除法写像と代数的整閉性の関係について

村　田　憲太郎

目　次

Ⅰ　序

可換整域において Borewicz-Šafarevič による除法理論（Abk. B-S- 除法理論）がなりたてば，この整域が Noether の意味で整閉になることはよく知られている。また Ganzes Ideal に関する極大条件があれば，この逆がなりたつことも分っている。この事実は B-S- 除法理論における除法写像が Noether の意味の整閉性に対応することを示している。そこで自然に ‘Artin の意味の整閉性──それは Noether のそれより強い──に対応する除法写像は何か’ という Thema が考えられ，かつて筆者は，非可換系の立場から，これについて研究した［M］。

この小論の主な目的は［M］において得られた結果の一部を改良することと，その後新しく得られた結果を［M］の Fortsetzung として手取り早く報告することである。

第Ⅱ，Ⅲの 2 つの章で最小限の準備と以後の章で基本的な役を演ずる Divisor について述べ，第Ⅳ章でこの序文の冒頭で述べた事実を簡潔に示した。第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶの 3 つの章がこの小論の主要部で，Artin の整閉性を Ideal の型で詳しく述べて，除法写像との対応を考察した。

最後の第Ⅷ章について説明する前に，少し述べておきたいことは：一般に，乗法的 Ideal 論も含めて，乗法的な代数理論を半群などの純粋に乗法的な代数系の上で構成する試みは大体1920年代から’30年代にかけて Arnold, Clifford, Lorenzen 等によって創められ現在に至っている。その間，Ljapin, Clifford-Preston, Gräzer などの専門書がソ連，米国，西欧などで発刊され，今や非常に多くの研究書，さらに ‘Semigroup Forum’（Springer）と銘打った専門雑誌も刊行された。とくに最近 Weinert 著作の，半群論の商域に関する総合報告（Springer）では筆者による論文：On the Quotient-Semigroup of a Noncommutative Semigroup（1950）がその後の発展の原点になっていることを示している。

現今，日本人も込めて，多くの人がこの方向の研究を進めているが，この小論の最後の章はこれに沿うものである。それを具体的にいえば，この小論の第Ⅶ章までの主要結果を半群へ拡張したのであるが，それを v-Ideal 系に依って試みた。もちろんこのような拡張が半群への唯一のものではないけれども v-Ideal 系に依った理由は，半群が商半群（quotient-semigroup ; Quotientenhalbgruppe）をもつ場合には，Ideal の逆 Ideal のまた逆 Ideal がはじめの Ideal に回帰する v-Ideal 系がわれわれの理論にとって適正規模であるという理由（それを述べると長くなる！）があるからである。なお，Galois 対の節をはじめに置いたのは，v-Idealを簡潔に扱うための工夫である。最後の節で ‘除法類群’ なるもの（Divisorenklassengruppe とでも呼ぼうか）を導入しておいたが，これについては今後研究を進めたい。

最近の情報数学における半群論の位置は高く，その進展は，わが国の研究者の活発な寄与も含めて，目覚ましいものがある。半群の Ideal 論も近い将来この方面で重視されるであろう。

Ⅱ　Ordnung と Ideal 群を生成系にもつ Ideal 系

必ずしも可換でない環を単に “環” という。環 R は単位元 1 をもつものとし，R の部分環は 1 を含むものだけを扱うことにする。

1　Ordnung

環 R の部分環 $\boldsymbol{O}$ が次の条件をみたすとき，$\boldsymbol{O}$ を R の "Ordnung" という。

(1)　R の各元 x に対して $\alpha x \in \boldsymbol{O}$, $x\beta \in \boldsymbol{O}$ となる $\boldsymbol{O}$ に含まれる非零因子 α, β が存在する。

(2)　$\boldsymbol{O}$ の非零因子は R において逆元をもつ。

したがって，R の単群を $u(R)$ とかけば，$\boldsymbol{O}$ の非零因子の全部は $u(R) \cap \boldsymbol{O}$ である。そして R の任意の元 x は

$$x = \alpha^{-1}a = b\beta^{-1}, \qquad a, b \in \boldsymbol{O}\,;\ \alpha, \beta \in u(R) \cap \boldsymbol{O}$$

のようにかくことができるから，R は $\boldsymbol{O}$ の $u(R) \cap \boldsymbol{O}$ による商環になっている。

いま条件(1)を強くして下の条件を考える。

(1_S)　R の各元 x に対して $\alpha\boldsymbol{O}x \subseteq \boldsymbol{O}$, $x\boldsymbol{O}\beta \subseteq \boldsymbol{O}$ なる $\boldsymbol{O}$ の非零因子 α, β が存在する。

条件(1_S)と(2)をみたす部分環 $\boldsymbol{O}$ を R の "beschränkte Ordnung (Abk. b-Ordnung)" という。$\boldsymbol{O}$ が Ordnung であるというのは，R のどの元も $u(R) \cap \boldsymbol{O}$ の適当な元で左からも右からも分母が払えることを意味し，$\boldsymbol{O}$ が b-Ordnung というのは，R のどの元 x についても，その左整元倍のすべて $\boldsymbol{O}x$ が一斉に左から分母が払え，また右側についても同様であることを意味している。

R の 2 つの Ordnung $\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{O}_2$ に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{O}_2\beta_1 \subseteq \boldsymbol{O}_1,\ \ \alpha_2\boldsymbol{O}_1\beta_2 \subseteq \boldsymbol{O}_2$$

なる元 α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in u(R)$ が存在するとき，$\boldsymbol{O}_1$ と $\boldsymbol{O}_2$ とは対等であるという。このとき，α_1, $\beta_1 \in u(R) \cap \boldsymbol{O}_1$; α_2, $\beta_2 \in u(R) \cap \boldsymbol{O}_2$ とすることができる。互いに対等な Ordnung の全部の族の中で集合として極大なものがあれば，それを "Maximalordnung (Abk. m-Ordnung)" という。m-Ordnung が b-Ordnung であれば，それを "mb-Ordnung" という。

2　Ideal系

$\boldsymbol{O}$をRのOrdnungとする。Rの部分集合Aが次の3条件をみたすとき，AをRの“$\boldsymbol{O}$左Ideal”という。

(1)　Aは$\boldsymbol{O}$左加群である。

(2)　Aは$u(R)$の元を少なくとも1つ含む。

(3)　$A\lambda \subseteq \boldsymbol{O}$ なる元 $\lambda \in u(R)$ がある。

この元λは $u(R) \cap \boldsymbol{O}$ の元として採用できる。“$\boldsymbol{O}$右Ideal”も全く平行的に定義できる。Aが$\boldsymbol{O}$左かつ$\boldsymbol{O}$右Idealのとき，これを“$\boldsymbol{O}$-Ideal”または単に“Ideal”という。$A^2 \subseteq A$ なるIdealを“ganzes Ideal”という。Nicht ganzなIdealを“gebrochenes Ideal”という。$\boldsymbol{O}$に含まれるIdealはganzであるが逆は必ずしも正しくない。今後Idealの全部を$\boldsymbol{H}$で表わし，$\boldsymbol{O}$に含まれるIdealの全部を$\boldsymbol{I}$で表わす。条件(2)によってNullだけの集合はIdealから除外されていることを注意しておく。

さて，われわれが対象とするのは次の条件をみたす環である。それは$\boldsymbol{I}$に対する条件で，$\boldsymbol{I}$は下の4条件をみたす部分集合$\boldsymbol{E}$をもつ：

(1°)　$\boldsymbol{E}$はIdeal積に関して閉じている。

(2°)　$\boldsymbol{E}$のIdealは$\boldsymbol{H}$の中で可逆である。つまり $A \in \boldsymbol{E}$ に対して次のようなA'がある。

$$AA' = A'A = \boldsymbol{O},\ A' \in \boldsymbol{H}$$

(3°)　$\boldsymbol{I}$の各Ideal Aは$\boldsymbol{E}$にぞくするいくつかの（有限個または無限個）Idealの和集合で生成される：$A = \sup\{N \mid N \in \boldsymbol{A}\}$。ただし $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{E}$。

(4°)　$\boldsymbol{H}$の各Ideal Xは$\boldsymbol{E}$にぞくするIdealを適当にとってXの左から，また右から乗じて$\boldsymbol{O}$に含まれる。つまり$\boldsymbol{I}$の元にすることができる。よって下のようなA_i, B_iがある：

$$X = A_1 B_1' = B_2' A_2,\ A_i \in \boldsymbol{I},\ B_i \in \boldsymbol{E}\quad (i = 1, 2)$$

3　例（Prüfer 環など）

(a)　$\boldsymbol{O}$ を可換整域とし，R をその商体とする。零のみから成る Ideal を除いて，$\boldsymbol{O}$ に関するすべての Ideal の集合，その中で $\boldsymbol{O}$ に含まれるすべての Ideal の集合，さらにその中で Hauptideal の全部の集合をそれぞれ $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$ とすれば$(1^\circ)\sim(4^\circ)$をみたす。この場合 $\boldsymbol{O}$ は R の b-Ordnung である。

(b)　$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{Z}$（全有理整数環），$R=\boldsymbol{Q}$（有理数体），$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{Z}a \mid a\in\boldsymbol{Q},\ a\neq 0\}$，$\boldsymbol{I}=\{\boldsymbol{Z}a \mid a\in\boldsymbol{Z},\ a\neq 0\}$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}$ とすれば$(1^\circ)\sim(4^\circ)$をみたす。

(c)　一般に環 $\boldsymbol{O}$ において，任意の元 $a\in\boldsymbol{O}$ に対して $a\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}b$ なる元 $b\in\boldsymbol{O}$ が存在するものとする。このとき $a=ub$，$b=av$ だから $a=uav$，$b=ubv$ ところで $ua\in a\boldsymbol{O}$（両側 Ideal）であるから $ua=as$，よって $a=asv$。したがって a が左簡約元であれば $1=sv$ であるから v は右単元である。同様に a が右簡約元であれば u は左単元である。ここで用語上“左”，“右”が交錯したが，それは本質的なことではない。さて $\boldsymbol{O}$ の各元（零以外）がすべて左右簡約元であるとき，その全体 $\boldsymbol{O}\setminus\{0\}$ を分母系とする商体ができる。それを R とする。R における $\boldsymbol{O}$ に関する Ideal の全体を $\boldsymbol{H}$，そのうち $\boldsymbol{O}$ に含まれるもの全体を $\boldsymbol{I}$，さらにそのうち $\langle a\rangle=a\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}a$ $(a\neq 0)$ なるものの全体を $\boldsymbol{E}$ とすれば条件$(1^\circ)\sim(4^\circ)$をみたす。この場合 $\boldsymbol{O}$ は b-Ordnung である。

(d)　環 R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ が Prüfer 環のとき，すなわち $\boldsymbol{O}$ の有限生成 Ideal がすべて可逆であるとき，$\boldsymbol{H}$ をすべての Ideal，$\boldsymbol{I}$ を $\boldsymbol{O}$ に含まれる Ideal の全体，$\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{O}$ に含まれる有限生成 Ideal の全体とすれば，条件$(1^\circ)\sim(4^\circ)$をみたす。

この章の参考文献：[J]，[M-R]，[R]。

Ⅲ　Ideal の Divisorenoperation

Krull 環（可換）における整数論的 Ideal 論では divisorisches Ideal が重要である。それは Ideal A を含む Hauptideal 全部の共通分が A と一致する

Idealである。

この章では条件(1°)〜(4°）をみたす環（非可換）においてHauptideal系の代りに前の章で考えた$\boldsymbol{E}$から生成されるIdeal系をとって，Krull環の場合をわれわれの非可換環に拡張し，次章以下への準備とする。

1　Idealquotient

この章ではRを前述の$\boldsymbol{E}$をもつ環とする。半群$\boldsymbol{H}$の中で考えて$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{E}'$から生成される半群は群である。それを$g(\boldsymbol{E})$で表わす。$g(\boldsymbol{E})$は$\boldsymbol{H}$の束構造を引き継ぐとは限らない。

Cを$\boldsymbol{H}$にぞくする任意のIdealとすれば，$C=AB'$ ($A\in \boldsymbol{I}$, $B\in \boldsymbol{E}$) のように表わされるが，このAは$\boldsymbol{E}$の適当な部分集合$\boldsymbol{A}$によって $A=\sup\{N \mid N\in \boldsymbol{A}\}$ のように書くことができる。したがってCは$g(\boldsymbol{E})$の部分集合$\{NB' \mid N\in \boldsymbol{A}\}$の集合和によって生成される。

任意の2つのIdeal A, $B\in \boldsymbol{H}$ に対して

$$(A:B)_l=\{x\in R \mid xB\subseteq A\}$$
$$(A:B)_r=\{x\in R \mid Bx\subseteq A\}$$

をそれぞれAのBによる“左商”，“右商”という。これらはともにIdealである。以下しばらく左商についてのべるが，それらの結果は全く平行的に右商に対してもなりたつ。

まず $A\in \boldsymbol{H}$, $B\in g(\boldsymbol{E})$ に対して

$$(A:B)_l=AB'$$

がなりたつ。ただしB'はBの逆元である。まず $(A:B)_l=\sup\{C \mid C\in \boldsymbol{A}\}$ なる $\boldsymbol{A}\subseteq g(\boldsymbol{E})$ がある。すると $CB\subseteq A$ であるから $C\subseteq AB'$。したがって $(A:B)_l\subseteq AB'$ である。つぎに $AB'B=A\boldsymbol{O}=A$ であるから $AB'\subseteq (A:B)_l$ となり上記の等式が証明された。したがってとくに

$$(\boldsymbol{O} : B)_l = B',\ B \in g(\boldsymbol{E})$$

がなりたつ。

つぎに任意の Ideal $A \in \boldsymbol{H}$ に対して $A \subseteq C$ なる $C \in g(\boldsymbol{E})$ が存在することを示そう。まず $A = A_1 B'$ ($A_1 \in \boldsymbol{I},\ B \in \boldsymbol{E}$) のように表わされる。よって $A \subseteq B'$。したがって $B' = C$ とすればよい。

