経済ラグの類型とモデル化について

若　井　具　宜

I　はじめに

2種類以上の異なる経済時系列間の相互関係をみた場合，説明変量と結果変量との対応関係に時間的なズレが生じることがしばしばある。すなわち，経済変量 y が別の経済変量 x の関数であると考えられるとき，

$$y_t = f(x_t) \quad \cdots\cdots(1)$$

よりも，

$$y_t = f(x_t,\ x_{t-1},\ \cdot\ \cdot\ \cdot) \quad \cdots\cdots(2)$$

の方が，説明力の高いことがしばしばある。ここで，t は時系列データ特定化のための時点を示し，f は単に関数関係を示している。(2)式において，x_{t-1} などが，いわゆる「遅れのある変数」(lagged variable) であり，われわれは，これによって，x による y の反応の「遅れ」(ラグ：lag)の問題を取り扱う[1)]。

ところで，われわれが現実の消費行動を考察した場合においても，今期の消費水準が，前期ないしはそれ以前の所得水準に依存して決定されることは，極めて自然なことであり，また，そうした消費行動をひとつの学習プロセスと考えるならば，それは常に，現在および過去のデータに依存しており，その結果形成される「基準」(standard) が，行動決定の重要な因子となるのは

注1）これらの推定等の問題は，計量経済学の分野においては，いわゆる「分布ラグ」の問題として扱われている。Pindyk, R. S and D. L. Rubinfeld, *Econometric Models and Econometric Methods,* McGraw-Hill, 1981, pp. 230—236. あるいは，Johnston, J., *Econometric Methods,* McGraw-Hill, 1972, pp. 292—321 等を参照。

明らかである[2]。以下においては，このような経済現象におけるさまざまなラグについて，その経済的意義を考慮しながら類型化を行うとともに，上記(2)式の具体化という方向で統計的モデルとしての定式化の問題を取り上げる[3]。

II　経済的類型

さて，上の消費（者）行動においてもみられるように，過去の経験から形成される「基準」が，現在ないし将来にわたって，「慣性」効果あるいは「履歴」現象として作用し，これが反応の遅れを説明する一種の行動原理にもなっているが，一般に，経済変量間の反応に遅れが生起する要因は，次の3種類に大別できる[4]。

a　技術的要因

財の生産過程などで生じるもの。たとえば，新製品の研究開発投資を行ってから，それらが実現し，実際に生産力が上昇するまでの期間において，いくつかの段階にわたるラグが発生する[5]。

b　制度的要因

財政政策や金融政策等が施行される際に，各種の行政機関等を経由するた

2）いわゆる「消費関数論争」においても，デューゼンベリーの相対所得仮説中での「習慣形成効果」等に，ラグ効果が直接間接利用されている。たとえば，蓑谷千凰彦『計量経済学』，東洋経済新報社，1983年，129～148ページ等。

3）消費，投資，需要等の定式化をまとめたものとしては，たとえば，Chow, G. C., *Econometrics,* McGraw-Hill, 1983, pp. 126—151 等。

4）この分類区分等は，Gupta, Y. P., *Statistical Estimation of Linear Economic Relationships,* Rotterdam University Press, 1971, pp. 17—20 に従った。

5）Griliches は，さらに，これを3段階のラグに区分している。第1段階のラグは，資金が投資されてから，意図した発明が実現されるまでの間に生じる。第2段階のラグは，この発明されたアイデアや工夫が経済（商業）ベースに乗るまでの発展過程で，また，第3段階のラグは，開発され，経済ベースに乗った機械設備等が古いものに取って代わる普及過程で生じる。Griliches, Z., "Distributed Lags: A Survey", *Econometrica,* Vol. 35, No. 1 (January 1967), pp. 16—20.

め，最終機関を経て実行されるまでに，ラグが発生する。企業組織等についても，その機構や環境が大きく，複雑であれば，それだけラグの発生可能性が大きくなる。

c　心理的要因

個人または経済主体等に付随する習慣 (habit), 慣習 (custom), 慣性 (inertia) および市場に対する不完全な知識等によって，経済行為の効果(ないし反応)出現までにラグが発生する。

