MODULE CLOSURE をもつ乗法系における加法的 IDEAL 論

村　田　憲太郎

目　次

0　序
1　目　的
2　概　説
I　Ideal とその根基
1　Module Operator と Modularity
2　片側 Residual
3　素な ϕ-Ideal
4　根基と Directed ϕ-System
II　片側準素 Meet 分解
1　片側準素 Ideal
2　一般分解定理の一意性
III　弧立成分
1　Directed ϕ-System の拡張
2　拡張された Directed ϕ-System の核
3　Ideal の Directed ϕ-System による成分
4　Ideal の片側弧立成分
IV　根基と弧立成分
1　不定元の積形式
2　極小な Prime の積
3　Nested 積と片側準素 Meet 分解

4　Join-Closed Compact 生成系の下の弧立成分

V　片側準素 Meet 分解をもつ乗法系

1　生成系に関連した上半 Modularity

2　生成系に関連した弱 Artin-Rees 性

3　Modular な Ideal 系での片側準素 Meet 分解

VI　可換な場合の準素 Meet 分解

1　ϕ-Ideal の対称巾

2　Lasker 型の準素 Ideal

3　L-Primary Ideal による Meet 分解

O　序

1　目　的

結合律を仮定しない環における ideal 論は相当進展しているといってよい．その初期の文献としては [1], [2], [3], [5], [7], [15], [19], [36] などが挙げられる．ここでいう ideal 論とは通常 “加法的 ideal 論” とか “一般 ideal 論” などといわれているものをさす．

著者は主として半群，束半群における ideal 論を加法的または乗法的な面から研究を進めてきたが，今までに得られた加法的な結果のうちとくに ideal の準素分解に関するものを結合律を仮定しない乗法系の ideal に対して拡張しようというのがこの論文の目的である．

2　概　説

乗法系すなわち binary multiplication をもつ set ([6]) の部分系（sub-system）や ideal に対して何の制限も加えなければ，これらの集合はそれぞれ包含関係で Boole 束になるから，結合律をみたす通常の環における加法的

ideal論の拡張は得られないことは明らかである．そこでこの論文ではmodule operator ϕを導入して，それに関して閉じた部分系とくにideal（ϕ-ideal）を中心に考察することにする．もちろんϕとしてこれをdiscreteにとれば結果は極めて単純になるけれども意味を失うことはない．ϕと類似のoperatorはかなり以前からMyung，著者，Hsu，Houston等によって，結合律をみたす環において導入されているが，この論文ではそれらとは若干違う立場をとることにする（[10]，[11]，[12]，[16]，[28]，[29]，[30]，[33]）．

第I章ではϕ-ideal，compact生成系，素なϕ-ideal，片側residualなどの基本概念を導入し，とくにϕ-ideal Aの根基$\rho(A)$をAを含むすべての素なϕ-idealの共通分として定義する．この論文で論ずるidealの分解（meet表示）の理論と同じ方向の理論ではidealの根基をどのように定義するかということが基本的に重要である．これについては結合律をみたす環において種々の試みがなされている（[17]，[31]，[35]）．われわれの場合にこれらの論文もいくつかの示唆を与えるのであるが今回は上記の$\rho(A)$によることにする．著者はHsuとの共著の論文［29］において，結合律をみたす場合に，μ-systemなるものを導入したが，それを今の場合にcompactな生成系**K**の部分集合に適用してdirected ϕ-system（abbr. d-ϕ系）を定義する．それは**K**元で素なϕ-idealに含まれないものの全部のもつ性質を抽出して定義したもので，これはMcCoy［20］の思想圏にぞくするものであるが，このd-ϕ系は後続の章で有効に役立つ．

第II章では，まず片側primaryなϕ-idealを定義して，ϕ-ideal Qが左primaryになるための必十条件を与え，一般分解定理――それはこの論文の第V章で与えられる（定理29）――の一意性（定理10）を証明するのに必要な補題を用意する．一意性の証明については結合律をみたす環の場合と同様であるが，念のためそれを実行することにする．

ついで第III章では一般ideal論の局処理論ともいうべきϕ-idealの弧立成分について論述するが，すでに著者やMurdoch［31］がしたように，左

primary な ϕ-ideal Q に含まれない $\mathbf{K}$ の元の全部のもつ特性を $\mathbf{K}$ の部分集合に付与したものとして generalized directed ϕ-system（abbr. g-d-ϕ系）を定義する．上記 Q の根基を $P=\rho(Q)$ とするとき，$Q\subseteq P$ であるから g-d-ϕ系は P に対する d-ϕ系 $\mathbf{D}$ を含む．$\mathbf{D}$ を g-d-ϕ系の核という．このような概念によって ϕ-ideal の弧立成分が定義され，左準素分解（meet 表示）における因子の状況が明らかにされる（定理15，定理16）．