2　Divisorenoperation

前の節でのべたことから次のような $\boldsymbol{H}$ からそれ自身への Operation を定義することができる：

$$A \longmapsto \operatorname{div}(A) = \cap \{C \in g(\boldsymbol{E}) \mid A \subseteq C\}$$

これを "Divisorenoperation" という。$\operatorname{div}(A) = A$ なる Ideal A を "divisorisches Ideal", 簡単のため "div-Ideal" という。これについて次の 3 つの性質があることは明白である。

(1)　$A \subseteq \operatorname{div}(A)$

(2)　$A \subseteq \operatorname{div}(B) \ \Rightarrow\ \operatorname{div}(A) \subseteq \operatorname{div}(B)$

(3)　$A \in g(\boldsymbol{E}) \quad \Rightarrow\ \operatorname{div}(A) = A$

$A \in \boldsymbol{H}$ が div-Ideal であれば，任意の $B \in \boldsymbol{H}$ に対して $(A : B)_l$ も div-Ideal である。それはなぜかというと，適当な $\boldsymbol{B} \subseteq g(\boldsymbol{E})$ に対して $B = \sup\{N \mid N \in \boldsymbol{B}\}$ とかける。また $\operatorname{div}(A) = \cap \{C \in g(\boldsymbol{E}) \mid A \subseteq C\}$ であるから

$$\begin{aligned}
(A : B)_l &= (\operatorname{div}(A) : B)_l \\
&= ((\cap \{C \in g(\boldsymbol{E}) \mid A \subseteq C\}) : \sup\{N \mid N \in \boldsymbol{B}\})_l \\
&= \cap \{(C : N)_l \mid A \subseteq C,\ N \in \boldsymbol{B}\} \\
&= \cap \{CN' \mid A \subseteq C,\ N \in \boldsymbol{B}\} \\
&\supseteq \cap \{M \in g(\boldsymbol{E}) \mid (A : B)_l \subseteq M\} \\
&\supseteq (A : B)_l
\end{aligned}$$

したがって $(A:B)_l=\cap\{M\in g(\boldsymbol{E})\mid(A:B)_l\subseteq M\}=\mathrm{div}((A:B)_l)$ である。

またつぎの等式がなりたつ：任意の A に対して

$$\mathrm{div}(A)=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l$$

これを証明するため $A\subseteq N$ なる $N\in g(\boldsymbol{E})$ をとれば $(\boldsymbol{O}:A)_l\supseteq(\boldsymbol{O}:N)_l=N'$ であるから

$$(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l\subseteq(\boldsymbol{O}:N')_l=(N')'=N$$
$$(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l\subseteq\mathrm{div}(A)$$

つぎに $A=\sup\{M\in\boldsymbol{A}\}$，$\boldsymbol{A}\subseteq g(\boldsymbol{E})$，とかけるから

$$M'=(\boldsymbol{O}:M)_l\supseteq(\boldsymbol{O}:A)_l$$
$$M=(\boldsymbol{O}:M')_l=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:M)_l)_l\subseteq(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l$$

したがって $A\subseteq(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l$，$\mathrm{div}(A)\subseteq(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l$ となる。これで証明された。

この結果を用いて $(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l)_l=\mathrm{div}(\boldsymbol{O}:A)_l\supseteq(\boldsymbol{O}:A)_l$ また $(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l\subseteq(\boldsymbol{O}:A)_l$ は当然である。よって次の等式がなりたつ：

$$(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l=(\boldsymbol{O}:A)_l$$

そこで $\mathrm{div}(\mathrm{div}(A))=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l)_l=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l=\mathrm{div}(A)$。つまり次の巾等性がなりたつ。

$$\mathrm{div}(\mathrm{div}(A))=\mathrm{div}(A)$$

以上は左商についてばかりのべたが，全く平行的に右商についても上記の諸性質は正しい。さてここで左商と右商の関係として

$$(\boldsymbol{O}: A)_l = (\boldsymbol{O}: \mathrm{A})_r$$

が任意の $A \in \boldsymbol{H}$ に対して成立する。それは $N \in g(\boldsymbol{E})$ に対して下の関係があることから明白。

$$NA \subseteq \boldsymbol{O} \Leftrightarrow A \subseteq N' \Leftrightarrow AN \subseteq \boldsymbol{O}$$

ついで，任意の $A, B \in \boldsymbol{H}$ に対して下の等式がなりたつ。

$$\mathrm{div}(AB) = \mathrm{div}(\mathrm{div}(A) \bullet B) = \mathrm{div}(A \bullet \mathrm{div}(B)) = \mathrm{div}(\mathrm{div}(A)\mathrm{div}(B))$$

これを示すため，まず左商のみの関係式から $(\boldsymbol{O}: \mathrm{div}(AB))_l = (\boldsymbol{O}: AB)_l = ((\boldsymbol{O}: B)_l : A)_l = ((\boldsymbol{O}: \mathrm{div}(B)_l) : A)_l = (\boldsymbol{O}: A \bullet \mathrm{div}(B))_l$ であるから $\mathrm{div}(AB) = \mathrm{div}(\mathrm{div}(AB)) = (\boldsymbol{O}: (\boldsymbol{O}: \mathrm{div}(AB))_l)_l = (\boldsymbol{O}: (\boldsymbol{O}: AB)_l)_l = (\boldsymbol{O}: ((\boldsymbol{O}: B)_l : A_l)_l = (\boldsymbol{O}: ((\boldsymbol{O}: \mathrm{div}\, B)_l : A)_l)_l = (\boldsymbol{O}: (\boldsymbol{O}: A \bullet \mathrm{div}(B))_l)_l = \mathrm{div}(A\,\mathrm{div}(B))$ したがって $\mathrm{div}(AB) = \mathrm{div}(A\,\mathrm{div}(B))$ である。今度は右商を用いて $\mathrm{div}(AB) = \mathrm{div}(\mathrm{div}(A) \bullet B)$ が示されるから $\mathrm{div}(AB) = \mathrm{div}(\mathrm{div}(A)\mathrm{div}(B))$ も示される。

ついで，$\mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} A_i) \subseteq \mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} \mathrm{div}(A_i)) \subseteq \mathrm{div}(\mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} A_i) + \cdots + \mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} A_i)) = \mathrm{div}(\mathrm{div}\,\Sigma_{i=1}^{n} A_i)) = \mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} A_i)$。よって $\mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} A_i) = \mathrm{div}(\Sigma_{i=1}^{n} \mathrm{div}(A_i))$ が示された。

3　Divisorisches Ideal 系の束半群

任意の Ideal A，$B \in \boldsymbol{H}$ に対して

$$A * B := \mathrm{div}(AB)$$

により Verknüpfungssymbol "$*$" を定義する。$*$ を乗法と見て "$*$-Multiplikation", "$*$-Produkt" という用語を用いる。

前節の末尾でした計算と同じようにして，次の等式を確かめることができる。

$$\operatorname{div}(\sup\{A \in \boldsymbol{F}\}) * \operatorname{div}(B) = \operatorname{div}(\sup\{\operatorname{div}(A) * \operatorname{div}(B) \mid A \in \boldsymbol{F}\})$$
$$\operatorname{div}(B) * \operatorname{div}(\sup\{A \in \boldsymbol{F}\}) = \operatorname{div} \operatorname{div}(B) * \sup\{\operatorname{div}(A) \mid A \in \boldsymbol{F}\})$$

div-Idealの全体は $\{\operatorname{div}(A) \mid A \in \boldsymbol{H}\}$ と一致していることは前節の div $(\operatorname{div}(A)) = \operatorname{div}(A)$ より明らかである。一般に $\boldsymbol{H}$ の部分集合 $\boldsymbol{U}$ に対して $\{\operatorname{div}(A) \mid A \in \boldsymbol{U}\}$ を $\operatorname{div}(\boldsymbol{U})$ と略記すれば div-Idealの全体は $\operatorname{div}(\boldsymbol{H})$ とかくことができる。

以上述べてきたことをまとめて次の定理を得る。

定理1　$\operatorname{div}(A) \leqq \operatorname{div}(B)$ を $\operatorname{div}(B) \sqsubseteq \operatorname{div}(A)$ によって定義すれば $(\operatorname{div}(\boldsymbol{H}), \leqq, *)$ は束半群を作る。$\boldsymbol{H}/\sim$ を $A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{div}(A) = \operatorname{div}(B)$ によって定義し，各 Klasse $K(A), K(B), \cdots$ の間に順序と積を $K(A) \sqsubseteq K(B) \Leftrightarrow \operatorname{div}(A) \leqq \operatorname{div}(B)$; $K(A) \circ K(B) = K(\operatorname{div}(AB))$ によって定義すれば

$$(\operatorname{div}(\boldsymbol{H}), \leqq, *) \cong (\boldsymbol{H}/\sim, \sqsubseteq, \circ)$$

がなりたつ。これは条件完備な束半群としての Isomorphismus である。

Ⅳ　Borewicz-Šafarevič の写像

Borewicz-Šafarevič の Divisorentheorie は［B-S］の第3章でのべてあるが，それに必要な写像に付与する条件は余分なものを含んでいるのでこの章ではそれを削除してのべる。そしてその Divisorentheorie と Noether の意味の整閉性との関係をのべて次章以後への準備とする。

1　素元分解半群

$\boldsymbol{D}$ を単位元 $\boldsymbol{e}$ をもつ可換半群とする。$\boldsymbol{D}$ の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$ なる元 $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{D}$ が存在するとき $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の“約元”（Teiler）$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ の“倍元”（Viel-faches）という。なお $\boldsymbol{D}$ の単群は $\boldsymbol{e}$ のみよりなるものとする。したがって

“同伴” なる概念は “全等” となる。元$\boldsymbol{p}$が$\boldsymbol{e}$と$\boldsymbol{p}$以外の約元をもたないとき，$\boldsymbol{p}$を “素元” という。

可換半群$\boldsymbol{D}$が次の3条件をみたすとき，$\boldsymbol{D}$を “素元分解半群” という。

(1) $\boldsymbol{D}$は素元をもつ。その全部の集合を記号$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$で表わす。

(2) $\boldsymbol{D}$の各元$\boldsymbol{a}$は有限個の素元の積として表わされる：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n$ ($n \geqq 0$), $\boldsymbol{p}_i \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$。ただし $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e} \Leftrightarrow n=0$ とする。

(3) 上記の分解 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n$ は積の可換性を度外において一意的である。

素元分解半群はその定義からその半群としての構造は$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$の Mächtigkeit $\#\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$によって定まる。つまり2つの素元分解半群$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$に対して$\#\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_1)=\#\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)$であれば$\boldsymbol{D}_1$と$\boldsymbol{D}_2$は同型である。その同型対応の個数は$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_i)$の置換の個数だけある。

素元分解半群には自然に束の構造を入れることができる：2つの元$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$それぞれの素元分解に現われる素元の全部を$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m$とし，同じ素元を Potenz として，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$についてそれぞれ Potenzprodukt の形にまとめると：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}_1^{e(1)}\cdots\boldsymbol{p}_m^{e(m)}, \qquad e(i) \geqq 0$$
$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}_1^{f(1)}\cdots\boldsymbol{p}_m^{f(m)}, \qquad f(i) \geqq 0$$

ただし同じiについて$e(i)$も$f(i)$も0にはならない。いま “順序” $\leqq$ を，すべてのiについて $e(i) \geqq f(i)$ のとき $\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{b}$ によって定義すれば$\boldsymbol{D}$はこの順序によって束になる。結と交は次によって与えられる。

$$\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}_1^{\min(e(1),f(1))}\cdots\boldsymbol{p}_m^{\min(e(m),f(m))}$$
$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}_1^{\max(e(1),f(1))}\cdots\boldsymbol{p}_m^{\max(e(m),f(m))}$$

一般に負でない3つの整数e, f, gについて $\min(e,f)+g=\min(e+g,\ f+g)$であり，max についても同様であるから ($D, \leqq, \cdot$) は束半群である。また$\max(\min(e,f),g)=\min(\max(e,g),\max(f,g))$ (max と min を取り代えてもよい) であるから束 ($\boldsymbol{D}, \leqq$) は分配束である。

いま，さらに（$\boldsymbol{D},\cdot$）から自由Abel群を作れば，つまり$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$から自由Abel群を生成させればこの群$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$は束群になり，そのKegel（integraler Teil）は（$\boldsymbol{D},\leqq$）と一致する。このように自由Abel群ができるのは$\boldsymbol{D}$が自由半群であるからである。そうして$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$は各素元$\boldsymbol{p}$から生成される無限巡回群$\langle \boldsymbol{p}\rangle$の制限直積に他ならない。そして$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$における順序は$\boldsymbol{D}$における順序と同じようにすればよい。

この束群では $\boldsymbol{a}\longmapsto\boldsymbol{a}^{-1}$ はDualautomorphismusになっている。とくに$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$が共に$\boldsymbol{D}$の元で共通の素因子をもたないときは $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}$ であるから $\boldsymbol{e}\leqq\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\leqq\boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$ なる任意の2元$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対しては $\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}$ がなりたつ。