経済諸変量間に反応の遅れが生起する要因は，一応，以上のように大別できるが，現実のラグは，これらの要因の複合した形で発生するものと考えられる[6]。

さて，われわれは，このような経済ラグ（経済反応の遅れ）の分析を進めていくために，それらを具体的な経済関係式に定式化しなければならない。こうしたラグ関係が定式化（関数化）されたものを，一般に分布ラグ・モデルと呼んでいる[7]。以下では，経済学的意義をもつもっとも基本的な分布ラグ・モデルについて，一応，4つのタイプに類別することとする。

1　adaptive expectations model

予想価格 (P^*_{t+1}) は，その増分 (ΔP^*_t) が，前期の実現価格 (P_t) と予想価格 (P^*_t) の差に比例するような形で決定されるものと想定すれば，

$$\Delta P^*_t = \beta\ (P_t - P^*_t) \quad \cdots\cdots(3)$$

なる定式化ができる。ただし，比例定数 β については，

6）Koyck は，(1)および(2)を客観的要因，(3)を主観的要因と規定している。Koyck, L. M:, *Distributed Lags and Investment Analysis,* Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1954, pp. 5—9.　参照。

7）いわゆる「分布ラグ」は，遅れをもつ各変量の係数が，時間の上で分布することに由来する。

$$0<\beta<1 \qquad \cdots\cdots(4)$$

を仮定する。このラグ付き価格決定の基本形は，Cagan によって提案されたもので，adaptive expectations model と称されている[8]。

定差方程式である(3)式を予想価格について解くと，

$$P_{t+1}^{*}=\beta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^{i}\ P_{t-i} \qquad \cdots\cdots(5)$$

となり，予想価格は，過去の実現価格の系列で説明されることになる。

ここで，さらに，予想価格を説明変数とすることによって，

$$y_t=\alpha P_t^{*} \qquad \cdots\cdots(6)$$

なる供給関数を作ることができる。ただし，α は比例定数である。y は，財の供給量が，生産者の予想市場価格に依存して決定されることを陽表的に示したものであり，(5)式を(6)式に代入すれば，

$$y_{t+1}=\alpha\beta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^{i}\ P_{t-i} \qquad \cdots\cdots(7)$$

となり，結局，生産者サイドで決定する財の供給量は，過去の価格データの加重平均に比例することになる[9]。

---

8) Cagan, P., "The Monetary Dynamics of Hyper Inflations", in M. Friedman, ed., *Studies in the Quantity Theory of Money.* Chicago : University of Chicago Press, 1956, pp. 37—47.

9) Cagan は，物価に関して，予想される変化率が，現実変化率と予想された変化率の差に比例して修正されるとし，これを微分形で示している。すなわち，

$$\left(\frac{d\pi^{*}}{dt}\right)_t=\beta\ (\pi_t-\pi_t^{*}) \qquad \cdots\cdots(8)$$

となり，ここで，P を物価とすれば，物価の現実変化率 π は，

$$\pi=\frac{d\ \log P}{dt}=\frac{\dot{P}}{P} \qquad \cdots\cdots(9)$$

であり，π^{*} は π の予想水準である。(8)式は定差方程式(4)式に対応している。

2　partial adjustment model

経済変量 y_t の望まれる，あるいは最適な量 y_t^*を，他の経済変量 x_t の線型関数として，

$$y_t^* = \alpha x_t \quad \cdots\cdots (10)$$

と表わすものとする。ただし，α は比例定数である。

いま，ここで，y_t^*を今期におけるある産業の望まれる労働雇用量とする。もし，この y_t^*と前期における実現雇用量 y_{t-1} とのギャップがかなりの大きさをもっていれば，種々の制度的要因のために，望まれる水準への調整は，即時的には完了せず，一定の時間的経過を必要とする。したがって，単位期間内においては，望まれる雇用量への調整は，部分的にのみ達成されると考えるのが妥当であり，これを定式化すれば，

$$\Delta y_{t-1} = \gamma \left(y_t^* - y_{t-1} \right) \quad \cdots\cdots (11)$$

となる。ただし，Δy_{t-1} は前期から今期までの実現雇用調整量(純増分)を示し，γ は定数で，

$$0 < \gamma < 1 \quad \cdots\cdots (12)$$

である。

(10)式と(11)式から，

$$y_t = (1-\gamma)\ y_{t-1} + \alpha\gamma x_t \quad \cdots\cdots (13)$$

が得られる。分布ラグのこの形のモデルは，Nerlove の提案によるものである[10)]。

10) Nerlove, M., "Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities", *Journal of Farm Economics*, No. 38, 1956. に代えて，Griliches, Z., *op. cit.*, pp. 17—18 を参照した。