ここで論ずる結果をさらに進めるためには ideal 積に関して何らかの条件が必要となる．この理論が重要な実例を含み，したがって良い応用ができるように配慮するならば，群の正規部分群の交換子群の性質に着目して，その条件を見つけるのも一つの立場であろう．それは非結合的な代数系のもっとも古いものの一つとして，上記の正規部分群の系があるからである．ここに二つの正規部分群の積を，その交換子群として定義するのであるが，このことは Schenkman［37］および著者［25］がすでに指摘している．そこで第Ⅳ章では巾零群のみたす条件をもとに条件（ε）を導入して（Ⅳ，3）精しい結果を導く（定理22，定理23，定理24）．

以上述べたことは，ϕ-ideal で左準素 ideal の有限個の meet として表示できるものについての結果であった．任意の ϕ-ideal がこのような表示をもつためには ϕ-ideal 系に対してさらに条件が要求される．それは（Ⅰ，1）で述べた modularity を $\mathbf{K}$ との関連で弱めた条件として見出される．すると，この条件と ϕ-ideal に関する昇鎖律のもとに“任意の ϕ-ideal が左準素 ϕ-ideal の meet としての表示をもつための必十条件は ϕ-ideal 束が $\mathbf{K}$ との関連で定義される弱 Artin-Rees の条件をみたすことである”ことが証明される（Ⅴ）．よく知られているように環の ideal 系が modularity をもっていることは，ideal 論が展開できる基本である．とくに乗法的 ideal 論が成立するように進めばこの modularity は distributivity またはそれに近い条件に近づいてくる．このように見れば，ideal 束の条件として上述の弱められた modularity のもとで任意の ϕ-ideal の片側準素 ϕ-ideal の meet 分解の場が得られることは注目できると思う．さらに，この条件が弱められるか否かは著者には未

解決である．なお最後の章で可換ではあるが結合律を仮定しない乗法系の ϕ-ideal の分解を求める．

この論文を通して $S=(S,\bullet)$ を単位元 e をもつ乗法系とする．乗法の結合律は仮定しない．S の巾集合を $\mathfrak{P}(S)$ で表わす．$X, Y \in \mathfrak{P}(S)$ に対して $X\bullet Y=\{x\bullet y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ とする．とくに1元 x より成る集合 $\{x\}$ は x と同一視して $\{x\}\bullet X$ を $x\bullet X$ で表わす $X\bullet x$ についても同様である．

I　Ideal とその根基

1　Module Operator と Modularity

$$\phi : \mathfrak{P}(S) \longrightarrow \mathfrak{P}(S)\ ;\ X \longmapsto \phi(X)$$

が次の4条件をみたすとき，ϕ を module operator という：

（1）$X \subseteq \phi(X)$

（2）$X \subseteq Y \ \Rightarrow\ \phi(X) \subseteq \phi(Y)$

（3）$\phi\phi(X)=\phi(X)$

（4）$\phi(X)\bullet\phi(Y) \subseteq \phi(X\bullet Y)$

X が $\phi(X)=X$ をみたすとき，X を ϕ-closed であるという．

空でない $A \in \mathfrak{P}(S)$ が次の2条件をみたすとき，A を S の左 ϕ-ideal（右 ϕ-ideal）という：

（1）A は ϕ-closed である．

（2）$S\bullet A \subseteq A$　（$A\bullet S \subseteq A$）

A が左 ϕ-ideal で同時に右 ϕ-ideal であるとき，A を両 ϕ-ideal または単に ϕ-ideal とか ideal という．

S の ideal 全部の集合を $\mathbf{I}$ で表わす．$\mathbf{I}$ は包含関係に関して完備束を作ることは明白である．

$X \in \mathfrak{P}(S)$ に対し X から生成される ideal $g(X)$ が存在する．$g(X)$ は X を含むすべての ideal の共通分であることはもちろんであるが，構成的には次の式で与えられる：

$$g(X) = \phi(\bigcup_{a,n} f^{(a)}(\underset{1}{S}, \cdots, \underset{r-1}{S}, \underset{r}{X}, \underset{r+1}{S}, \cdots, \underset{n}{S}))$$

ただし $f^{(a)}(x_1, \cdots, x_n)$ は weight n，type a の product-form [40]，$n \geqq 3$, $r \neq 1$，$r \neq n$ とし，$\cup$ はあらゆる type と n についての集合和を意味する．

$\mathbf{I}$ の部分集合 $\mathbf{J}$ を与えたとき，$\mathbf{J}$ に含まれるすべての ideal の集合和より生成される ideal を $g(\mathbf{J})$ で表わすことにする．

定義：　さて $\mathbf{I}$ の部分集合 $\mathbf{K}$ が次の 2 条件をみたすとき，$\mathbf{K}$ を $\mathbf{I}$ の compact な生成系という．

（1）　$E \in \mathbf{K}$, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{K}$ に対して $E \subseteq g(\mathbf{H})$ ならば有限個の $E_1, \cdots, E_n \in \mathbf{H}$ が存在して $E \subseteq \cup_{i=1}^{n} E_i$ である．

（2）　任意の $A \in \mathbf{I}$ は $\mathbf{K}$ の適当な部分集合 $\mathbf{H}(A)$ によって $A = g(\mathbf{H}(A))$ と表わされる．