2　Borewicz-Šafarevič の Divisor

$\boldsymbol{O}$を可換整域とし $\boldsymbol{O}^*=\boldsymbol{O}\setminus\{0\}$ とおく。$\boldsymbol{O}^*$は零因子をもたないから乗法半群である。$\boldsymbol{D}$を前節でのべた素元分解半群とする。$\boldsymbol{O}^*$から$\boldsymbol{D}$の中への，半群としてのHomomorphismus

$$\phi:\boldsymbol{O}^*\longrightarrow\boldsymbol{D}\,;\,a\longmapsto\phi(a)$$

が次の3条件をみたすとき，ϕをBorewicz-Šafarevičの写像（Abk. B-S-写像）という。

（d_1）$a,b\in\boldsymbol{O}^*$ に対して$\phi(a)$が$\phi(b)$の倍元であればaはbの倍元である。

（d_2）各 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}$に対して有限個の$a_1,\cdots,a_n\in\boldsymbol{O}^*$が存在して $\phi(a_1)\vee\cdots\vee\phi(a_n)=\boldsymbol{d}$ である。（nは$\boldsymbol{d}$によって変る）

（d_3）$\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}$ の倍元となる$\phi(x)$の全部の $x\in\boldsymbol{O}^*$ を $\Delta(\boldsymbol{d})$ とかく：$\Delta(\boldsymbol{d})=\{x\in\boldsymbol{O}^*\mid\phi(x)\leqq\boldsymbol{d}\}$。このとき"$\Delta(\boldsymbol{a})=\Delta(\boldsymbol{b})\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"である。

以後$\boldsymbol{D}$の元を$\boldsymbol{O}^*$（または$\boldsymbol{O}$）のDivisorという。一般には$\boldsymbol{D}$の元が$\boldsymbol{O}^*$の元の像になっていない。とくに$\boldsymbol{O}^*$の元の像になっているものをHaupt-divisorという。$\boldsymbol{e}=\phi(1_O)$ をEinheits-divisorという。$\boldsymbol{O}^*$の元a,bが同伴

であるための必十条件は $\phi(a)=\phi(b)$ である。また $\boldsymbol{O}$ の単群 $u(\boldsymbol{O})=\{x\in\boldsymbol{O}^*\mid\phi(x)=\boldsymbol{e}\}$ である。

条件 (d_1) について：もし $\phi(a)=\phi(b)\boldsymbol{c}$ なる $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{D}$ があれば $a=bc$ なる $c\in\boldsymbol{O}^*$ があるから $\phi(a)=\phi(bc)=\phi(b)\phi(c)$ である。そこでさきにのべた群 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$ の中で考えれば $\boldsymbol{c}=\phi(c)$ となり $\boldsymbol{c}$ は Hauptdivisor である。しかし $\phi(\boldsymbol{O}^*)=\{\phi(a)\mid a\in\boldsymbol{O}^*\}$ の中だけではたとえば 2 元の $g.g.T.$; $k.g.V.$ などは存在するとは限らないので Hauptdivisor のみの除法理論は成立するとは言い難い。しかし $\boldsymbol{O}^*$ に対して $\boldsymbol{D}$ と ϕ が見付かれば，$\boldsymbol{O}^*$ における除法理論が展開できるから，Drittensystem（$\boldsymbol{O}^*,\phi,\boldsymbol{D}$）によって $\boldsymbol{O}$ の除法理論を表示して差支えない。この意味で記号（$\boldsymbol{O}^*,\phi,\boldsymbol{D}$）そのものを “Divisorentheorie” と呼ぶ習慣である（[B-S]，[M]）。

[B-S] においては上記の条件 (d_2) は違った形のものになっている。それは

(d_2^*)　$\phi(a)$，$\phi(b)$ が $\boldsymbol{d}$ を約元にもてば，$\phi(a\pm b)$ も $\boldsymbol{d}$ を約元にもつ。

である。この条件については後にもっと一般的な立場で考察することになろう。

Borewicz-Šafarevič によれば（$\boldsymbol{O}^*,\phi_1,\boldsymbol{D}_1$），（$\boldsymbol{O}^*,\phi_2,\boldsymbol{D}_2$）を 2 つの任意の除法理論とすれば $\sigma:\boldsymbol{D}_1\to\boldsymbol{D}_2$ なる Isomorphism が存在して，σ によって $\boldsymbol{D}_1$ の Hauptdivisor には $\boldsymbol{D}_2$ の Hauptdivisor が対応する。すなわち $\sigma\circ\phi_1=\phi_2$ がなりたつ。つまり $\boldsymbol{O}^*$

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{O}^* \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ \boldsymbol{D}_1 \arrow[rr, "\sigma"'] & & \boldsymbol{D}_2 \end{tikzcd}$$

の除法理論は上のような Isomorphismus の範囲で一意的に定まるというのである。

B-S- 写像はその定義から $\boldsymbol{O}$ の零とことなる 1 つの Hauptideal を 1 つの

Divisor (Hauptdivisor) に写すから，$\boldsymbol{O}$ の零でないすべての Ideal $\mathscr{J}(\boldsymbol{O})$ から $\boldsymbol{D}$ への Epimorphismus に verlagern することができる。そのとき Hauptideal の像が Hauptdivisor になっているのである。$\mathscr{J}(\boldsymbol{O})$ は束半群で上の Epimorphismus は $\mathscr{J}(\boldsymbol{O})$ から $\boldsymbol{D}$ への束半群としての対応を与えている。これは $\boldsymbol{O}$ のすべての gebrochenes Ideal の作る束半群から束群 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$ への束半群としての Epimorphismus にまで verlängern できる。この事実を踏まえて，後に B-S- 写像を非可換環の場合に一般化する。

$\boldsymbol{O}$ に含まれる，零でない，Hauptideal の全部を $\mathscr{H}(\boldsymbol{O})$，$\boldsymbol{O}$ の商体 $\boldsymbol{K}$ の中で考えて gebrochenes Ideal の全体を $\mathscr{F}(\boldsymbol{O})$ とする。上述の事実を schematisieren しておく。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{O}^* \arrow[r, "\langle\,\rangle"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathscr{H}(\boldsymbol{O}) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\phi"] & \mathscr{J}(\boldsymbol{O}) \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathscr{F}(\boldsymbol{O}) \arrow[d] \\
 & \phi(\boldsymbol{O}^*) \arrow[r, dash] & \boldsymbol{D} \arrow[r, dash] & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})
\end{tikzcd}
$$

3　除法写像と Noether の整閉性

この節でも $\boldsymbol{O}$ を可換整域とし，$\boldsymbol{K}$ をその商体とする。“$\boldsymbol{O}^*$ が B-S- 写像をもてば，すなわち $\boldsymbol{O}$ において除法理論がなりたてば，$\boldsymbol{O}$ は $\boldsymbol{K}$ において Noether の意味で整閉である”。この節の目的はこの事実の証明をして後章への準備とすることである。

いま $\boldsymbol{K}$ の元 t に対して $\boldsymbol{O}$ の元 $a_1, \cdots, a_n$ が存在して下の等式がなりたつとする：

$$t^n = a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_1 t^{n-1}$$

もし t が $\boldsymbol{O}$ に含まれないとすると $t = ab^{-1}$; $a, b \in \boldsymbol{O}^*$ において b は a の約元でない。そこで $\phi : \boldsymbol{O}^* \longrightarrow \boldsymbol{D}$; $c \longmapsto \phi(c)$ を与えられた B-S- 写像とすると $\phi(b)$ は $\phi(a)$ の約元でない（(d_1)による)。いま $\phi(a)$，$\phi(b)$ の素元分解を

$$\phi(a) = p_1^{e(1)} \cdots p_m^{e(m)}, \qquad e(i) \geqq 0$$
$$\phi(b) = p_1^{f(1)} \cdots p_m^{f(m)}, \qquad f(i) \geqq 0$$

としたとき，少なくとも 1 つの i について $e(i) < f(i)$ となる。よって $p_i^{e(i)+1}$ は $\phi(b)$ の約元になる。そこで t の関係式から得られる次の

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} a^k b^{n-k}$$

を用いて Hauptideal に写せば下のようになる：

$$\langle a \rangle^n \subseteq \sum_{k=0}^{n-1} \langle a_{n-k} \rangle \langle a \rangle^k \langle b \rangle^{n-k} \subseteq \sum_{k=0}^{n-1} \langle a \rangle^k \langle b \rangle^{n-k}$$

ただし〈 〉は Hauptideal の記号である。この式の左の包含関係は一般に $\langle \Sigma\, c_k \rangle \subseteq \Sigma \langle c_k \rangle$ より，また右の包含関係は $a_{n-k} \in \boldsymbol{O}^*$ $(k = 0, \cdots, n-1)$ より分る。すでに前節でのべておいたように，$\phi(c) = \phi(\langle c \rangle)$ であり ϕ は $\mathscr{J}(\boldsymbol{O})$ から $\boldsymbol{D}$ への束半群としての Epimorphismus であるから，上の包含関係を ϕ で写して下の不等式を得る：

$$\phi(a)^n \leqq \bigvee_{k=0}^{n-1} \phi(a)^k \phi(b)^{n-k}$$

この右辺の各項の素因子 p_i の Exponent はそれぞれ $e(i)k + (e(i)+1)(n-k) = e(i)n + (n-k)$ より小さくはない。$k = 0, 1, \cdots, n-1$ として，これらのうちで最小なものは $e(i)n+1$ であるから $\phi(a)^n$ は $p_i^{e(i)n+1}$ を約元としてもつ。ところが $\phi(a)^n$ は“キッカリ” $p_i^{e(i)n}$ を約元としている。このことは矛盾である。

このようにすでに分っている結果［B-S；Kap Ⅲ］を Ideal 束の言葉で改良したのは後の章でのべる非可換環の場合に適合させるためである。

この章の参考文献：［B-S］，［M］。

V　Artinの整閉性

この章では可換整域の場合と，$\boldsymbol{E}$の条件(1°)〜(4°)をみたす非可換環の場合についてArtinの整閉性を考察する。

1　可換整域の整閉性

$\boldsymbol{O}$を可換整域とし，$\boldsymbol{K}$をその商体とする。$\boldsymbol{K}$の1つの元tをとって，そのすべての正ベキ：t^n $(n=1,2,\cdots)$ が一斉に1つの元（$a(\neq 0)$ で分母が払えるなら，t ははじめから$\boldsymbol{O}$の元である；換言すれば“eigentlichな$\boldsymbol{K}$元はどれをとってもそのすべての正ベキを1つの元（$\neq 0$）で分母を払うことができない”というのがArtinの整閉性である。再度かけば

$$a\{t^n \mid n \in \boldsymbol{N}\} \subseteq \boldsymbol{O},\ \ a \neq 0\ \Rightarrow\ t \in \boldsymbol{O}$$

ただし$\boldsymbol{N}$はすべての正整数の集合である。この条件で注目すべきことは，Noetherの整閉と違って，加法が関与していないことである。

ここで念のため，Artinの整閉性をもたない実例を挙げておこう。有理数体$\boldsymbol{Q}$に$\sqrt{-3}$を添加した体$\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$において$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-3}]$（$\boldsymbol{Z}$は有理整数環）はOrdnungであるがこれはArtinの整閉性をもたない。たとえば $t=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ は$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-3}]$の元ではないが，すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $2\cdot t^n \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-3}]$ である。

つぎにArtinの整閉性からNoetherの整閉性が導かれることも見ておこう：$\boldsymbol{K}$の元tが $t^n=a_n+a_{n-1}t+\cdots+a_1t^{n-1}$, $a_i\in\boldsymbol{O}$, をみたしているとする。$at^i\in\boldsymbol{O}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ なる元 $a\in\boldsymbol{O}^*$ をとることができるから $at^n\in\boldsymbol{O}$。引きつづいて $at^{n+1}\in\boldsymbol{O},\cdots$。よって$\boldsymbol{O}$がArtinの意味で整閉であれば $t\in\boldsymbol{O}$ となる。

Noetherの意味の整閉性からArtinの整閉性は導かれないらしいが，もし$\boldsymbol{O}$のIdealに関してTeilerkettensatzがあれば，これが導かれる。

$\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{O}' \subseteq \boldsymbol{K}$ なる部分環（明らかにOrdnung）$\boldsymbol{O}'$ に対して $a\boldsymbol{O}' \subseteq \boldsymbol{O}$ なる $a(\neq 0)$ があれば $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}'$ であるとき，$\boldsymbol{O}$ はArtinの整閉性をもち，またその逆も正しい：いま $\boldsymbol{O}$ がArtinの整閉性をもつとする。$\boldsymbol{O}'$ の任意の元 t に対して $\{at^n \mid n \in N\} \subseteq a\boldsymbol{O}' \subseteq \boldsymbol{O}$。よって $t \in \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}' \subseteq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}' = \boldsymbol{O}$ である。逆に $\{at^n \mid n \in N\} \subseteq \boldsymbol{O}$, $a \neq 0$, とする $\boldsymbol{O}$ と t から生成される部分環を $\boldsymbol{O}'$ とすれば $\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{O}'$ で $\boldsymbol{O}'$ の任意の元は $\Sigma_i a_i t^i$, $a_i \in \boldsymbol{O}$ であるから $a\boldsymbol{O}' \subseteq \boldsymbol{O}$ である。よって $\boldsymbol{O}' = \boldsymbol{O}$, $t \in \boldsymbol{O}$ である。