3　dynamic demand model

動態において，相対価格を不変と仮定すれば，代替効果はゼロであるから，価格を落とした需要関数を線型で，

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \alpha_2 l_t \quad \cdots\cdots(14)$$

と設定できる。ここで，x_t は t 期におけるある財に対する需要量，y_tは t 期の実質所得を示し，α_0，α_1，α_2 は定数である。また，l は，

$$\Delta l_{t-1} = \beta_0 l_{t-1} + \beta_1 x_t \quad \cdots\cdots(15)$$

なる関数を有し，「習慣継続現象」を表わす観測不可能な変量である。ただし，β_0，β_1 は定数を示す。

(15)式は，l の変化が，l の（前期の）大きさに比例する消散成分 (dissipation component) $\beta_0 l_{t-1}$ と，現行消費量（需要量）に比例する増大成分 (accretion component) $\beta_1 x_t$の和となることを意味しており，通常，$\beta_0 < 0$，$\beta_1 = 1$ が仮定される。(15)式より l_t を解き，(14)式に代入すれば，x_t，y_tに関する分布ラグ・モデルが得られる。このモデルは，Houthakker と Taylor の提案によるものである[11]。

4　geometrically declining model

Koyck は，経済反応の遅れを次式のように具体化している[12]。

$$y_t = \alpha x_t + \alpha\beta x_{t-1} + \alpha\beta^2 x_{t-2} + \cdots\cdots$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-i} \quad \cdots\cdots(16)$$

ただし，α，β は定数で，特に β について，

---

11) Houthakker, H. S. and L. D. Taylor, *Consumer Demand in the United States, 1929—1970,* Harvard University Press, 1966, pp. 2—15.

12) Koyck, L. M., *op. cit.,* pp. 10—16.

$$0 \leq \beta < 1 \qquad \cdots\cdots(17)$$

なる制約条件が課される[13]。(16)式は，原因現象 x の結果現象 y におよぼす影響力が，過去に溯るほど幾何数列的に減少していくことを示している。いいかえれば，原因現象 x は，将来に向かって，その影響力を幾何数列的に減少させながら，結果現象に作用する。

(16)式から，直ちに，

$$y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} \qquad \cdots\cdots(18)$$

を得る[14]。

このモデルは，観測可能な変量のみを当初から使用している点で，上の3モデルとは異なっており，実用性に長じている。

III　ラグ構造の特性

以下で取り扱う分布ラグ・モデルを，説明変数 x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, ……に関する次の線型関数に限定する。

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_{t-i} \qquad \cdots\cdots(19) \end{aligned}$$

ここで，係数 β_1, β_2, ・・・の集合，

$$\boldsymbol{\beta} \overset{def}{=} \{\beta_i ; i = 0, 1, 2, \cdots\} \qquad \cdots\cdots(20)$$

をラグ構造 (lag structure)，また，その個々の要素，

$$\beta_i \in \boldsymbol{\beta}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots(21)$$

13) 後述のように，これは収束（安定）条件である。

14) この結果は reduction procedure によっても，また，定差式を解くことによっても導かれる。Griliches, Z., *op. cit.*, p. 17. 参照。

を，ラグ係数 (lag coefficient) と呼ぶこととし，特に，ラグ係数については次の条件を付すこととする。

〔条件 1〕　$\beta_i \neq 0$，$i \geqq 1$　なる i が少なくともひとつは存在する。

〔条件 2〕　$\beta_i \neq 0$　なる β_i はすべて同じ符号である。

この条件下で，$\beta_i = 0$，$i > k$ なる k が存在するとき，そのラグ構造をもつモデルを有限分布ラグ・モデル，しからざるモデルを無限分布ラグ・モデルという。また，(19)式右辺で定義される関数を分布ラグ関数 (distributed lag function) という[15]。

さて，ここで

$$-\infty < \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \overset{def}{=} \delta < \infty \quad \cdots\cdots (22)$$

と仮定すれば，

$$w_i = \frac{1}{\delta} \beta_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots (23)$$

なる変換が可能であり，(19)式は，

$$y_t = \delta \left(w_0 x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \cdots \right) \quad \cdots\cdots (24)$$

と書き直すことができる。上記の変換によって，

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1$$
$$0 \leq w_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots (25)$$

