場合の古典場としてのヤナーミルズ場の解を、ラジアルゲージを仮定して、パラメータの広い範囲にわたって、数値的に求めた。その結果として Q が大きくなる程、多くの解が出現し、これらはいずれもbifurcationをもつ。またこれらのエネルギーはいずれもアーベル的ゲージ場のクーロンエネルギーより低いことが示された。またエネルギーが高い程、ポテンシャルは空間的に強く振動する。本稿では $Q \leq 50$ の範囲で計算を行ったが、 $Q > 50$ の場合でも、以上の傾向は不変のものと思われる。これらが実際の自然界で具体的にどのような意味をもっているかは不明だが、非アーベル的ゲージ場が自然の統一理論の基礎と考えられていること、および従来から良く知られているアーベル的なゲージ場である電磁場からは得られない特徴（モノポールやインスタントン）があるという点から、ヤナーミルズ場の研究は重要と思われる。本稿では $M=0$ の結果のみを示した。 $M \neq 0$ の結果は次の機会に発表したいと思う。