次の3条件は同値である：

(a_1)　$\boldsymbol{O}$ はArtinの整閉性をみたす。

(a_2)　$AT^n \in \boldsymbol{O}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $A \neq (0)$ $\Rightarrow$ $T \subseteq \boldsymbol{O}$

ただし A, T はIdealで $A \subseteq \boldsymbol{O}$ としてよい。

(a_3)　$\langle a \rangle \langle t \rangle^n \subseteq \boldsymbol{O}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $\langle t \rangle \subseteq \boldsymbol{O}$

ただし $a \in \boldsymbol{O}^*$ としてよい。

2　非可換環におけるArtinの整閉性

この節では R を第2章でのべた環とし，$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$ 等の記号はそのまま踏襲する。

$\boldsymbol{O}$ を R のOrdnungとして次の条件を考える。ただし以下において，$at^N \in \boldsymbol{O}$ は，N を全自然数として，“すべての $n \in N$ に対して $at^n \in \boldsymbol{O}$” を意味する。$CT^N \subseteq \boldsymbol{O}$ 等についても同様である。

(A_{1l})　$at^N \in \boldsymbol{O}$; $a \in u(R)$, $t \in R$ $\Rightarrow$ $t \in \boldsymbol{O}$

(A_{1r})　$t^N a \in \boldsymbol{O}$; $a \in u(R)$, $t \in R$ $\Rightarrow$ $t \in \boldsymbol{O}$

(A_{2l})　$CT^N \subseteq \boldsymbol{O}$; $C, T \in \boldsymbol{H}$ $\Rightarrow$ $T \subseteq \boldsymbol{O}$

(A_{2r})　$T^N C \subseteq \boldsymbol{O}$; $C, T \in \boldsymbol{H}$ $\Rightarrow$ $T \subseteq \boldsymbol{O}$

(A_{3l})　$MT^N \subseteq \boldsymbol{O}$; $M \in \boldsymbol{E}$, $T \in \boldsymbol{H}$ $\Rightarrow$ $T \subseteq \boldsymbol{O}$

(A_{3r})　$T^N M \subseteq \boldsymbol{O}$; $M \in \boldsymbol{E}$, $T \in \boldsymbol{H}$ $\Rightarrow$ $T \subseteq \boldsymbol{O}$

(A_{4l})　$\boldsymbol{O}a\boldsymbol{O} \cdot (\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O} + \boldsymbol{O})^N \subseteq \boldsymbol{O}$; $a \in u(R)$, $t \in R$ $\Rightarrow$ $t \in \boldsymbol{O}$

(A_{4r})　$(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O})^N\cdot\boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O}\subseteq\boldsymbol{O}$; $\alpha\in u(R)$, $t\in R\ \Rightarrow\ t\in\boldsymbol{O}$

上記の $\alpha\in u(R)$ は $\alpha\in u(R)\cap\boldsymbol{O}$ で置きかえてもよいし，また $C\in\boldsymbol{H}$ については $C\in\boldsymbol{I}$ としてもよい。以下 $k=l$ または $k=r$ として，$(\mathrm{A}_{1k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{2k})$ である。また $(\mathrm{A}_{1k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{4k})$，$(\mathrm{A}_{2k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{3k})$ でもある。$\boldsymbol{O}$ は必ずしも b-Ordnung ではないので (A_{4k}) における $\boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O}$ は Ideal ではない。したがって $(\mathrm{A}_{2k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{4k})$ は一般には成立しない。また $(\mathrm{A}_{4k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{1k})$ も一般には成立しない。しかしここで次が成立する：

補題1　(A_{2l})，(A_{2r})，(A_{3l})，(A_{3r}) は同値である。

証明　(A_{2l}) がなりたつとする。$M\in C$, $M\in\boldsymbol{E}$ なる M を任意にとると $MT^N\subseteq\boldsymbol{O}$ よって $T^N\subseteq M'\boldsymbol{O}=M'$ (M の逆元) したがって $T^NM\subseteq\boldsymbol{O}$ であるが，このような M 全部の和集合が C であることから $CT^N=T^NC$ となる。よって $(\mathrm{A}_{2l})\Rightarrow(\mathrm{A}_{2r})$。他の部分も上記の中で示されている。

$\boldsymbol{O}$ が (A_{ik}) $(i=2,3)$ をみたすとき，$\boldsymbol{O}$ は "Artin の Ideal 型整閉性" をもつという。つぎに $\boldsymbol{O}$ が b-Ordnung の場合を考える。

補題2　$\boldsymbol{O}$ が b-Ordnung のときは次がなりたつ：$(\mathrm{A}_{1l})\Leftrightarrow(\mathrm{A}_{1r})$，$(\mathrm{A}_{3k})\Leftrightarrow(\mathrm{A}_{4k})$ $(k=l,r)$。

証明　(A_{1l}) を仮定する。$t^N\beta\in\boldsymbol{O}$, $\beta\in u(R)$, とすれば $t^N\in\boldsymbol{O}\beta^{-1}$。そこで $\alpha\boldsymbol{O}\beta^{-1}\subseteq\boldsymbol{O}$ となる $\alpha\in u(R)$ がとれるから $\alpha t^N\in\alpha\boldsymbol{O}\beta^{-1}\subseteq\boldsymbol{O}$。したがって $t\in\boldsymbol{O}$ となり (A_{1r}) が導かれた。全く対称的に $(\mathrm{A}_{1r})\Rightarrow(\mathrm{A}_{1l})$ である。つぎに $(\mathrm{A}_{3k})\Rightarrow(\mathrm{A}_{4k})$ は自明である。その逆を示すため，(A_{4l}) を仮定する：$MT^N\subseteq\boldsymbol{O}$, $M\in\boldsymbol{E}$, $T\in\boldsymbol{H}$ とする。$\alpha\in M\cap u(R)$ を固定し，$t\in T$ を任意にとる。$\boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O}\cdot(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O})^n\subseteq M((\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O})^n+(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O})^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{O})$

$\subseteq M(T^n+T^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{O}) = MT^n+MT^{n-1}+\cdots+M \subseteq \boldsymbol{O}$ がすべての $n \in N$ についてなりたつ。よって $t \in \boldsymbol{O}$, $T \subseteq \boldsymbol{O}$ であるから (A_{3l}) が導かれた。$(A_{4r}) \Rightarrow (A_{3r})$ についても同様である（証明終）。

つぎに Ordnung $\boldsymbol{O}$ について

(b*)
$$xy \in \boldsymbol{O} \Rightarrow x\boldsymbol{O}y \subseteq \boldsymbol{O}$$

がなりたつとする。x, y 共に $\boldsymbol{O}$ の元ならこれは当然であるが，x, y のうち少なくとも一方が $\boldsymbol{O}$ 元でないときは一般にはなりたたない。すぐ判ることは (b*) がなりたてば $a\boldsymbol{O}a^{-1} \subseteq \boldsymbol{O}$, $a\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}a$, $a \in u(R)$, であり，このときもちろん $\boldsymbol{O}$ は b-Ordnung になる。(b*) がなりたつとき $\boldsymbol{O}$ を "b*-Ordnung" ということにすると下の補題は明らかである。

補題 3　$\boldsymbol{O}$ が b*-Ordnung のとき 8 個の条件 (A_{ik}) $(i=1,2,3,4\,;\,k=l,r)$ は同値である。

証明　b*-Ordnung は b-Ordnung であるから (A_{ik}) $(i=1,2,3,4\,;\,k=l,r)$ の 6 条件は互いに同値である。$(A_{4k}) \Rightarrow (A_{1k})$ $(k=l,r)$ を示せばよい。いま (A_{4l}) を仮定する。$at^n \in \boldsymbol{O}$ が任意の $n \in N$ についてなりたつとすれば $\boldsymbol{O}a\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O})^n \subseteq \boldsymbol{O}$ が (b*) を用いて示される。よって $(\boldsymbol{O}a\boldsymbol{O})\cdot((\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O})^n+(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O})^{n-1}+\cdots+(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O})+\boldsymbol{O}) \subseteq \boldsymbol{O}$ である。すなわち $(\boldsymbol{O}a\boldsymbol{O})(\boldsymbol{O}t\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O})^n \subseteq \boldsymbol{O}$ よって $t \in \boldsymbol{O}$ となる。$(A_{4r}) \Rightarrow (A_{1r})$ も同様である。あとは前の補題によって明らかである（証明終）。

この節の終りに次の定理を証明する：

定理 1　b-Ordnung $\boldsymbol{O}$ が m-Ordnung であるための必十条件は $\boldsymbol{O}$ が (A_{ik}) $(i=2,3,4\,;\,k=l,r)$ のうちのどれか 1 個をみたすことである。すなわち $\boldsymbol{O}$ が Artin の Ideal 型整閉性をもつことである。

証明　$\boldsymbol{O}^\wedge$をRのOrdnungで $\boldsymbol{O}^\wedge \subseteq \boldsymbol{O}$ かつ $\alpha\boldsymbol{O}^\wedge\beta \subseteq \boldsymbol{O}$ なる $\alpha, \beta \in u(R) \cap \boldsymbol{O}$ が存在するものとする。$\alpha^{-1}\boldsymbol{O}\lambda \subseteq \boldsymbol{O}$ なる $\lambda \in u(R) \cap \boldsymbol{O}$ をとることができるから $\boldsymbol{O}^\wedge\beta\lambda \subseteq \boldsymbol{O}$ である。$\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}^\wedge = \boldsymbol{O}^\wedge$ は明らかであるから $\boldsymbol{O}^\wedge$ は左Idealである。またこれと左右対称に考えれば $\boldsymbol{O}^\wedge$ は右Idealでもある。そこで $C \subseteq \boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O},\ N \in \boldsymbol{O}\beta\boldsymbol{O}$ である $C,\ N \in \boldsymbol{E}$ をとれば次のようになる：

$$C\boldsymbol{O}^\wedge N \subseteq \boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}^\wedge\boldsymbol{O}\beta\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{O}\alpha\boldsymbol{O}^\wedge\beta\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{O}\boldsymbol{O}\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{O}^\wedge \subseteq C'\boldsymbol{O}N' = C'N' = (NC)', \qquad \boldsymbol{O}^\wedge NC \subseteq \boldsymbol{O}$$

したがってIdeal $\boldsymbol{O}^\wedge$ に対して $(\boldsymbol{O}^\wedge)^n(NC) \subseteq \boldsymbol{O}$ がすべての $n \in \boldsymbol{N}$ についてなりたつ。ここで条件(A_{2r})を仮定すれば $\boldsymbol{O}^\wedge \subseteq \boldsymbol{O}$ となり $\boldsymbol{O}^\wedge = \boldsymbol{O}$ でなくてはならない。すなわち$\boldsymbol{O}$はm-Ordnungである。つぎに逆の証明のため $T^N A \subseteq \boldsymbol{O}$ とする。ここに $A, T \in \boldsymbol{H}$ である。いま$\boldsymbol{O}$とTとで生成される部分環を $\boldsymbol{O} \vee T$ とすると $\alpha \in u(R)$ によって $(\boldsymbol{O} \vee T)\alpha \subseteq \boldsymbol{O}$ だから $\boldsymbol{O} \vee T$ は$\boldsymbol{O}$と対等である。$\boldsymbol{O}$はm-Ordnungであるから $\boldsymbol{O} \vee T = \boldsymbol{O}$ したがって $T \subseteq \boldsymbol{O}$ となり目的を達した（証明終）。

ここで以上のべた事実をSchemaにしておく：

$$\begin{tikzcd}
A_{1l} \arrow[rr] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[drr] \arrow[rrrrrr, bend left, leftrightarrow, "b"] & & A_{2l} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & & A_{2r} \arrow[d, leftrightarrow] & & A_{1r} \arrow[ll] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dll] \\
A_{4l} \arrow[rr, leftrightarrow, "b"] \arrow[u, bend left, "b^*"] & & A_{3l} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "b"] & & A_{3r} \arrow[rr, leftrightarrow, "b"] \arrow[dl, leftrightarrow, "b"'] & & A_{4r} \arrow[u, bend right, "b^*"'] \\
& & & \boldsymbol{O}: \text{m-Ordnung} & & &
\end{tikzcd}$$

$\longleftarrow b \longrightarrow$ は$\boldsymbol{O}$がb-Ordnungの場合，$— b^* \longrightarrow$ は$\boldsymbol{O}$が条件(b^*)をみたす場合を示す。

この章の文献：[W]。

VI　非可換環の除法写像

この章では第3章と第5章の後半で準備したことを踏まえて，第4章の結果を非可換環の場合に拡張する。除法写像による Bild は，要するに R を乗法的 Ideal 論の場とするための Musterstück として R の全 ganzes Ideal をそこに写し出すのであるから，非可換環の場合といえども可換な素元分解半群とするのである。

この章を通して R を前と同様に(1°)～(4°)をみたす Ideal 系 $\boldsymbol{E}$ をもつ環とする。記号 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{I}$, $g(\boldsymbol{E})$, $u(R)$ などは前と同様とする。とくに $\boldsymbol{D}$ は素元分解半群とし，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ をその素元の全体とする。$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ から生成される自由 Abel 群 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$ は束群になり，その Kegel は $\boldsymbol{D}$ である。

1　除法写像の条件

まず除法写像に付加する条件についてのべる： $\phi:\boldsymbol{I}\longrightarrow\boldsymbol{D}$; $A\longmapsto\phi(A)$ を束半群としての Homomorphismus（中へのまたは上への）とするとき，次の6条件は同値である：