が成立する。このような w_i の集合，

$$\boldsymbol{w} \overset{def}{=} \{ w_i ; i = 0, 1, 2, \cdots \} \quad \cdots\cdots (26)$$

を標準化ラグ構造 (normalized lag structure)，その要素，

$$w_i \in \boldsymbol{w}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots (27)$$

15) この辺りの定義等については，*Ibid.*, pp. 16—20 等参照。

を標準化ラグ係数 (normalized lag coefficient) という。また，(26)式において，$\boldsymbol{w}$ は無限実数列で定義されており，(25)式成立の必要条件は，

$$\lim_{i\to\infty} w_i = 0 \quad \cdots\cdots(28)$$

が成立することである[16]。

いま，Z が，$i=0, 1, 2, \cdots$ を実現値とし，それらの確率が，それぞれ，

$$Pr\ \{Z=i\} = w_i, \quad i=0, 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots(30)$$

なる離散確率変数と定義すれば，標準化ラグ構造は，ひとつの確率分布に対応することになる。この対応によって，ラグ構造の分析に，すでに開発された確率分布の諸概念を導入することが可能となる。

さて，ここで，ラグ・オペレーター (lag operator) と呼ばれる演算子 L を，

$$L^k x_t \overset{def}{=} x_{t-k}, \quad k=0, 1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots(31)$$

と定義すれば，(19)式は，

$$\begin{aligned} y_t &= (\beta_0+\beta_1 L+\beta_2 L^2+\cdots)\ x_t \\ &\overset{def}{=} B(L)\ x_t \\ &= \delta\ (w_0+w_1 L+w_2 L^2+\cdots)\ x_t \\ &\overset{def}{=} \delta\, W(L)\ x_t \quad \cdots\cdots(32) \end{aligned}$$

と書き直される[17]。ここで，$B\ (L)$，$W\ (L)$ は，それぞれ，系列 $\boldsymbol{\beta}$ および

16) これは，(22)式の条件のもとで，$\beta_i \in \boldsymbol{\beta}$ について，

$$\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0 \quad \cdots\cdots(29)$$

が成立することをその必要条件とし，x の y への影響力が，時間の経過とともに，ゼロまで減少することを示している。

17) ラグ・オペレーター L は，時間を溯るオペレーター (backward shift operator) であるが，　(次頁脚注へ続く)

系列 $\boldsymbol{w}$ のラグ母関数 (lag generating function) と呼ばれ，特に，$W(L)$ は，(30)式で定義された確率との関係で，確率母関数 (probability generating function) とみなすことができる[18)]。

このように，系列 $\boldsymbol{w}$ とそのラグ母関数 $W(L)$ との関係は，そのまま，確率変数の密度関数と確率母関数との関係に対応する。かかる意味において，標準化ラグ構造の示す分布は，ラグ分布と称し得るのである。このラグ分布と確率分布の対応関係を用いて，次節における統計的類型や定式化を行う。

確率母関数あるいはラグ母関数を用いることによって，ラグ分布ないしラグ構造の諸特性を明らかにすることができる。まず，平均ラグ (mean lag) は，

$$E(\theta)\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{\infty} i\,w_i \overset{def}{=} W'(1) \quad \cdots\cdots(39)$$

で定義される[19)]。ただし，

$$F^k x_t \overset{def}{=} x_{t+k}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots \quad \cdots\cdots(33)$$

なるオペレーター (forward shift operator) F を定義することもできる。ラグ・オペレーターLとの間には，

$$F=L^{-1} \quad \cdots\cdots(34)$$

なる関係が成立する。Griliches, Z., *Ibid.*, p. 21 等を参照。

18) 一般に，X を確率変数，t を実変数とするとき，母関数 (generating function) または階乗積率母関数は，

$$G_X(t)\overset{def}{=}E(t^x) \quad \cdots\cdots(35)$$

で定義される。Xが，

$$X\overset{def}{=}\left\{x_i;\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots\right\} \quad \cdots\cdots(36)$$

なる離散変数であり，その確率が，

$$f(x_i)\overset{def}{=}P_r\{X=X_i\} \quad \cdots\cdots(37)$$

で定義される度数関数 $f(x)$を有するとき，母関数は，

$$G_X(t)=\sum_{i=0}^{\infty} t^{x_i} f(x_i) \quad \cdots\cdots(38)$$

となる。

19) ここで，

$$W'(L)=\frac{dW(L)}{dL} \quad \cdots\cdots(40)$$

（次頁脚注へ続く）

$$W(1)=\sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdots\cdots (43)$$

$$B(1)=\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i=\delta \cdots\cdots (44)$$