$\mathbf{K}$ にぞくする ideal を $\mathbf{K}$-ideal ということもある．

完備束 $\mathbf{I} = (\mathbf{I}, \subseteq)$ は一般には modular 束ではない．ここで，これに関連したことに若干触れておく．まず ϕ なる modular operator について条件（4）の仮定なしに次の（1_m）が成り立つことが証明されるが紙数の都合でここではそれを実行しない．

（1_m）　$a, b \in S$; $X \in \mathfrak{P}(S)$ として，$a \notin \phi(X)$ であって $a \in \phi(X \cup b)$ であるならば $b \in \phi(X \cup a)$ が成り立つ（これを '元の ϕ に関する交換性' という）とき ϕ-closed な $\mathfrak{P}(S)$ の元の全体は包含関係に関して semi-modular な束を形成する（[27]，[38]）．

この元の ϕ に関する交換性を強くして次の結果が得られる．ここでは証明

を省略する．

(2_m)　$a \in S$; $X, Y \in \mathfrak{P}(S)$ として $a \notin \phi(X)$ であって $a \in \phi(X \cup Y)$ であるならば $\phi(X \cup a) = \phi(X \cup b)$，$b \in \phi(Y)$ なる b が存在するとき ϕ-closed な $\mathfrak{P}(S)$ の元の全体は包含関係に関して modular 束を形成する．

さらに条件（4）の代りにそれより強い条件として

$(4')$　$a \bullet \phi(X) = \phi(a \bullet X)$，$\phi(X) \bullet a = \phi(X \bullet a)$

を仮定し，その上

（5）　$a \bullet z = z \bullet a = z \quad (\forall a \in S)$

なる元 z の存在を付加すれば，$\mathbf{I}$ が modular 束を作ることが証明される．なお $\mathbf{I}$ の semi-modularity，modularity に関しては後に Artin-Rees property に関連して論述したい（第V章）．

2　片側 Residual

結合律を仮定しない代数系（乗法系）においても residual が定義できて，それが通常の計算法則をみたす．とくに compact に生成される乗法系について residual が定まる．

A, B を任意の 2 つの ideal とする：$A, B \in \mathbf{I}$. $A \cap B$ を生成する $\mathbf{K}$-ideal を任意にとって E とすれば

$$E \bullet B \subseteq (A \cap B) \bullet B \subseteq A \bullet B \cap B \bullet B \subseteq A \bullet B \subseteq A$$

であるから $E \bullet B \subseteq A$ をみたす $\mathbf{K}$-ideal E が存在する．このような $\mathbf{K}$-ideal 全部の集合を $\mathbf{K}_l(A, B)$ で表わす．これによって‘A の B による left residual’を次で定義する：

$$(A : B)_l := g(\mathbf{K}_l(A, B))$$

このとき，$(A : B)_l = \phi(\cup\{E \mid E \in \mathbf{K}_l(A, B)\})$ となることが示される．全く平行的に‘A の B による right residual’$(A : B)_r$ を定義することができる．すると次の定理が成り立つ：

定理 1． Module operation ϕ をもつ乗法系（結合律を仮定しない）において ϕ-ideal の全部の集合 $\mathbf{I}$ は包含関係と上記の左または右の residual に関して片側 residuated lattice（[4]）を形成する．この residual は compact な生成系 $\mathbf{K}$ の採り方に依存しない．

証明　left residual について述べる：まず次の 7 つの性質は一々 check できる：

(1_l)　$A \subseteq (A : B)_l$

(2_l)　$(A : B)_l \bullet B \subseteq A$

(3_l)　$B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad (A : B)_l = S$

(4_l)　$A_1 \subseteq A_2 \quad \Rightarrow \quad (A_1 : B)_l \subseteq (A_2 : B)_l$

(5_l)　$B_1 \subseteq B_2 \quad \Rightarrow \quad (A : B_1)_l \supseteq (A : B_2)_l$

(6_l)　$\cap_\lambda (A : B_\lambda)_l = (A : g(\cup_\lambda B_\lambda))$

(7_l)　$\cap_\lambda (A_\lambda : B)_l = (\cap_\lambda A_\lambda : B)_l$

これらについては結合律を必要としない．つぎに定理の後半について：$C \bullet B \subseteq A$ なる $C \in \mathbf{I}$ の全部の集合を $\mathbf{I}_l(A, B)$ とする．$\mathbf{H}(C)$ の任意元 E について $E \bullet B \subseteq A$ は明白であるから $\mathbf{H}(C) \subseteq \mathbf{K}_l(A, B)$ である．このことから $g(\mathbf{H}(C)) \subseteq g(\mathbf{K}_l(A, B))$．この逆の包含関係が成り立つことは明白．よって $g(\mathbf{I}_l(A, B)) = g(\mathbf{K}_l(A, B)) = (A : B)_l$ である．よって residual は $\mathbf{K}$ の採り方に依存しない（終）．

注意：　residual の定義（[4]，[8]）によれば，$A, B \in \mathbf{I}$ に対して $C_0 \bullet B \subseteq A$ なる '最大の $C_0 \in \mathbf{I}$' の存在を示せば十分である．それが上記の $g(\mathbf{I}_l(A, B)) = g(\cup\{\mathbf{H}(C) \mid C \bullet B \subseteq A\})$ である．