(p₁)　各 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ に対して $E_1,\cdots,E_m\in\boldsymbol{E}$ が存在して $\boldsymbol{p}=\phi(E_1)\vee\cdots\vee\phi(E_n)$ である。

(p₂)　各 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}$ に対して $E_1,\cdots,E_n\in\boldsymbol{E}$ が存在して $\boldsymbol{d}=\phi(E_1)\vee\cdots\vee\phi(E_n)$ である。

(p₃)　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})=\{E\in\boldsymbol{E}\mid\phi(E)\leqq\boldsymbol{d}\}$ は空でなくて $\boldsymbol{d}=\sup\{\phi(E)\mid E\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})\}$ である。

(p₄)　各 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}$ に対して $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})$ が空でなくて

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_1)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_2)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{d}_2$$

(p₅)　各 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}$ に対して $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})$ が空でなくて

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})\ \Rightarrow\ \boldsymbol{d}=\boldsymbol{p}$$

(p₆)　各 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ に対して $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P})$ が空でなくて $\boldsymbol{p}=\sup\{\phi(E)\mid\phi(E)$

$\leqq \boldsymbol{p}\}$ である。

これらが同値であることの証明であるが，まず $(\mathrm{p}_1) \Rightarrow (\mathrm{p}_2)$: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{p}_i \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ とすれば(p_1)によって $\boldsymbol{p}_i = \vee_{k=1}^{n(i)} \phi(E_{ik})$, $E_{ik} \in \boldsymbol{E}$ であるから $\boldsymbol{d} = \vee_{k(1)=1}^{n(1)} \cdots \vee_{k(m)=1}^{n(m)} \phi(E_{1k(1)} \cdots E_{mk(m)})$, $E_{1k(1)} \cdots E_{mk(m)} \in \boldsymbol{E}$ である。$(\mathrm{p}_2) \Rightarrow (\mathrm{p}_3)$: 仮定より $\boldsymbol{d} = \phi(E_1) \vee \cdots \vee \phi(E_n) \leqq \sup\{\phi(E) \mid E \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})\}$ であるがこの右辺は$\boldsymbol{d}$より下にあるから(p_3)がなりたつ。$(\mathrm{p}_3) \Rightarrow (\mathrm{p}_4)$: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_1) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_2)$ と仮定すると $\boldsymbol{d}_1 = \sup\{\phi(E) \mid E \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_1)\} = \sup\{\phi(E) \mid E \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}_2)\} = \boldsymbol{d}_2$ である。$(\mathrm{p}_4) \Rightarrow (\mathrm{p}_5)$: これは自明である。$(\mathrm{p}_5) \Rightarrow (\mathrm{p}_6)$: $\boldsymbol{d} = \sup\{\phi(E) \mid \phi(E) \leqq \boldsymbol{p}\}$ とおく。$\boldsymbol{d} \leqq \boldsymbol{p}$ であるから $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}) \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ である。また $\phi(E) \leqq \boldsymbol{p}$ であれば $\phi(\mathrm{E}) \leqq \boldsymbol{d}$ であるから $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})$ である。よって $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})$。仮定より $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{d}$ となる。$(\mathrm{p}_6) \Rightarrow (\mathrm{p}_1)$: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ に含まれる任意有限個の E_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して，つねに $\phi(E_1) \vee \cdots \vee \phi(E_n) < \boldsymbol{p}$ とする。すると(p_6)を仮定しているのであるから$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ は無限集合でなくてはならない。だから $E_{n+1} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ が存在して $\phi(E_1) \vee \cdots \vee \phi(E_n) < \phi(E_1) \vee \cdots \vee \phi(E_{n+1}) < \boldsymbol{p}$。$\boldsymbol{D}$においては元について Teilerkettensatz がなりたつので，これは矛盾である。これで6条件が同値であることが証明された。この条件は次に定義する除法写像に必要なものであるが，それは$\boldsymbol{E}$に依存した有限条件を与えるものである。このことは(p_1)または(p_2)によって知られる。ここで除法写像の定義を次のように与える。

定義　束半群としての Homomorphismus $\phi : \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{D}$; $A \longmapsto \phi(A)$ が次の2条件をみたすときこれを Ordnung $\boldsymbol{O}$ の$\boldsymbol{E}$による“左除法写像”という。

(D)　条件 $(\mathrm{p}_1), \cdots, (\mathrm{p}_6)$ のうちのどれかをみたす。したがってどれもみたす。

(D_l)　$E, F \in \boldsymbol{E}$ に対して $\phi(E) \leqq \phi(F)$ であれば $E = CF$ なる $C \in \boldsymbol{I}$ が存在する。

この条件(D_l)の“$E = CF$”を“$E = FC$”で置きかえた条件を(D_r)とし，

(D) (D_r) ををみたす ϕ を $\boldsymbol{O}$ の $\boldsymbol{E}$ による "右除法写像" という。

左または右除法写像によって左または右除法理論が構成される。それは $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{D}$ によって決定されるので $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{D})_l$ または $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{D})_r$ なる記号を用いて表わす。$\boldsymbol{I}$ の代りに $\boldsymbol{O}$ を用いることもある。$\boldsymbol{D}$ 元を "Divisor" といい，ϕ の像になる $\boldsymbol{D}$ 元を "Hauptdivisor" という。

2　除法理論の一意性

この節では第 3 章第 2 節の後半でのべた B-S- 除法理論の一意性をわれわれの場合に拡張してその証明をのべる。もちろんこの節でのべる証明はそのまま B-S- 除法理論の場合に当てはめることができる。印象を強くするため次のような形でのべる：

定理 2　環 R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ において 4 条件 (1°)～(4°) をみたす Ideal 系 $\boldsymbol{E}$ があるとする。$\boldsymbol{O}$ に関する $\boldsymbol{E}$ による左除法理論が成立するものとし，$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi_1, \boldsymbol{D}_1)_l$，$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi_2, \boldsymbol{D}_2)_l$ を任意の 2 つの左除法理論とすれば

$$f: \boldsymbol{D}_1 \longrightarrow \boldsymbol{D}_2, \qquad f \circ \phi_1 = \phi_2$$

なる束半群としての Isomorphismus が存在する。

証明　1) まず各 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_1)$ に対して $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ をみたす $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)$ が存在することを証明する。もしこのことを否定すれば，ある $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_1)$ が存在して，いかなる $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)$ に対しても $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ とならない。そこで $A \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ なる Ideal A をとり，これを ϕ_2 で写して $\phi_2(A) = \boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_n$，$\boldsymbol{q}_i \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)$ をその素元分解とする。するとどの $\boldsymbol{q}_i$ についても $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}_i)$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ に含まれないから $B_i \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}_i)$ であるが，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ には含まれない Ideal B_i が存在する。すると次がなりたつ：

$$\phi_2(B_i) \subseteq \sup\{\phi_2(F) \mid F \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}_i)\} = \boldsymbol{q}_i,$$

$$\phi_2(\Pi_i B_i) = \Pi_i \phi_2(B_i) \subseteq \Pi_i \boldsymbol{q}_i = \phi_2(A)$$

したがって定義の(D)によって

$$\Pi_i B_i = CA, \quad C \in \boldsymbol{E}$$

なる Ideal Cが存在する。よって次の関係がなりたつ：

$$\Pi_i \phi_1(B_i) = \phi(\Pi_i B_i) = \phi_1(C)\,\phi_1(A)$$
$$\subseteq \phi_1(A) \subseteq \sup\{\phi_1(E) \mid E \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})\} = \boldsymbol{p}$$

したがって $\phi_1(B_i) \leqq \boldsymbol{p}$ なる B_iがある。よって $B_i \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ となる。これは矛盾である。それと全く対称的に考えて，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)$ の元 $\boldsymbol{q}$ に対して $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}') \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$ なる $\boldsymbol{p}' \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_1)$ が存在する。

2）つぎに上の $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ は同じであることを証明しよう。まず $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{pp}')$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}')$ の中に rein に含まれる（前節の(p_4)を用いる)。したがって $\phi_1(F) \leqq \boldsymbol{p}'$ であるが $\phi_1(F)$ は $\boldsymbol{pp}'$ の下にないような $F \in \boldsymbol{E}$ が存在する。ここでかりに $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ が同じでないと仮定すると $\phi_1(F) \leqq \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{pp}'$ となる：このことは $\phi_1(F) \leqq \boldsymbol{p}$ によって示されるが，それは $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}') \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) \subseteq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ によって保証される。これは矛盾。よって $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$。よってもちろん $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$ となることが判った。

3）上記の結果 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$ なる $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ に対して一意的に定まるから

$$f: \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_1) \longrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}_2)\,;\ \boldsymbol{p} \longmapsto \boldsymbol{q} =: f(\boldsymbol{p})$$

なる写像が定まる。$\boldsymbol{D}_i$ $(i = 1, 2)$ がいずれも素元分解半群であるから f を

$$f: \boldsymbol{D}_1 \longrightarrow \boldsymbol{D}_2\,;\ \boldsymbol{d} = \Pi_i \boldsymbol{p}_i \longmapsto f(\boldsymbol{d}) = \Pi_i f(\boldsymbol{p}_i)$$

によって束半群としての Isomorphismus にまで拡大することができる。

4）$f \circ \phi_1 = \phi_2$ を証明する：$A \in \boldsymbol{I}$ として $\phi_1(A) \in \boldsymbol{D}_1$ の $\boldsymbol{p}$ における Exponent を k とする。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^2)$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ に真に含まれているから $B \in \boldsymbol{I}$,

$\phi_1(B)=\boldsymbol{pa}$ で，$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{p}$ でない B をとることができる。したがって $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{a}^k)$ には含まれるが $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{pa}^k)$ には含まれない Ideal U をとることができる。明らかに $\phi_2(U)$ は $f(\boldsymbol{p})$ の下にない。

$$\begin{aligned}\phi_1(AU)&=\phi_1(A)\,\phi_1(U)\leqq\boldsymbol{p}^k\boldsymbol{a}^k\\&=(\boldsymbol{pa})^k=\phi_1(B)^k=\phi_1(B^k)\end{aligned}$$

であるから，(D_l) によって $AU=CB^k$ なる $C\in\boldsymbol{I}$ が存在する。これを ϕ_2 で写して

$$\phi_2(A)\,\phi_2(U)=\phi_2(C)\,\phi_2(B)^k$$

一方において $\phi_2(B)\leqq f(\boldsymbol{p})$ で $\phi_2(U)$ は $f(\boldsymbol{p})$ の下にないから $\phi_2(A)\leqq f(\boldsymbol{p})^k$ となる。これと全く対称的に考えれば k が $\phi_1(A)$ の $\boldsymbol{p}$ における Exponent であるための必十条件は $\phi_2(A)$ の $f(\boldsymbol{p})$ における Exponent が k であることである。これによって $f\circ\phi_1=\phi_2$ であることが証明された。

上記では ϕ_1, ϕ_2 を共に左除法写像として証明したが，全く同じように ϕ_1, ϕ_2 を右除法写像としてもよい。なお，この一意性は $\boldsymbol{E}$ を固定しての話であるから $\boldsymbol{E}$ を変えれば変る。

この章の参考文献：[M]。

Ⅶ　除法写像と Ordnung の整閉性

この章でも R を環とし $\boldsymbol{O}$ を R の Ordnung とする。記号 $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 等は以前と同じで，$\boldsymbol{E}$ については 4 条件(1°)〜(4°)を仮定している。

1　除法写像と Artin の整閉性

まず次の定理を証明するが，注目すべき点は $\boldsymbol{O}$ は b-Ordnung でなくてもよいことである。

定理3　$\boldsymbol{O}$をRのOrdnungとする。$\boldsymbol{O}$の$\boldsymbol{E}$による左除法写像が存在すれば，$\boldsymbol{O}$はArtinのIdeal型整閉性をもつ。右除法写像が存在する場合も同様である。

証明　$\phi:\boldsymbol{I}\longrightarrow\boldsymbol{D}$; $A\longmapsto\phi(A)$ を$\boldsymbol{E}$による左除法写像とする。$\boldsymbol{D}$から生成される自由Abel群を$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$とし，$\phi$を$\boldsymbol{H}$から$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$へ延長する：$C=AM'$, $A\in\boldsymbol{I}$, $M\in\boldsymbol{E}$, を$\boldsymbol{H}$の任意のIdealとして

$$\phi(C):=\phi(A)\phi(M)^{-1}$$

によって$\phi(C)$を定義する。するとこれはCの表示には関係ない，つまりwohldefinitivである。その理由：$C=BN'$, $B\in\boldsymbol{I}$, $N\in\boldsymbol{E}$, を同じCの表示とするとき $\phi(C)=\phi(B)\phi(N)^{-1}$ とするのであるから$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D})$において$\phi(A)\phi(M)^{-1}=\phi(B)\cdot\phi(N)^{-1}$ が成立していることを見ればよい。そのために $\phi(A)\phi(M)^{-1}$, $\phi(B)\phi(N)^{-1}$ をreduziertにしておけば $\phi(A)\phi(N)=\phi(B)\phi(M)$ の両辺をそれぞれの素元分解したとき，$\phi(A)$ の素元因子と$\phi(B)$のそれとは重複度もこめて全く一致し，$\phi(N)$と$\phi(M)$についても同様であることから保証される。