に留意すれば，(32)式より，

$$W(L)=\frac{B(L)}{B(1)} \cdots\cdots (45)$$

なる関係が成立するから，平均ラグは次式で表わすことができる。

$$E(\theta)=\frac{B'(1)}{B(1)} \cdots\cdots (46)$$

次に，ラグ分布の分散は，

$$V_{ar}(\theta)\overset{def}{=}W''(1)+W'(1)-[W'(1)]^2 \cdots\cdots (47)$$

と定義され[20]，(45)式を利用すれば，

である。また，

$$\frac{d}{dt}G_X(t)=E\left(\frac{dt^X}{dt}\right)=E[X\,t^{(X-1)}] \cdots\cdots (41)$$

であるから，$t=1$とおけば，

$$G_X'(1)=E(X) \cdots\cdots (42)$$

が成立する。

20) $\frac{d^2}{dt^2}G_X(t)=E[X(X-1)\ t^{(X-2)}] \cdots\cdots (47')$

であるから，

$$G''_X(1)=E[X(X-1)]$$
$$=E(X^2)-E(X) \cdots\cdots (47'')$$

となり，したがって，

$$V_{ar}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=G''_X(1)+G'_X(1)-\{G'_X(1)\}^2 \cdots\cdots (48)$$

が成立する。なお，一般に，

（次頁脚注へ続く）

$$V_{ar}(\theta)=\frac{B''(1)}{B(1)}+\frac{B'(1)}{B(1)}-\left[\frac{B'(1)}{B(1)}\right]^2 \quad \cdots\cdots(50)$$

とも表わすことができる。

ところで，

$$y_t=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i L^i\right] x_t$$
$$=B(L)\,x_t \quad \cdots\cdots(51)$$

において，ラグ母関数B（L）がLの有理関数であれば，

$$B(L)=\frac{U(L)}{V(L)} \quad \cdots\cdots(52)$$

と表わされる。ただし，$U(L)$，$V(L)$ は，

$$U(L)=\sum_{i=0}^{m} u_i L^i,\quad m<\infty \quad \cdots\cdots(53)$$

$$V(L)=\sum_{i=0}^{n} v_i L^i,\quad n<\infty \quad \cdots\cdots(54)$$

なる多項式で表わされるLの関数である。(51)式のような関数を有理分布ラグ関数 (rational distributed lag function) と呼んでいる[21]。(51)式は(52)式により，

$$V(L)\,y_t=U(L)\,x_t \quad \cdots\cdots(55)$$

と変換され，有限個の y_{t-i}，x_{t-j}を含む方程式となる。たとえば，II.4 の geometrically declining model,

---

$$\frac{d^k}{dt^k}G_X(t)=G^{(k)}_X(t)$$
$$=E\left[\left\{\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right\}t^{(X-k)}\right] \quad \cdots\cdots(49)$$

であり，$t=1$とおけば，Xのk次階乗積率が得られる。

21) Jorgenson, D. W., "Rational Distributed Lag Functions", *Econometrica,* Vol. 32, No. 1 (January 1966), pp. 135—139 参照。

$$y_t=\alpha\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i L^i\right]x_t$$

$$=\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta L}x_t \quad\cdots\cdots(56)$$

においては,

$$U(L)=\alpha \quad\cdots\cdots(57)$$

$$V(L)=1-\beta L \quad\cdots\cdots(58)$$

であるから，有理分布ラグ関数として，(55)式に対応する変換,

$$(1-\beta L)\,y_t=\alpha x_t \quad\cdots\cdots(59)$$

が得られる[22)]。

一方，分布ラグ・モデルは，従属変数（ここでは y_t）に関する一種の定差方程式ともみなすことができ，動態モデルとして，その体系が安定であることが要求される場合もある。一般に，線型定差方程式が安定であるための必要十分条件は，その特性根の絶対値がすべて1より小なることである。上記の，geometrically declining model では,