3　素な ϕ-Ideal

$\mathbf{I}$ の compact な生成系 $\mathbf{K}$ を任意に固定して話を進める．ideal $A \in \mathbf{I}$ に対して $(A : E)_l \supset A$（等号不成立）なる $E \in \mathbf{K}$ は 'A に左有縁である（left related ; nicht linksteilerfremd)' という．そうでないとき，つまり $(A:E)_l=A$ のとき，E は 'A に左無縁 (left unrelated ; linksteilerfremd)' であるという．A と左無縁な K-ideal の全部の集合を $\mathbf{u}_l(A)$ で表わす．また A に含まれる K-ideal の全部の集合を $\mathbf{l}(A)$で表わす．さらに $\mathbf{u}_l(A)$, $\mathbf{l}(A)$ の $\mathbf{K}$ における complement をそれぞれ $\mathbf{u}_l^c(A)$, $\mathbf{l}^c(A)$ で表わすことにする．いま A を S とことなる ideal とするとき

$$\mathbf{u}_l(A)\subseteq\mathbf{l}^c(A),\qquad \mathbf{l}(A)\subseteq\mathbf{u}_l^c(A)$$

が成り立つ：$E\in\mathbf{u}_l(A)$ つまり $(A:E)_l=A$ とする．かりに $E\subseteq A$ とすれば (3_l) によって $(A:E)_l=S$．$A\fallingdotseq S$ であるからそれは不可能である．よって $E\in\mathbf{l}^c(A)$ でなくてはならない．

さて ϕ-ideal A, B の積がまた ϕ-ideal であるようにするため次のように定義する：

$$A\,\phi\,B=\phi(A\bullet B)$$

たとえば ϕ-ideal P が prime であるというのは '$A\,\phi\,B\subseteq P\Rightarrow A\subseteq P$ or $B\subseteq P$' と定義するのであるが，$\phi(P)=P$ であることから

$$A\bullet B\subseteq P\ \Leftrightarrow\ A\,\phi\,B\subseteq P$$

である．よって prime の定義を '$A\bullet B\subseteq P\Rightarrow A\subseteq P$ or $B\subseteq P$' としてもよい．またこの A, B を K 元として限定してもよい．その他に prime の定義はいろいろ可能である [6], [19], [39] ; 上の定義の系統のものとして lemma 9 ([25] の12個のうちのいくつかを非結合的な乗法系において採用できる．また [30] や [32] における f としてわれわれの ϕ を採ることができる．すなわち f の条件を ϕ で書きかえれば

(1)　$a\in\phi(a)$

(2)　$x\in\phi(a\cup A)\ \Rightarrow\ \phi(x)\subseteq\phi(a\cup A)$

となり，これは自明であるから，Definition 1, 2 [30] を modify して f-

prime を定義することができる．それは次に定義する directed ϕ-closed system に関連する．

定義：　$\mathbf{K}$ の部分集合 $\mathbf{D}$ が次の条件（$*$）をみたすとき $\mathbf{D}$ を directed ϕ-closed system (abbr. d-ϕ系）という．

$$(*)\quad E_1\ E_2 \in \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{E}_3 \in \mathbf{D}\ \text{s. t.}\ E_3 \subseteq E_1 \phi E_2$$

空集合は d-ϕ系とする．

定理 2．ϕ-ideal P について次の 3 条件は互いに同値である：

（$1°$）　P は prime である．

（$2°$）　$E_1 \phi E_2 \subseteq P$（$E_i \in \mathbf{K}$）　$\Rightarrow$　$E_1 \subseteq P$ or $E_2 \subseteq P$

（$3°$）　$\mathbf{1}^c(P)$ が d-ϕ系である．

証明　（$1°$）$\Rightarrow$（$2°$）$\Rightarrow$（$3°$）$\Rightarrow$（$4°$）を示せばよい．（$2°$）$\Rightarrow$（$3°$）は（$2°$）の対偶をとれば $\mathbf{1}^c(P)$ が ϕ-積に関して閉じていることを示している．他の部分も容易に示される．

定理 3．P を S とことなる ϕ-ideal とする．P が prime なるための必十条件は次が成り立つことである：

$$\mathbf{u}_l(P) = \mathbf{1}^c(P)$$

証明　P が prime であるとして，$(P : E)_l = P(E \in \mathbf{K})$ であるとする．E は P に含まれないことは（3_l）を用いて直ぐ分かるから $E \in \mathbf{1}^c(P)$，$\mathbf{u}_l(P) \subseteq \mathbf{1}^c(P)$．つぎに E が P に含まれなければ $(P : E)_l \bullet E \subseteq P$ より $(P : E)_l \subseteq P$，$(P : E)_l = P$ となり $\mathbf{1}^c(P) \subseteq \mathbf{u}_l(P)$ である．逆に $\mathbf{u}_l(P) = \mathbf{1}^c(P)$ とする．$E_1 \bullet E_2 \subseteq P$（$E_i \in \mathbf{K}$）とすると $E \subseteq E_1 \phi E_2$ なる $E \in \mathbf{K}$ に対して $(P : E)_l = P$ よって $P \subseteq (P : E_1 \phi E_2)_l \subseteq (P : E)_l = P$，したがって（$P$:

$E_1 \phi E_2)_l = P$ となる．ここでかりに E_1, E_2 ともに P に含まれないとすると $E_1, E_2 \in \mathbf{u}_l^c(P) = \mathbf{l}(P)$ となり P は真に（$P: E_i)_l = P$（$i = 1, 2$）に含まれることになって矛盾である．よって $\mathbf{u}_l(P) = \mathbf{l}^c(P)$ でなくてはならない．

補題4．ϕ-ideal A に対して $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたない d-ϕ 系を1つ固定して $\mathbf{D}$ とする．このとき次の集合は帰納的である．

$$\mathbf{T}(A\,;\,\mathbf{D}) := \{B \in \mathbf{I} \mid \mathbf{l}(B) \cap \mathbf{D} = \phi\}$$

$\mathbf{T}(A\,;\,\mathbf{D})$ が帰納的であることは容易に確かめられるから Zorn の補題によって極大元がある．その任意の1つを P とする．そこで $E_1 \phi E_2 \subseteq P$ で E_1, E_2 ともに P に含まれないような $E_i \in \mathbf{K}$（$i = 1, 2$）が存在するとすれば，$g(P \cup E_i)$ は $\mathbf{D}$ と共通元をもつから，それらを F_i とする（$i = 1, 2$）．ここで $F \subseteq F_1 \phi F_2$ なる $F \in \mathbf{D}$ があるから

$$\begin{aligned}
&F \subseteq F_1 \phi F_2 \subseteq g(P \cup E_1) \phi g(P \cup E_2) \\
&= \phi(g(P \cup E_1) \cdot g(P \cup E_2)) \subseteq \phi(P \cup E_1 \cdot E_2) \\
&\subseteq g(P \cup P) = g(P) = P
\end{aligned}$$

よって $F \in \mathbf{l}(P)$ となって矛盾である．

このことから次の定理が導かれる：

定理5．A，$\mathbf{D}$ および $\mathbf{T}(A\,;\,\mathbf{D})$ を補題4と同じとする．このとき $\mathbf{T}(A\,;\,\mathbf{D})$ の極大元（その存在は補題4により保証される）P はすべて prime である．

証明　K-ideal E, F で $E \phi F \subseteq P$ かつ，E, F ともに P に含まれないものが存在すると仮定する．すると $E_0 \subseteq g(P \cup E)$，$F_0 \subseteq g(P \cup E)$；$E_0, F_0 \in \mathbf{D}$ なる E_0, F_0 が存在する．すると $M \in \mathbf{D}$，$M \subseteq E_0 \phi F_0$ なる M がとれるから

$$M \subseteq g(P \cup E) \phi g(P \cup F) \subseteq g(P \cup E \phi F) \subseteq g(P) = P$$

となって矛盾である．よって上記のような E, F は存在しないから P は prime でなければならない．

4　根基と Directed ϕ-System

任意の ϕ-ideal A に対して $A \subseteq P$ なる prime P が存在する（補題４）．そこでこのような prime P の全部の共通分を A の '根基' と定義し，それを $\rho(A)$ で表わす．これについて次の，いわゆる 'radical property' が成り立つ：

(1,) $A \subseteq \rho(A)$

(2,) $A \subseteq B \Rightarrow \rho(A) \subseteq \rho(B)$

(3,) $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$

(4,) $\rho(A \cap B) = \rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \phi B)$

定義：　$A \subseteq P$ なる P が prime で $A \subseteq P' \subseteq P$, $P' \neq P$ なる prime P' が存在しないとき，P を 'A にぞくする minimal prime' という．すると A の根基 $\rho(A)$ は A にぞくするすべての minimal prime の共通分に等しいことが次の補題より導かれる．

補題６．$A \subseteq P$ とし，P を prime とする．$A \subseteq P' \subseteq P$ なる prime P' の全部の集合は帰納集合である．ただし順序は $P' \leqq P'' :\Leftrightarrow P' \supseteq P''$ によって定義する．

証明　$P' \leqq P'' \leqq \cdots \leqq P^{(n)} \leqq \cdots$（$A \subseteq P^{(n)} \subseteq P$）を任意の鎖とすれば $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)} =: P^*$ はまた $A \subseteq P^* \subseteq P$ なる prime である（終）．

prime と d-ϕ 系との関係は次の定理によって与えられる．この定理は次の

章で有用となる.

定理7．Aをϕ-idealとする．K-ideal Eを元にもつd-ϕ系が必ず$\mathbf{l}(A)$と共通な元（K-ideal）をもつようなE全部から生成されるϕ-ideal $r(A)$はAの根基$\rho(A)$と一致する.