そこで(A_{2l})を示すため $AT^n\subseteq\boldsymbol{O}$ $(n=1,2,\cdots)$, $A,T\in\boldsymbol{H}$ とする。$A\in\boldsymbol{I}$として差支えない。いま$\phi(A)$, $\phi(T)$の分解をそれぞれ

$$\phi(A)=\boldsymbol{p}_1^{e(1)}\cdots\boldsymbol{p}_r^{e(r)}\boldsymbol{q}_{r+1}^{e(r+1)}\cdots\boldsymbol{q}_m^{e(m)},\qquad e(i)>0$$
$$\phi(T)=\boldsymbol{p}_1^{f(1)}\cdots\boldsymbol{p}_r^{f(r)}\boldsymbol{p}_{r+1}^{f(r+1)}\cdots\boldsymbol{p}_n^{f(n)},\qquad f(j)\gtrless 0$$

とする。ここに$\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_r$は両者に共通に現われる素元の全部とする。そこで $\phi(AT^n)=\phi(A)\cdot\phi(T)^n$ の素元分解におけるExponentを見れば

$$e(k)+nf(k)\geqq 0\qquad(k=1,\cdots,r)$$
$$nf(l)\geqq 0\qquad(l=r+1,\cdots,n)$$

である。したがって $f(s)\geqq 0$ $(s=1,\cdots,r,r+1,\cdots,n)$ となり $\phi(T)\leqq$

$\phi(\boldsymbol{O})=1$, $\phi(T)\in\boldsymbol{D}$ となる。ところで $T=AM'$, $A\in\boldsymbol{I}$, $M\in\boldsymbol{E}$ とかけるから $A=TM$, $\phi(A)=\phi(TM)=\phi(T)\phi(M)$ となる。したがって，ϕ が左除法写像であることから $A=CM$ となる $C\in\boldsymbol{I}$ が存在する。よって $TM=CM$, $T=C$ となり(A_{2l})がなりたつ。右除法写像が存在する場合も同様に(A_{2r})がなりたつ。(A_{2l})と(A_{2r})とは同値であることは第５章でのべてある（証明終)。

2　Prüfer 環の整閉性

種々の環について $\boldsymbol{E}$ の選び方は様々なものが考えられる。いま非可換な環についても１つの Ordnung $\boldsymbol{O}$ について ganzes Ideal で有限生成なものは（その商環において）逆 Ideal をもつ場合，この環（$\boldsymbol{O}$ またはその商環）を，可換環の場合と同様に，“Prüfer 環” ということにする。すると Prüfer 環においては任意の Ideal（両側）は有限生成な Ideal の和集合としてかけることは明白である。よって次の定理がなり立つ：

定理 4　環 R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ を Prüfer とする。有限生成な ganzes Ideal 全部の集合を $\boldsymbol{F}$ とする。全 ganzes Ideal の集合 $\boldsymbol{I}$ の $\boldsymbol{F}$ による左除法写像が存在すれば，$\boldsymbol{O}$ は Artin の Ideal 型整閉性をもつ。右除法写像が存在する場合も同様である。

この定理の証明は定理 3 よりほとんど問題はない。ただ $\boldsymbol{F}$ がわれわれの 4 条件(1°)〜(4°)をみたしているかどうかということを確認すればよい。そしてそれはいずれも易しいが，とくに(2°)は Prüfer 環の定義にすぎない。

補題 4　$u(R)\cap\boldsymbol{O}$ の元 α に対して次の 2 条件は同値である。

(1)　$\alpha\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\beta$ なる元 $\beta\in u(R)$ が存在する。

(2)　$\alpha\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\alpha$ である。

証明　(2)⇒(1)は自明である。(1)⇒(2)を示す：$\alpha = a\beta$ なる $a \in \boldsymbol{O}$ がある。また $\beta = \alpha b$ なる $b \in \boldsymbol{O}$ があるから $\alpha = a\alpha b$。$\alpha \in \boldsymbol{O}\beta$ だから $a\alpha \in \boldsymbol{O}\beta = \alpha\boldsymbol{O}$。よって $a\alpha = \alpha a'$ なる $a' \in \boldsymbol{O}$ がある。したがって $\alpha = \alpha a'b$, $a'b = 1_R$。同様にして $\beta = ab'\beta$ なる $b' \in \boldsymbol{O}$ があり $ab' = 1_R$。よって a, b 共に $\boldsymbol{O}$ の単元である。とくに a が単元であることから $\boldsymbol{O}\alpha = \boldsymbol{O}a\beta = \boldsymbol{O}\beta = \alpha\boldsymbol{O}$ である。

定理5　環 R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ について次がなりたつと仮定する。

(1)　任意の $\alpha \in \boldsymbol{O} \cap u(R)$ に対して $\alpha\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}\alpha$

(2)　任意の ganzes Ideal A は $\cup\{\boldsymbol{O}\alpha \mid \alpha \in A \cap u(R)\}$ によって生成される。

このとき $\boldsymbol{O}$ の $\{\boldsymbol{O}\alpha \mid \alpha \in u(R) \cap \boldsymbol{O}\} =: \boldsymbol{T}$ による除法写像があれば $\boldsymbol{O}$ は Artin の Ideal 型整閉である。

定理6　環 R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ が（両側 Ideal に関して）Hauptidealring であるとき，その全 Hauptideal を $\boldsymbol{T} := \{\boldsymbol{O}\alpha = \alpha\boldsymbol{O} \mid \alpha \in u(R) \cap \boldsymbol{O}\}$ とおく。$\boldsymbol{O}$ の $\boldsymbol{T}$ による除法写像が存在すれば，$\boldsymbol{O}$ は Artin の Ideal 型整閉である。

上記の定理5，6は定理4の系として得られる。

R の Ordnung $\boldsymbol{O}$ が Hauptordnung であるとする。$u(R) = R \setminus \{0\}$ で，$\lambda \in u(R) \Rightarrow \lambda^{-1}\boldsymbol{O}\lambda \subseteq \boldsymbol{O}$ とする。また次のようにおく：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &:= \{\boldsymbol{O}\lambda \mid \lambda \in u(R)\} \\
\boldsymbol{E} &:= \{\boldsymbol{O}\alpha \mid \alpha \in u(R) \cap \boldsymbol{O}\} \\
\boldsymbol{C} &:= \{\boldsymbol{O}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \mid \alpha, \beta \in u(R)\} \\
\boldsymbol{G}/\boldsymbol{C} &:= \{K(\boldsymbol{O}\lambda) : \text{Klasse mit } \boldsymbol{O}\lambda\} \\
\boldsymbol{D} &:= \{K(\boldsymbol{O}\alpha) \mid \alpha \in u(R) \cap \boldsymbol{O}\}
\end{aligned}
$$

このとき $\sigma_E : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{O}\alpha \longmapsto \phi(\boldsymbol{O}\alpha) = K(\boldsymbol{O}\alpha)$ は左また右除法写像にな

るか否か。また上記の$\boldsymbol{E}$を$\boldsymbol{O}\setminus\{0\}$と取りかえた写像を$\sigma_{\boldsymbol{O}}$とするときこれも左または右除法写像になるか否か。もし$\boldsymbol{O}$が可換整域の場合は上の$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{E}$と一致して$\sigma_{\boldsymbol{E}}$, $\sigma_{\boldsymbol{O}}$は共に除法写像になる。とくに$\sigma_{\boldsymbol{O}}$は第3章でのべたB-S-写像である。これらのことは後に論述する予定である。なお上記可換整域の場合の実例としては$\boldsymbol{Z}$（全有理整数）の場合があり，もちろん（A_{1k}）（$k=l, r$）の意味でArtinの整閉性があることは明白である。

3　逆の問題

この章の第1節における定理3の逆が一般に成立するか否かは不明であるが，ある極大条件のもとでは逆も正しいことが判る：

定理7　RのOrdnungを$\boldsymbol{O}$とし条件$(1°)$～$(4°)$をみたす$\boldsymbol{E}$の存在を仮定する。$\mathrm{div}(\boldsymbol{I})=\{\mathrm{div}(A)\mid A\in\boldsymbol{I}\}$においてTeilerkettensatzがあるとき，$\boldsymbol{O}$がArtinのIdeal型整閉であれば，$\boldsymbol{I}$の$\boldsymbol{E}$による除法写像が存在する。それは本質的には$\mathrm{div}:\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathrm{div}(\boldsymbol{I})\,;\,A\longmapsto\mathrm{div}(A)$によって与えられる。

証明　まず定理1でのべた$\mathrm{div}(\boldsymbol{H})$が“$*$”に関して群をつくることを証明する。いま$\mathrm{div}(B)$を任意のdivisorisches Idealとする。$C\in\boldsymbol{I}$を適当にとって$A:=\mathrm{div}(B)\cdot C\subseteq\boldsymbol{O}$とする。$(\boldsymbol{O}:A)_l\supseteq\boldsymbol{O}$であるから$\mathrm{div}(A)=(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:A)_l)_l\subseteq(\boldsymbol{O}:\boldsymbol{O})_l=\boldsymbol{O}$。よって$\mathrm{div}(B)*C\in\mathrm{div}(\boldsymbol{I})$。したがって$\mathrm{div}(\boldsymbol{I})$の元が“$*$”に関して逆元をもつことを示せば十分である。そこで更めて$\mathrm{div}(A)\in\mathrm{div}(\boldsymbol{I})$とし$\mathrm{div}(A)\cdot(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l\subseteq C$なる$C\in g(\boldsymbol{E})$をとる（存在については第3章第1節参照）。すると次の関係がなりたつ：

$$C'\cdot\mathrm{div}(A)\cdot(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l\subseteq C'\cdot C=\boldsymbol{O}$$

$$C'\cdot\mathrm{div}(A)\subseteq(\boldsymbol{O}:(\boldsymbol{O}:\mathrm{div}(A))_l)_l=\mathrm{div}(\mathrm{div}(A))$$

$$=\mathrm{div}(A)$$

$$\mathrm{div}(A)\subseteq C\cdot\mathrm{div}(A),\ \mathrm{div}(A)\subseteq C\cdot\mathrm{div}(A)\subseteq C^2\cdot\mathrm{div}(A)$$

これをつづけて $\mathrm{div}(A) \subseteq C^N \mathrm{div}(A)$ となる。したがって $M \subseteq \mathrm{div}(A)$ なる任意の $M \in \boldsymbol{E}$ について $M \subseteq C^n \mathrm{div}(A) \subseteq (C')^n \cdot M \subseteq \mathrm{div}(A) \subseteq \boldsymbol{O}$ がすべての $n \in \boldsymbol{N}$ についてなりたつ。よって $C' \subseteq \boldsymbol{O}$ となり $\boldsymbol{O} \subseteq C$ である。このことから

$$\boldsymbol{O} \subseteq \cap \{C \in \boldsymbol{E} \mid C \supseteq \mathrm{div}(A) \cdot (\boldsymbol{O} : \mathrm{div}(A))_l\}$$
$$= \mathrm{div}(\mathrm{div}(A) \cdot (\boldsymbol{O} : \mathrm{div}(A))_l) \subseteq \mathrm{div}\,\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

したがって次の等式を得る：

$$\mathrm{div}(A) * (\boldsymbol{O} : \mathrm{div}(A))_l = \boldsymbol{O}$$

すなわち $(\boldsymbol{O} : \mathrm{div}(A))_l$ が“$*$”に関して $\mathrm{div}(A)$ の逆元である。よってはじめに用意しておいたことから $(\mathrm{div}(\boldsymbol{H}), *)$ は群である。$\mathrm{div}(\boldsymbol{H})$ は定理**1**によって包含関係による順序に関して束であり束半群でもあるから“束群”になる。そして条件完備であるから群として可換である（[F] のV, Theorem 18を参照）。ところが $\mathrm{div}(\boldsymbol{I})$ は，Teilerkettensatz によって，素元分解半群である。積はもちろん“$*$”である。そこで

$$\mathrm{div} : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathrm{div}(\boldsymbol{I})\,;\ A \longmapsto \mathrm{div}(A)$$

が除法写像であることを示せば，定理**2**によって，本質的にはこれ以外の $\boldsymbol{I}$ の $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}$ による除法写像は存在しない。まず写像としての div は束半群としての Homomorphismus を与えることは明白であるから第6章で与えた定義の2条件 (D), $(D_l) = (D_r)$ が成立していることを示せばよい。(D) として (p_5)（第6章）の成立を示す。$\boldsymbol{E}(\mathrm{div}(A)) = \{C \in \boldsymbol{E} \mid C = \mathrm{div}(A) * D$ für irgendeines Ideal $\boldsymbol{D} \in \mathrm{div}(\boldsymbol{I})\}$ とすれば $\mathrm{div}(A) = \sup\{C \in \boldsymbol{E}(\mathrm{div}(A))\}$ であるから，$\boldsymbol{E}(\mathrm{div}(A)) = \boldsymbol{E}(\mathrm{div}(B))$ であれば

$$\mathrm{div}(A) = \sup\{C \in \boldsymbol{E}(\mathrm{div}(A))\} = \sup\{C \in \boldsymbol{E}(\mathrm{div}(B))\} = \mathrm{div}(B)$$

である。すなわち (p_5) が示された。つぎに，$\mathrm{div}(C) = \mathrm{div}(A) * \mathrm{div}(D)$；

$C, D \in \boldsymbol{E}$; $A \in \boldsymbol{I}$ とする。もちろん $\mathrm{div}(C) = C$, $\mathrm{div}(D) = D$ であるから $C = \mathrm{div}(A) * D$, $CD' = C * D' = \mathrm{div}(A)$ である。$C = \mathrm{div}(A) \cdot D$ となり他の条件も確かめられた。これにより写像 div は $\boldsymbol{I}$ の $\boldsymbol{E}$ による除法写像になっていることが判った（証明終)。