$$|\beta|<1 \quad\cdots\cdots(60)$$

が体系の安定条件となる。

以下の定式化等の展開のために，上で述べた基本的仮定および制約条件を整理しておくと，次のようになる。

a）非負性の仮定（本節〔条件1〕および〔条件2〕のもとで(25)式が成立すること)。

b）収束性の仮定（(22)式のもとで(28)式が成立すること)。

22）前節では，(59)式相当式を導出するために，reduction procedure 等が施されたが，ここでは，ラグ・オペレーターによる変換を通して，極めて簡単に，同式を導出できる点に留意すべきである。ただし，この場合，$U(L)$ はラグ・オペレーター L のゼロ次式，$V(L)$ は同じく1次式表現となっている。

c）安定条件[23)]。

IV　定式化の類型

経済理論的分析は，すでに定義した精密分布ラグ・モデル (exact distributed lag model),

$$y_t^* = \delta W(L)\, x_t \quad \cdots\cdots(61)$$

で行われることが多い。ただし，

$$W(L) = w_0 + w_1 L + w_2 L^2 + \cdot\cdot\cdot \quad \cdots\cdots(62)$$

$$W(1) = 1 \quad \cdots\cdots(63)$$

である。しかし，実証分析ないし計測の問題においては，(61)式の右辺に撹乱項 u_t を追加した確率分布ラグ・モデル (stochastic distributed lag model),

$$\begin{aligned} y_t &= y_t^* + u_t \\ &= \delta W(L)\, x_t + u_t \quad \cdots\cdots(64) \end{aligned}$$

を必要とする。(64)式において，y_t は t 期における従属変数の実測値，y_t^*はその systematic part，u_t はその non-systematic part である[24)]。

さて，われわれは，ラグ分布に各種の統計的分布を仮定し，W（L）にラグ母関数を具体化することによって，モデルの定式化を進めることができる。以下では，ラグ分布に，幾何分布とパスカル分布を想定し，特に前者については，撹乱項の設定によって，さらに細分化しながら定式化の問題を考えていく。

23）(59)式は，1階線型定差方程式であるが，2階以上の線型定差方程式では，安定条件の外に実根条件も要求される。Griliches, Z., *op. cit.*, pp. 23—32.　等参照。

24）本論においては，撹乱項に関して，その分布は想定せず，モデルの変換によって生ずる結果のみを問題にする。

1　幾何分布を仮定した場合

ラグ分布に幾何分布 (geometric distribution) を仮定するとき，その度数関数は次式のようになる。

$$f(i) = (1-\beta)\beta^i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \qquad (65)$$

ただし，β については，

$$0 \leq \beta < 1 \qquad (66)$$

である。これよりラグ母関数は，

$$W(L) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)\beta^i L^i = \frac{1-\beta}{1-\beta L} \qquad (67)$$

となる。これを，(61)式に代入し，

$$y_t = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i L^i\right] x_t + u_t = \alpha \frac{1}{1-\beta L} x_t + u_t \qquad (68)$$

なる分布ラグ・モデルを設定できる。ただし，この式で，

$$\alpha = \delta(1-\beta) \qquad (69)$$

とした。このモデルは，IIですでに述べた geometrically declining model に撹乱項を付加したものである。

そこで，(67)式から平均ラグを求めると，

$$E(\theta) = \frac{\beta}{1-\beta} \qquad (70)$$

であり，また，ラグ分布の分散は，

$$V_{ar}(\theta) = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \qquad (71)$$

となる。このラグ分布は，反応が時間の経過とともに幾何数列的に衰退していくところに特徴をもっており，経済反応のみならず，多くの自然現象や社会現象に広く当てはまる。しかしながら，経済現象において，長期のラグ要因などが存在するときには，反応の最大点が初期時点に現出するとは限らず，その場合には，適合はよくない[25)]。

ところで，IIで展開した adaptive expectations model と partial adjustment model は，geometrically declining model すなわち，本節で展開しているこの幾何分布を仮定したタイプに誘導できる。まず，adaptive expectations model は，(5)式を(6)式に代入し，撹乱項 u_t を付加すると，

$$y_t=\alpha\beta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^i P_{t-i-1}+u_t \quad \cdots\cdots (72)$$

となる。上式の $\alpha\beta$，$(1-\beta)$ をそれぞれ，(68)式の α，β に読み代えれば，geometrically declining model と一致することを確かめることができる[26)]。