証明　いまかりに$A \subseteq P$であるが$r(A)$を含まないようなprime Pが存在すると仮定すれば，Pには含まれないで$r(A)$に含まれるK-ideal Eがある．すると$E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_n$なるK-ideal E_iで，E_iを元にもつどのd-ϕ系も$\mathbf{l}(A)$と共通元をもつようなE_iが存在する．このE_iのメンバーの中には少なくとも1個はPに含まれないものが存在するから，そのような1つをE_kとする．$E_k \in \mathbf{l}^c(P) \cap \mathbf{l}(A) = \phi$となってこれは矛盾である．よって$A \subseteq P$なるprimeはすべて$r(A)$を含むから$r(A) \subseteq \rho(A)$となる．つぎに逆の包含関係を見るためK-ideal Eで$r(A)$に含まれないものをとると，Eを含み$\mathbf{l}(A)$と共通元（K-ideal）をもたないようなd-ϕ系$\mathbf{D}$が存在する．すると定理5によって$A \subseteq P$で$\mathbf{l}(P)$が$\mathbf{D}$と共通なK-idealを含まないようなprime Pが存在する．よってEはPに含まれない．だからEは$\cap_i \{P_i \mid P_i \supseteq A\} = \rho(A)$に含まれない．したがって$\rho(A) \subseteq r(A)$となって目的を達する.

II　片側準素Meet分解

1　片側準素Ideal

ideal（ϕ-ideal）Qが“左primary”（abbr. l-p-ϕ-ideal）または“左準素なϕ-ideal”であるとはK-ideal E, Fについて$E \phi F \subseteq Q$であってFが$\rho(Q)$（Qの根基）に含まれなければ，$E \subseteq Q$となることを意味する.

すぐ分かることは，上記の E, F をそれぞれ $\mathbf{I}$ の元として，ゆるめても定義としては同値になることである．そして次の補題も容易に示される：

補題 8．ϕ-ideal Q が左 primary であるための必十条件は下の包含関係が成り立つことである：

$$\mathbf{u}_l^c(Q) \subseteq \mathbf{l}(\rho(Q))$$

いま有限個の左 primary な ϕ-ideal $Q_1, \cdots, Q_n$ についてそれらの各根基がすべて等しいとする：$\rho(Q_i) = C$ $(i = 1, \cdots, n)$．すると $Q := Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ もまた左 primary で，その根基は C に等しい．何故かというと (4_r) $(\mathbf{I}, 4)$ によって $\rho(Q_1 \cap \cdots \cap Q_n) = \rho(Q_1) \cap \cdots \cap \rho(Q_n) = C$ である．そこで $\mathbf{K}$-ideal E, F について $E \phi F \subseteq Q$ とし，F は $C = \rho(Q)$ に含まれないとする．すると $E \phi F \subseteq Q_i$，F は $C = \rho(Q_i)$ に含まれないから $E \subseteq Q_i$ $(i = 1, \cdots, n)$，$E \subseteq Q$ となる．さて次の用語を用いる．

$$A = A_1 \cap \cdots \cap A_n \qquad (*)$$

を ϕ-ideal A の，ϕ-ideal A_i による meet 表示とする．1 つの A_i を省くと，右辺が A より真に大きくなるとき，A_i は“省けない”という．$(*)$ の右辺のどの A_i も省けないとき A の meet 表示 $(*)$ を“省けない表示”または“簡約表示”という．$(*)$ が簡約表示でないときはどれかの A_i を省くことができるが，省ける A_i の取り方はいろいろあるであろう．一般的に省ける $A_{ij}, \cdots, A_{ir}$ は一意的には定まらない．

補題 9．$Q_l, \cdots, Q_n$ を左 primary な ϕ-ideal とし $A := Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ を簡約表示とする．少なくとも一組の (i, k) があって $\rho(Q_i) \neq \rho(Q_k)$ であれば A は左 primary でない．

証明　$T_i := Q_1 \cap \cdots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_n$ とおくと $Q_i \phi T_i \subseteq A$ で T_i

はAに含まれないから，かりにAが左primaryであるとすれば $Q_i \subseteq \rho(A) = \rho(Q_1) \cap \cdots \cap \rho(Q_n)$ よって(3_r)（I，4）によって $\rho(Q_i) \subseteq \rho(Q_1) \cap \cdots \cap \rho(Q_n)$ がすべての $i = 1, \cdots, n$ について成り立つから

$$\rho(Q_1) = \cdots = \rho(Q_n)$$

となり，これは矛盾である（終）.

ϕ-ideal A の簡約表示：

$$A = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \qquad (\sharp)$$

があるとき，これが次の2条件をみたすならばこの表示（♯）をAの“左primary簡約表示”または略して“l-p-s表示”という.

(1_p)　各Q_iは左primaryである.

(2_p)　どの2つの $Q_i \cap Q_k$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \cdots, n)$ も左primaryではない.

ここで条件(2_p)は次の条件で置きかえてもよい.

(2_p^*)　どの2つ以上の $Q_{i(1)} \cap \cdots \cap Q_{i(r)}$ $(r \geqq 2;\ i(1), \cdots, i(r) = 1, \cdots, n)$ も左primaryでない.

$(2_p^*) \Rightarrow (2_p)$ は自明であるが，$(2_p) \Rightarrow (2_p^*)$ については $Q_{i(1)} \cap \cdots \cap Q_{i(r)}$ が簡易表示であることから補題9によって明らかである.