4 除法写像と Ordnung の極大性

これまでのべてきたことから次の一連の結果を得る。以下 $\boldsymbol{O}$ は R の Ordnung で 4 条件$(1°)$〜$(4°)$をみたす $\boldsymbol{E}$ の存在を仮定する。

(1) $\boldsymbol{O}$ が b-Ordnung であるとき，もし $\boldsymbol{I}$ の $\boldsymbol{E}$ による左除法写像または右除法写像が存在するならば $\boldsymbol{O}$ は m-Ordnung である。

これは定理**1**と定理**3**によって明白である。

(2) $\boldsymbol{O}$ を mb-Ordnung とする。$\mathrm{div}(\boldsymbol{I})$ の元について Teilerkettensatz があれば，$\boldsymbol{O}$ において除法理論が成立する。それは本質的には $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \mathrm{div}, \mathrm{div}(\boldsymbol{I}))$ によって与えられる。

(3) $\boldsymbol{O}$ を Prüfer 環とする。$\boldsymbol{O}$ の $\boldsymbol{F}$（第 2 節を参照）による左除法写像または右除法写像が存在すれば $\boldsymbol{O}$ は m-Ordnung である。

(4) $\boldsymbol{O}$ を可換整域とし，$\boldsymbol{I}$ を零 Ideal 以外の整 Ideal の全部の集合，そのうち Hauptideal の全部の集合を $\boldsymbol{E}$ とする。$\boldsymbol{O}$ において除法理論 $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{D})$ が成立すれば $\boldsymbol{O}$ は Noether の整閉性をもつ。

これを示すためまず

$$\pi : \boldsymbol{O}^* = \boldsymbol{O} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{D}\,;\ a \longmapsto \pi(a) = \phi(a\boldsymbol{O})$$

が B-S- 写像（第 4 章）を与えることを示せば，あとの部分は［B-S］Kap. Ⅲ, §3, Satz 1 によって明らかである。π は $\boldsymbol{O}^*$ から $\boldsymbol{D}$ への半群としての

Homomorphismusを与えることは明白。そこでもし $\pi(a)=\pi(b)\boldsymbol{d}$ なるDivisor $\boldsymbol{d}$があるとすれば，$\phi(a\boldsymbol{O})=\phi(b\boldsymbol{O})\boldsymbol{d}$ であるから $a\boldsymbol{O}=b\boldsymbol{O}\cdot C$ なるIdeal Cが存在する。このとき適当な $u_i\in\boldsymbol{O}$, $c_i\in C$ によって

$$a=\sum_{i=1}^{n}bu_ic_i=b\cdot\sum_{i=1}^{n}u_ic_i,\qquad \sum_{i=1}^{n}u_ic_i\in C$$

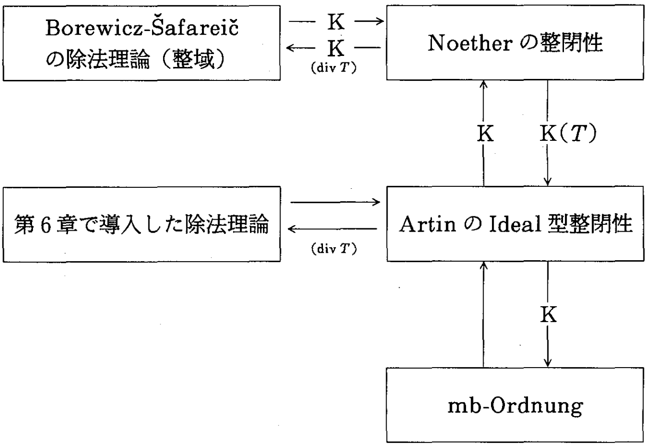
となる。つぎに $\pi(a)\leqq\boldsymbol{d}$, $\pi(b)\leqq\boldsymbol{d}$ とすれば

$$\pi(a+b)=\phi((a+b)\boldsymbol{O})\leqq\phi(a\boldsymbol{O})\vee\phi(b\boldsymbol{O})\leqq\boldsymbol{d}\vee\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}$$

である。また $\Delta(\boldsymbol{d})=\{a\in\boldsymbol{O}^*\mid\pi(a)\leqq\boldsymbol{d}\}$ とするとき $\Delta(\boldsymbol{d}_1)=\Delta(\boldsymbol{d}_2)$ ならば $\boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{d}_2$ を導くことができる。これで πがB-S-写像であることが示された。

除法理論と整閉性の関係

以上論述したことから，除法理論と整閉性に関して次のSchemaを得る。ただし $\xrightarrow{\;K\;}$ は可換環の場合のImplikation, $\xrightarrow[(\mathrm{div}\,T)]{}$ はdiv-IdealについてTeilerkettensatzのもとでの，また $\xrightarrow[(T)]{}$ はIdealについてTeilerkettensatzのもとでのImplikationを示すものとする。



$\boldsymbol{O}$をRのOrdnungとし(1°)〜(4°)をみたす$\boldsymbol{E}$があるものとする。$\boldsymbol{H}=g(\boldsymbol{E})$ となるための必十条件は $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}$ である。そしてそのための必十条件は$\boldsymbol{O}$に関して次の4条件がなりたつことである。

(a) $\boldsymbol{O}$はm-Ordnungである。

(b) $\boldsymbol{I}$の元についてTeilerkettensatzがある。

(c) Primidealはすべて極大である。

(d) Primidealは $\mathrm{div}(A)=A$ なるAを含む。

ただし$\boldsymbol{O}$がb-Ordnungのときは(d)は不要である。

まず(a)〜(d)を仮定して，$\mathrm{div}(A)=\mathrm{div}(B)$ なら $A=B$ を示す。Pを任意のPrimidealとし，$P\supseteq\mathrm{div}(A)=A$ なるAを分解する：$A=P_1*\cdots*P_n$, $\mathrm{div}(P_i)\fallingdotseq\boldsymbol{O}$, $P_1\cdots P_n\subseteq P$ であるから $P_i\subseteq P$ なるP_iがある。よって $P=P_i$, $\mathrm{div}(P)\fallingdotseq\boldsymbol{O}$ である。つぎに任意の $B\in\boldsymbol{I}$, $B\fallingdotseq\boldsymbol{O}$ をとれば $\mathrm{div}(B)\fallingdotseq\boldsymbol{O}$ である：もしかりに $\mathrm{div}(B)=\boldsymbol{O}$ とすれば，$\mathrm{div}(B)=P_1*\cdots*P_r\subseteq P_1$, $\mathrm{div}(P_i)\fallingdotseq\boldsymbol{O}$, $\mathrm{div}(B)\subseteq P_1\subseteq\boldsymbol{O}$, $P_1=\boldsymbol{O}$ となって矛盾である。よって，$B\subseteq\boldsymbol{O}$, $\mathrm{div}(B)=\boldsymbol{O}$ ならば $B=\boldsymbol{O}$。このことから $\mathrm{div}(A)=\mathrm{div}(B)$ ならば $A=B$ が導かれる。よって$\boldsymbol{H}$は乗法群である。

つぎに$\boldsymbol{H}$が乗法群であるとする。$A\in\boldsymbol{H}$の逆元をA'とかく。また $\boldsymbol{O}_l(A)=\{x\in R\mid xA\subseteq A\}$ とかくことにすれば $\boldsymbol{O}=AA'=\boldsymbol{O}_l(A)AA'=\boldsymbol{O}_l(A)\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}_l(A)$。$\boldsymbol{O}_l(A)$ をAの左Ordnungというが，右のOrdnung $\boldsymbol{O}_r(A)$ も同様に定義できて $\boldsymbol{O}_r(A)=\boldsymbol{O}$ も示される。したがって$\boldsymbol{O}$はm-Ordnungである。すなわち(a)が示された。いま $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$, $A_i\in\boldsymbol{I}$, をTeilerketteとする。$A:=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$ とおけば $A_1A'\subseteq A_2A'\subseteq\cdots\subseteq AA'=\boldsymbol{O}$, $\cup_{i=1}^{\infty}(A_iA')=(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)A'=AA'=\boldsymbol{O}$ よって $1_R\in A_nA'$ なるnがある。すると $A_n=A$, $A_{n+1}=A,\cdots$ となり(b)が示された。つぎにPをPrimidealとし，これが極大でないとすると $P\subseteq A\subseteq\boldsymbol{O}$, $P\fallingdotseq A$, $A\fallingdotseq\boldsymbol{O}$ なるIdeal Aが存在する。$B:=A'P$ とおくと $B\subseteq A'A=\boldsymbol{O}$ で $B\fallingdotseq A'A$。そして $AB=P$。しかもA,B共にPには含まれていない。BがPに含まれていないことについては，もし $B=A'P\subseteq P$ とすれば $A'\subseteq\boldsymbol{O}$, $A\supseteq\boldsymbol{O}$ と

なるからである。これで(c)が示された。(d)についてはAとしてP自身をとればよい。

$\boldsymbol{O}$がb-Ordnungのとき$A \in \boldsymbol{I}$, $A \neq \boldsymbol{O}$なるAに含まれる$u(R)$の元をαとすれば$\boldsymbol{O}\alpha \supseteq \beta\boldsymbol{O}$なる$\beta \in u(R)$がとれる：$\boldsymbol{O}\alpha^{-1}$に対して$\beta\boldsymbol{O}\alpha^{-1}$なる$\beta \in u(R) \cap \boldsymbol{O}$をとればよいからである。そこで$A = \boldsymbol{O}\beta\boldsymbol{O}$とおけば$(\boldsymbol{O} : \boldsymbol{O}\alpha)_r = \alpha^{-1}\boldsymbol{O} \in A'$, $\boldsymbol{O}\alpha = (\boldsymbol{O} : \alpha^{-1}\boldsymbol{O})_r \supseteq A''$。ところで$A' = (\boldsymbol{O} : A)_r$である：それは$AA' = \boldsymbol{O}$より$A' \subseteq (\boldsymbol{O} : A)_r$であり他方$A(\boldsymbol{O} : A)_r \subseteq \boldsymbol{O} = AA'$より$A'A(\boldsymbol{O} : A)_r \subseteq A'AA'$。よって$(\boldsymbol{O} : A)_r \subseteq A'$したがって$A'' = \mathrm{div}(A)$。このことから(d)は不要となる。

この章の参考文献：[F], [J], [L-M], [M]。

Ⅷ　半群の除法理論，除法類群

この章では半群（非可換）の除法理論と整閉性についてのべる。環を乗法に関する半群と見た場合に，ここで得られた結果は環に対して適用できることはもちろんであるが，それは前の章で得られた結果と深い関係にある。

1　2つのGalois対

一般に1つの集合Mの部分集合の全部のなす集合を$\mathscr{P}(M)$で表わす。

さてSを単位元1_Sをもつ半群とする。積の可換性は仮定しない。Sの部分半群Wで次の条件をみたすものを固定する：

(1)　Wは1_Sを含む。

(2)　WはSのZentrumに含まれる。

(3)　Wの各元は左右簡約元である。

このようなWの存在は$\{1_S\}$によって保証されている。また具体例としては，体K上の多元環のOrdnungがKのOrdnungを含むとき，前者をS, 後者をWと見立てたものがあり，これは重要な例となっている。

v-Idealの概念を導入するため次のような写像σ, τ ; σ', τ'を定義する：

$$\sigma : \mathscr{P}(S) \longrightarrow \mathscr{P}(S\times W)\,;\ X\in \mathscr{P}(S)$$
$$X \longmapsto \sigma(X) = \{(t,\lambda)\in S\times W \mid xt = c\lambda,\ \ \forall x\in X\}$$
$$\tau : \mathscr{P}(S\times W) \longrightarrow \mathscr{P}(S)\,;\ \Delta\in \mathscr{P}(S\times W)$$
$$\Delta \longmapsto \tau(\Delta) = \{y\in S \mid yt = d\lambda,\ \ \forall (t,\lambda)\in \Delta\}$$

すると次の性質がある：

$$X_1 \subseteq X_2 \ \Rightarrow\ \sigma(X_1) \supseteq \sigma(X_2)$$
$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \ \Rightarrow\ \tau(\Delta_1) \supseteq \tau(\Delta_2)$$
$$X \subseteq (\tau\circ\sigma)(X),\ \ \sigma(X) = (\sigma\circ\tau\circ\sigma)(X)$$
$$\Delta \subseteq (\sigma\circ\tau)(\Delta),\ \ \tau(\Delta) = (\tau\circ\sigma\circ\tau)(\Delta)$$

上の σ, τ の定義において $xt = c\lambda$ の代りに $tx = \lambda c$ とし，$yt = d\lambda$ の代りに $ty = \lambda d$ としてそれぞれ2種類の対応を定義することができる。それらを σ', τ' とかくことにする。σ', τ' についても上記の性質をもつ。よって（σ, τ）および（σ', τ'）はいずれもGalois対（Galoische Zusammenhang）になっている。S が可換半群であればもちろんこの両者は一致する。

2　半群の v-Ideal と除法理論

A が S の部分集合で次の2条件をみたすとき，これを S の“左（右）Ideal”という。

(1)　$SA = \{xa \mid x\in S,\ a\in A\} \subseteq A$

　$(AS = \{ax \mid x\in S,\ a\in A\} \subseteq A)$

(2)　A は W の元を少なくとも1つ含む。

左（右）Ideal A が条件をみたすとき，これを“左（右）v-Ideal”という。

(3)　$(\tau\circ\sigma)(A) = A\ \ ((\tau'\circ\sigma')(A) = A)$

左かつ右Idealを単に“Ideal”，左 v- かつ右 v-Idealを単に“v-Ideal”という。これについて次の補題を得る。

補題5　任意元 $\alpha \in W$ に対して $S\alpha \equiv \alpha S$ は v-Ideal である。A を Ideal とする。$(\tau \circ \sigma)(A) = (\tau' \circ \sigma')(A)$ であれば A は v-Ideal である。