また，partial adjustment model については，(10)式に撹乱項 u_t を付加し，(11)式に代入すれば，

$$y_t=\alpha\gamma x_t+(1-\gamma)y_{t-1}+\gamma u_t \quad \cdots\cdots (74)$$

となり，$\alpha\gamma$，$(1-\gamma)$ をそれぞれ α，β と読み代えることにより，

$$(1-\beta L)y_t=\alpha x_t+(1-\beta)u_t \quad \cdots\cdots (75)$$

または，

$$y_t=\alpha\frac{1}{1-\beta L}x_t+\frac{1-\beta}{1-\beta L}u_t \quad \cdots\cdots (76)$$

を得る。このモデルは，geometrically declining model になっているものの，

25) 特に，四半期別や月別の時系列データを使用するときに，この短所が問題にされる。
26) その場合，

$$y_t=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i x_{t-i-1}+u_t \quad \cdots\cdots (73)$$

となり，形式的には，即時的反応 x_t が生起しないモデルとなっている。

(68)式と比較したとき，systematic part は全く同一であるが，撹乱項に相違のあることに留意しておく必要がある[27)]。

そこで，このような撹乱項の差異によって，幾何分布を仮定した場合の統計的定式化は，次の3種類に区分できる。

a　Koyck のモデル

$$y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \quad \cdots\cdots(78)$$

ただし，撹乱項 u_t は，

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t \quad \cdots\cdots(79)$$

$$|\rho| < 1 \quad \cdots\cdots(80)$$

であり，e_t は自己回帰を示さない，時間に関して独立な確率変数である。(78)式は，本節の原型(68)式と同一であり，これを Koyck のモデルと呼ぶことにする[28)]。

b　Griliches のモデル

$$y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} + u_t \quad \cdots\cdots(81)$$

Griliches は，撹乱項を上のように簡略化しており，partial adjustment model (75)式がこの型に属する。(81)式を Griliches のモデルと呼ぶことにする[29)]。

---

27) (68)式を変形すると，

$$y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \quad \cdots\cdots(77)$$

となり，推定モデルとしては，通常，これを用いる。(75)式と比較して，(77)式の撹乱項（$u_t - \beta u_{t-1}$）は自己回帰型である点が異なっている。

28) Koyck, L. M., *op. cit.,* pp. 5—9.　においては，(68)式に reduction procedure を施すことによって，(78)式を導出している。なお，(79)式は，撹乱項 u_t に1階のマルコフ過程を仮定したものであり，推定問題において重要性を有している。

29) (81)式は変形すると，

$$y_t = \alpha \frac{1}{1-\beta L} x_t + \frac{1}{1-\beta L} u_t$$

（次頁脚注へ続く）

c　Dhrymes のモデル

$$y_t=\alpha x_t+\beta y_{t-1}+e_t-\beta e_{t-1} \quad \cdots\cdots(83)$$

または,

$$y_t=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i x_{t-i}+e_t \quad \cdots\cdots(84)$$

Dhrymes は，Koyck のモデル(78)式の u_t の代わりに，上式のような撹乱項を設定している。これを Dhrymes のモデルと呼ぶことにする[30]。

分布ラグ・モデルの推定問題においては，これら 3 種類が目的に応じて使い分けられているが，いずれにしても，ラグ構造に幾何分布を仮定したタイプがもっとも多く用いられている。その理由は，

a）ラグ分布が多くの経済現象において広く妥当すること

b）変形が容易であり，推定すべきパラメーターが少ないこと

等である。

2　パスカル分布を仮定した場合

幾何分布を仮定した場合の短所は，反応の最大点が初期時点に出現することであった。この点を修正するために，Solow は，ラグ分布にパスカル分布 (pascal distribution) を仮定した[31]。パスカル分布の度数関数は，

$$f(i)=\binom{\gamma+i-1}{i}(1-\lambda)^{\gamma}\lambda^{i}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\cdots \quad \cdots\cdots(85)$$

であり，ここで，λ については，

$$=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i x_{t-i}+\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i u_{t-i} \quad \cdots\cdots(82)$$

となり，撹乱項は無限多項式となる。このモデルは，推定式の撹乱項を単純化する目的をもったものである。

30）Dhrymes, P. J., *Distributed Lags ; Problems of Estimation and Formulation,* San Francisco : Holden-day Inc., 1971, pp. 13—18.