2　一般分解定理の一意性

さて可換な結合的環におけるいわゆる一般分解定理は［8］，［14］，［17］，［23］，［35］等によって種々の方向に拡張されているが，ここでは分解の一意性についてのみ考察する．それは次のように拡張される（分解の可能性については後の章で得られる）.

定理10. ϕ-ideal A が有限個の左primaryなϕ-idealのmeetとして表示

されれば，A は l-p-s 表示をもつ．いま

$$A=Q_1^{(1)}\cap\cdots\cap Q_m^{(1)}=Q_1^{(2)}\cap\cdots\cap Q_n^{(2)} \tag{α}$$

を A の 2 通りの l-p-s 表示とすれば，$m=n$ となり，番号 $1,\cdots,m=n$ を適当に並べ代えて，

$$\rho(Q_i^{(1)})=\rho(Q_i^{(2)}) \qquad (i=1,\cdots,m=n)$$

とすることができる．

証明　まず補題 9 とその直前にのべたことから A が l-p-s 表示をもつことが分かる．そこで $\{\rho(Q_1^{(1)}),\cdots,\rho(Q_m^{(1)}),\ \rho(Q_1^{(2)}),\cdots,\rho(Q_n^{(2)})\}$ の中の set として極大なものを 1 つとる．必要ならば番号 $1,\cdots,m;1,\cdots,n$ および右肩の(1)，(2)を打ち替えればよいから，その極大なものを $\rho(Q_1^{(1)})$ としてよい．すると $\rho(Q_1^{(1)})$ と同じものが $\{\rho(Q_1^{(2)}),\cdots,\rho(Q_n^{(2)})\}$ の中に現われていることが分かる：もしかりに $\rho(Q_1^{(1)})\neq\rho(Q_k^{(2)})$ $(k=1,\cdots,n)$ であるとすれば，$Q_1^{(1)}$ は $\rho(Q_k^{(2)})$ のどれにも含まれない．もし $Q_1^{(1)}\subseteq\rho(Q_k^{(2)})$ なる k があれば $\rho(Q_1^{(1)})\subseteq\rho(\rho(Q_k^{(2)}))=\rho(Q_k^{(2)})$，$\rho(Q_1^{(1)})=\rho(Q_k^{(2)})$ となるからである（I，4，(2_r)，(3_r) と $\rho(Q_1^{(1)})$ の極大性による）．他方において $(Q_i^{(1)}:Q_1^{(1)})_l=Q_i^{(1)}$ が $i=2,\cdots,m$ について成り立ち，$(Q_k^{(2)}:Q_1^{(1)})_l=Q_k^{(2)}$ が $k=1,2,\cdots,n$ について成り立つことが分かるから $A=Q_1^{(2)}\cap\cdots\cap Q_n^{(2)}=(Q_1^{(2)}:Q_1^{(1)})_l\cap\cdots\cap(Q_n^{(2)}:Q^{(1)})_l=(Q_1^{(1)}:Q_1^{(1)})_l\cap(Q_2^{(1)}:Q_1^{(1)})_l\cap\cdots\cap(Q_m^{(1)}:Q_1^{(1)})_l=S\cap Q_2^{(1)}\cap\cdots\cap Q_m^{(1)}=Q_2^{(1)}\cap\cdots\cap Q_m^{(1)}$ となって矛盾を生ずる．そこで $\rho(Q_1^{(1)})=\rho(Q_1^{(2)})$ としてよい．さて (α) において $(A:Q_1^{(1)})_l$ をつくれば次の等式が得られる：

$$(Q_2^{(1)}:Q_1^{(1)})_l\cap\cdots\cap(Q_m^{(1)}:Q_1^{(1)})_l=(Q_1^{(2)}:Q_1^{(1)})_l\cap\cdots\cap(Q_n^{(2)}:Q_1^{(1)})_l \tag{β}$$

$i\neq1$ であれば $Q_1^{(1)}$ は $\rho(Q_i^{(1)})$ に含まれないし，また $Q_1^{(1)}$ は $\rho(Q_k^{(2)})$ にも，$k\neq1$ なるかぎり，含まれない．よって，このような i, k に対して $(Q_i^{(1)}:$

$Q_1^{(1)})_l = Q_i^{(1)}$, $(Q_k^{(2)} : Q_1^{(1)}) = Q_k^{(2)}$ である．よって（β）より次の等式を得る：

$$Q_2^{(1)} \cap \cdots \cap Q_m^{(1)} = (Q_1^{(2)} : Q_1^{(1)})_l \cap Q_2^{(2)} \cap \cdots \cap Q_n^{(2)}$$

したがってこの等式から次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&(Q_2^{(1)} : Q_1^{(2)})_l \cap \cdots \cap (Q_m^{(1)} : Q_1^{(2)})_l \\ &= ((Q_1^{(2)} : Q_1^{(1)})_l : Q_1^{(2)})_l \cap (Q_2^{(2)} : Q_1^{(2)})_l \cap \cdots \cap (Q_n^{(2)} : Q_1^{(2)})_l \qquad (\gamma)\end{aligned}$$