補題6　$X \in \mathscr{P}(S)$, $X \cap W \neq \phi$ なる X について，X を含むすべての v-Ideal の共通分を $V(X)$ とすれば，$V(X)$ は v-Ideal である。

補題7　任意の v-Ideal A と B に対して

$$A \circ B := v(AB)$$

によって積 "$\circ$" を定義すれば v-Ideal の全部の集合 $\boldsymbol{V}$ はこの積と包含関係に関して束半群をつくる。とくに $\alpha \in W$ について $V(\langle \alpha \rangle) = S\alpha \equiv \alpha S$ であり $(S\alpha)\circ(S\beta) = (S\alpha)(S\beta) = S\alpha\beta$ $(\alpha, \beta \in W)$ となる。よって $\{S\alpha \mid \alpha \in W\}$ は積 "$\circ$" に関して半群 $(\boldsymbol{V}, \circ)$ の部分半群である。

以上3つの補題の証明は一々 nachprüfen することができる。これらの補題を用いて次の定理を証明することができるが長くなりすぎるのでここでは実行しない。

定理8　$\boldsymbol{I}$ を S の Ideal の全部とし，$\boldsymbol{T} = \{S\alpha \mid \alpha \in W\}$ とおく。$\boldsymbol{I}$ の $\boldsymbol{T}$ による左除法写像 $\phi_l : \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ が存在すると仮定する。$A \in \boldsymbol{I}$ に対して $d(A) = \cup\{X \in \boldsymbol{I} \mid \phi_l(X) = \phi_l(A)\}$ とすれば $d(A) = d(B) \Rightarrow V(A) = V(B)$ がなりたつ。また $A \sim B \Leftrightarrow d(A) = d(B)$ によって$\sim$を定義するとき $\boldsymbol{I}/\sim$ が自然な積に関して群をつくるならば次がなりたつ：

(1)　$d(A) = V(A)$

(2)　$\theta : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{V}\,;\, \boldsymbol{d} \mapsto \theta(\boldsymbol{d}) = \cup\{S\lambda \mid \phi(S\lambda) \leqq \boldsymbol{d}\}$

は $(\boldsymbol{D}, \bullet, \leqq)$ から $(\boldsymbol{V}, \circ, \subseteq)$ への束 Isomorphismus である。

(3)　$V = \theta \circ \phi_l$

以上は "右" についても同様である。

$V=\theta\circ\phi_r$（ϕ_rは$\boldsymbol{I}$の$\boldsymbol{T}$による右除法写像）でもあるから，$\boldsymbol{I}$の$\boldsymbol{T}$による除法理論は本質的には（$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{T}, v, (\boldsymbol{V}, \circ)$）以外には存在しない。とくに（$\boldsymbol{I}, \bullet$）＝（$\boldsymbol{V}, \circ$）となる場合には$\boldsymbol{D}$は1個の素元から生成される巡回半群である。

3　束半群における除法類群

著者はすでに［M］において束半群における除法理論をのべたが，そこで発表しなかった除法類群（Divisorklassengruppe）について2，3の結果をのべておく。記号については［M］と同じであるから一々説明しない。

束半群Lの部分半群Vによる除法写像 $\phi: L\longrightarrow \boldsymbol{D}\,;\ a\longmapsto\phi(a)$ の条件の一つ：

(*)　$\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}\ \Rightarrow\ \exists\, x_i\in V$ s.t. $\boldsymbol{d}=\vee_{i=1}^{n}\phi(x_i)$

を除去して，代りに次の条件をおく：

(#)　$\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\in\boldsymbol{D}\ \Rightarrow\ \exists\,\boldsymbol{d}_3$ s.t. $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_3=\phi(x),\ \boldsymbol{d}_2\vee\boldsymbol{d}_3=\boldsymbol{e}$

このとき次がなりたつ：

$$\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}\ \Rightarrow\ \exists\, x_1, x_2\in V \text{ s.t. } \boldsymbol{d}=\phi(x_1)\vee\phi(x_2)$$

したがって(#)⇒(*)であるから，このような写像は特殊な除法写像である。

いま$\boldsymbol{D}$の2元$\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$に対して

$$\boldsymbol{d}_1\phi(x_1)=\boldsymbol{d}_2\phi(x_2),\qquad x_1, x_2\in V$$

なるx_1, x_2があるとき$\boldsymbol{d}_1\sim\boldsymbol{d}_2$として同値を定義すれば，次の定理がなりたつ：

定理9　$\boldsymbol{D}/\sim=\{K(\boldsymbol{d})\mid \boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}\}$ は自然な積 $K(\boldsymbol{d}_1)\bullet K(\boldsymbol{d}_2)=K(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2)$ に関して群をつくる。その単位元，逆元はそれぞれ下によって与えられる：

単位元：$K(\boldsymbol{e})=\phi(V)=\{\phi(x)\mid x\in V\}$

逆　元：$K(\boldsymbol{d})^{-1}=K(\boldsymbol{d}^*),\ \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^*=\phi(x),\ x\in V$

証明　$\phi(x)\sim\boldsymbol{d}$とする。ただし $x\in V$。すると$\phi(x)\phi(y)=\boldsymbol{d}\phi(z)$ なる $y,z\in V$ があるから，$\phi(xy)\leqq\phi(z)$ よって $xy=cz$ なる $c\in L$ がある。したがって $\boldsymbol{d}=\phi(c)\in\phi(V)$ が示される。

つぎに$\boldsymbol{d}$に対して $\boldsymbol{dd}^*=\phi(x)$，$x\in V$；$\boldsymbol{dd}'=\phi(y)$，$y\in V$ とすると

$$\boldsymbol{d}^*\phi(y)=\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{dd}'=\boldsymbol{d}'\cdot\boldsymbol{dd}^*=\boldsymbol{d}'\phi(x)$$

よって$\boldsymbol{d}^*\sim\boldsymbol{d}'$。したがって $K(\boldsymbol{d})^{-1}=K(\boldsymbol{d}^*)$。

定理10　$\pi_0\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ を任意に固定する。$\boldsymbol{D}/\sim$の各元は $\{K(\pi)\mid\pi\neq\pi_0,\ \pi\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})\}$ にぞくする有限個の元の正ベキの積として表示される。

証明　$n\geq0$ を任意に固定した有理整数とする。$\boldsymbol{d}_0\pi_0=\phi(x)$，$x\in V$ なる$\boldsymbol{d}_0$をとって$\boldsymbol{d}_0^n$とπ_0に対して $\boldsymbol{d}_0^n\boldsymbol{d}=\phi(y)$，$y\in V$，$\pi_0\vee\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}$ なる$\boldsymbol{d}$をとると $K(\boldsymbol{d}_0)\cdot K(\pi_0)=K(\boldsymbol{e})=K(\boldsymbol{d}_0)^n\cdot K(\boldsymbol{d})$ であるから $K(\boldsymbol{d})=K(\pi_0)^n$ となる。そこで$\boldsymbol{D}/\sim$の任意元 $K\neq K(\boldsymbol{e})$ をとり，Kの任意元を$\boldsymbol{a}\pi_0^n$，$\boldsymbol{a}\vee\pi_0=\boldsymbol{e}$ のようにかくとき，このπ_0に対して上のような$\boldsymbol{d}$をとると次のようになる：

$$K=K(\boldsymbol{a}\pi_0^n)=K(\boldsymbol{a})\cdot K(\pi_0)^n=K(\boldsymbol{a})\cdot K(\boldsymbol{d})=K(\boldsymbol{ad})$$

$\boldsymbol{ad}\vee\pi_0=\boldsymbol{e}$。$\boldsymbol{ad}$は有限個の素元（$\neq\pi_0$）のベキ積にかけるから，これで定理は証明された。

定理11　$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$の任意有限個の任意の素元 $\pi_1^{(0)},\cdots,\pi_m^{(0)}$ を固定しておく。ただし $m<\#(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}))$ とする。$\boldsymbol{D}/\sim$の各元は $\{K(\pi)\mid\pi\neq\pi_i^{(0)},\ i=1,\cdots,m\}$ にぞくする有限個の元の正ベキ積として表示される。

証明　$K\in\boldsymbol{D}/\sim$，$K\neq K(\boldsymbol{e})$ として $\boldsymbol{d}\in K$，$\boldsymbol{a}\in K^{-1}$ とする。$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{c}:=\pi_1^{(0)}\cdots\pi_m^{(0)}$ とに対し

$$\boldsymbol{ab} = \phi(x),\ x \in V;\ \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$$

なる元 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{D}$ がとれる。すると $K(\boldsymbol{a}) \cdot K(\boldsymbol{b}) = K(\boldsymbol{e})$, $K(\boldsymbol{d})K(\boldsymbol{a}) = K(\boldsymbol{e})$ より $K(\boldsymbol{b}) = K(\boldsymbol{d}) = K$。そして $\boldsymbol{b} = \pi_1^{n(1)} \cdots \pi_r^{n(r)}$ と分解したとき，$\pi_i \neq \pi_k^{(0)}$, $(i = 1, \cdots, r;\ k = 1, \cdots, m)$ であって

$$K = K(\pi_1)^{n(1)} \cdots K(\pi_r)^{n(r)}, \quad n(i) > 0$$

となる。

定理12 $(L, V, \phi, \boldsymbol{D})$ を次の条件をみたす除法理論とする：

(1) $\phi: L \longrightarrow \boldsymbol{D}$ は Epimorphismus である。

(2) 各 $\pi \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ に対して $\pi = \phi(x_1) \vee \cdots \vee \phi(x_n)$ なる元 $x_i \in V$ が存在する。

(3) $\phi(x) \leqq \phi(y)$; $x, y \in V$ ならば $x = cy$ なる元 $c \in L$ が存在する。

このとき定理11がなりたつための必十条件は ϕ が条件(#)をみたすことである。

証明　まず $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \in \boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{d}_1 \in \phi(V)$ でないとする。$\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d} = \phi(x)$, $x \in V$ なる $\boldsymbol{d}$ がある。そこで $\boldsymbol{d} < \pi$ なる π を除けば，$\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{D}$, $K(\boldsymbol{d}) = K(\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{d}_2 \vee \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ なる $\boldsymbol{c}$ がとれるから $K(\boldsymbol{e}) = K(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}) = K(\boldsymbol{d}_1) \cdot K(\boldsymbol{d}) = K(\boldsymbol{d}_1) \cdot K(\boldsymbol{c}) = K(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{c})$ すなわち $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{c} = \phi(x)$ なる $x \in V$ が存在する。そこで定理11の証明のようにすればよい。

逆に $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ の任意有限個の任意の素元を $\pi_1, \cdots, \pi_m$, $m < \#(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}))$ とする。任意の $K(\boldsymbol{d})$ に対して，(#)によって，$\boldsymbol{da} = \phi(x)$, $x \in V$ なる $\boldsymbol{a}$ がある。そこで $\boldsymbol{b} := \pi_1 \cdots \pi_m$ とおくと，また(#)によって $\boldsymbol{ac} = \phi(y)$, $y \in V$, $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ なる $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{D}$ がある。したがって

$$K(\boldsymbol{a})K(\boldsymbol{d}) = K(\boldsymbol{ad}) = K(\boldsymbol{ac}) = K(\boldsymbol{a})K(\boldsymbol{c})$$

よって $K(\boldsymbol{d})=K(\boldsymbol{c})$。そして $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ の素因子 π_i で割れない（証明終）。

$\boldsymbol{P(D)}=\{\pi_1, \cdots, \pi_m\}$ のときは $\boldsymbol{ad}=\phi(x)$, $x \in V$, $\boldsymbol{b} \vee \pi_1 \cdots \pi_m=\boldsymbol{e}$ なる $\boldsymbol{b}$ はすべての π_i に対し $\boldsymbol{b} \vee \pi_i=\boldsymbol{e}$。よって $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$ となり $\boldsymbol{d}=\phi(x)$, $x \in V$。すなわちすべての Divisor は Hauptdivisor である。

以上この節でのべた除法類群の結果は，環の場合にも半群の場合にも適用できる。

（1990年3月1日，於 藜杖庵）

文　　　献

[B] G. Birkhoff : Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. V. XXV (Third Edition) (1979).

[B-S] S. I. Borewicz and I. R. Šafarevič : Zahlentheorie, Mathematische Reihe Bd. 32, Birkhäuser Verlag (1966).

[F] L. Fuchs : Partially ordered algebraic systems, International Series of Monographs in Pure and Applied Math. V. 28, Pergamon Press (1963).

[J] N. Jacobson ; Theory of rings, Amer. Math. Soc. Math. Surveys V. 2, Providence (1968).

[L-M] M. D. Larsen and P. J. McCarthy : Multiplicative theory of ideals, Pure and Applied Math. V. 43, Academic Press (1981).

[M] K. Murata : A divisor theory and integrally closed orders, Algebra Universalis V, 16, Birkhäuser Verlag (1983).

[M-R] G. Maury et J. Raynaud : Ordres maximaux au sens de K. Asano, Lecture Note in Math. 808, Springer Verlag (1980).

[R] I. Reiner : Maximal Orders, London Math. Soc. Monographs V. 5, Academic Press (1975).

[W] B. L. van der Waerden : Algebra II (Fünfte Auflage d. Moderne Algebra) Springer Verlag (1967).