31）Solow, R. M., "On a Family of Lag Distributions", *Econometrica* , Vol. 28, No. 2 (April 1960), pp. 393—399.

$$0 \leq \lambda < 1 \quad \cdots\cdots (86)$$

なる制約が付されている。ラグ母関数を求めると，

$$W(L) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[(1-\lambda)^{\gamma}\binom{\gamma+i-1}{i}\lambda^{i}L^{i}\right]$$

$$= \frac{(1-\lambda)^{\gamma}}{(1-\lambda L)^{\gamma}} \quad \cdots\cdots (87)$$

となる[32)]。これにより，パスカル分布を仮定したモデル，

$$y_t = \delta\,\frac{(1-\lambda)^{\gamma}}{(1-\lambda L)^{\gamma}}\,x_t + u_t \quad \cdots\cdots (89)$$

を設定できる。

(87)式から，平均ラグは，

$$E(\theta) = \frac{\gamma\lambda}{1-\lambda} \quad \cdots\cdots (90)$$

となり，ラグ分布の分散は，

$$V_{ar}(\theta) = \frac{\gamma\lambda}{(1-\lambda)^{2}} \quad \cdots\cdots (91)$$

となる。

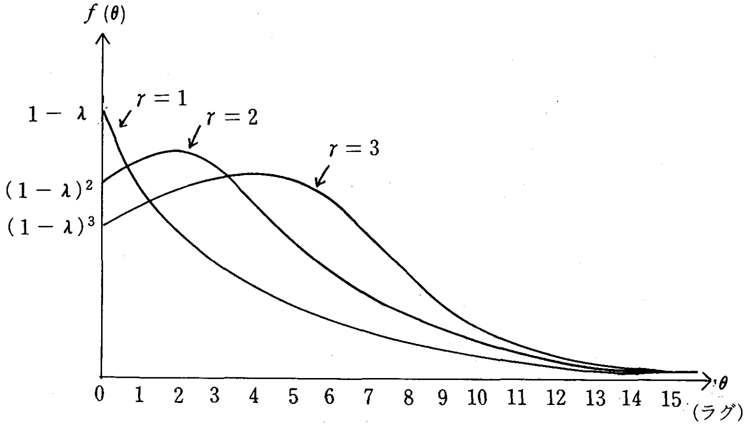
ここで，$\gamma = 1$ならば，パスカル分布は，幾何分布に一致するから，上の幾何分布を仮定したモデルは，このパスカル分布を仮定したモデルの特殊な場合とみることもできる。しかし，γが2以上の整数をとりながら大きくなるにつれて，ラグ分布は次第に異なってくる。これを第1図に示した。すなわち，γが2以上のとき，反応の最大点は，反応開始の初期時点ではなく，そのしば

---

32) $(1-x)^{-\gamma}$を$x=0$の近傍でテイラー展開すれば，

$$(1-x)^{-\gamma} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\gamma+i-1}{i}x^{i} \quad \cdots\cdots (88)$$

となる。(87)式は形式的展開式を利用している。



第1図

らく後に出現する。つまり，ラグ分布が正の偏りを示しており，反応は，その一部のみが即時に出現し，次第に増大しながらピークに達し，やがて，無限の将来に向かって衰退していくパターンを示す。通常，$\gamma=2$ または 3 のモデルが利用されるが，パラメータがやや多いのが難点である。

V　おわりに

上で述べた場合のほかにも，ラグ分布に何らかの統計的分布を仮定することによって，各種の定式化を行うことができる。たとえば，Griliches は一様分布を仮定することによって，

$$y_t=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{N}x_{t-i}+u_t \qquad (92)$$

なるタイプを提示しており，これは，もっとも単純なモデルである[33)]。

33) このモデルの推定に際しては，x_tの系列において，いくつかの長さの異なる移動平均を計算し，そのうち，もっとも適合度の高い長さを選べばよい。Griliches, Z., *op. cit.*, p. 25.

また，Jorgenson は，ラグ分布を特定しない一般的な推定モデル，

$$y_t=\sum_{i=0}^{m} P_i x_{t-i}+u_t \quad \cdots\cdots (93)$$

を提示している[34]。ただし，P_iは定数である。このモデルは，ラグ係数に制約がなく，一般的な適用可能性を備えている反面，変形が困難であることや，推定に際してパラメーターが多すぎる点に問題をもっている。

以上，経済現象に現われるラグの類型とモデル化について議論を整理してきた。しかしながら，統計モデルとしての定式化については，推定問題からのフィード・バックも必要であり，そうした情報も含めて，モデルの統計的判定を行わなければならない。この問題は，ほとんど未解決の分野である。

34）Jorgenson, D. W., *op. cit.*, pp. 135—137.