ここで $(Q_1^{(2)} : Q_1^{(1)})_l \supseteq Q_1^{(2)}$ は明らかで，$i \neq 1$, $k \neq 1$ であれば $\rho(Q_i^{(1)})$ も $\rho(Q_k^{(2)})$ も $Q_1^{(2)}$ を含まないから $(Q_i^{(1)} : Q_1^{(2)})_l = Q_i^{(1)}$, $(Q_k^{(2)} : Q_1^{(2)})_l = Q_k^{(2)}$ である．よって（γ）から

$$Q_2^{(1)} \cap \cdots \cap Q_m^{(1)} = Q_2^{(2)} \cap \cdots \cap Q_n^{(2)}$$

が導かれる．この最後の等式に対して（α）について行った方法を繰り返す．これをつづけて遂に $m=n$ で $\rho(Q_i^{(1)}) = \rho(Q_i^{(2)})$（$i=1, \cdots, m=n$）が見られる（終）．

III　弧立成分

この章でも記号は前の2章と同じである．

1　Directed ϕ-System の拡張

定義：　**K**の部分集合**M**が次の2つの条件をみたすとき，これを“広義の左 directed ϕ-system”（略して“g-d-ϕ系”）という：

（1_m）　**M**は少なくとも1つの d-ϕ系**D**を含む．

（2_m）　$\mathbf{M} \neq \Phi$ ならば $\mathbf{D} \neq \Phi$ である．

（3_m）　**M**の各元Fと**D**の各元Eに対して $U \subseteq F\phi E$ なる $U \in \mathbf{M}$ が存在する．

Φも1つの左g-d-ϕ系と見る．そのときはそれに含まれる左d-ϕ系はΦ以外にはない．

また$\mathbf{M}$がΦでないとき，$\mathbf{M}$に含まれるd-ϕ系はΦでないものとして存在し，その1つの$\mathbf{D}$について条件（3_m）をみたせばよい．このような$\mathbf{D}$を$\mathbf{M}$の“核”と呼び，$\mathbf{M}[\mathbf{D}]$によって$\mathbf{M}$が$\mathbf{D}$を核にもつ左g-d-ϕ系であることを示す．もちろん$\mathbf{M}$によって$\mathbf{D}$が一意的に定まるとは限らない．またd-ϕ系$\mathbf{D}$はそれ自身を核にもつ左g-d-ϕ系であることは明らかである．いまϕ-ideal Aに対して$\mathbf{l}(A)$と共通元をもたないd-ϕ系$\mathbf{D}$を1つ固定する．この$\mathbf{D}$を核にもち$\mathbf{l}(A)$と共通元をもたないようなすべての左g-d-ϕ系$\mathbf{M}_\lambda[\mathbf{D}]$の集合和を$\mathbf{M}_A[\mathbf{D}]$とする：$\mathbf{M}_A[\mathbf{D}]=\cup_\lambda \mathbf{M}_\lambda[\mathbf{D}]$．これはもちろん$A$と$\mathbf{D}$とによって一意的に定まる左g-d-$\phi$系で$\mathbf{l}(A)$と共通元をもたない最大の左g-d-$\phi$系である．

以後，左g-d-ϕ系の“左”を略して単にg-d-ϕ系ということもある．

2　拡張されたDirected ϕ-Systemの核

この節ではAをSとことなるϕ-idealとし，$\mathbf{D}$をΦでないd-ϕ系とする．次の節で必要ないくつかの補題をのべる．

Aと$\mathbf{D}$に対して下の2条件をみたすg-d-ϕ系$\mathbf{M}$を考える：

（1） $\mathbf{M}$は$\mathbf{D}$を核にもつ．

（2） $\mathbf{M}$と$\mathbf{l}(A)$とは共通元（K-ideal）をもたない．

このとき$\{C\in\mathbf{I}\mid A\subseteq C,\ \mathbf{M}\cap\mathbf{l}(C)=\Phi\}$は帰納集合であるから，極大元をもつ．その極大元の任意の1つをQとするとき，次が成り立つ：

補題11. $\mathbf{u}_l(Q)$は$\mathbf{D}$を含む．

証明　K-ideal Eが$(Q:E)_l\supset Q$（等号不成立）をみたせばEが$\mathbf{D}$に含まれないことを示せばよい．$F\subseteq(Q:E)_l$でかつQに含まれないK-ideal Fが存在するからQは$g(Q\cup F)$に真に含まれる．よってQの極大性により

$$F_o \subseteq g(Q \cup F), \qquad F_o \in \mathbf{D}$$

なる K-ideal F_o が存在する．すると

$$F_o \phi E \subseteq g(Q \cup F) \phi E \subseteq g(Q \phi E \cup F \phi E) \subseteq Q$$

となる．ここでもし E が $\mathbf{D}$ の元であると仮定すれば，$E_o \in \mathbf{D}$ でかつ $E_o \subseteq F_o \phi E$ なる E_o が存在する．よって $E_o \subseteq Q$ となり $\mathbf{l}(Q)$ が $\mathbf{M}$ と共通元を含むことになり矛盾である．

補題12. A と $\mathbf{D}$ とに対して次が成り立つ：

$$\mathbf{D} \subseteq \mathbf{u}_l(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{l}^c(A) = \mathbf{M}[\mathbf{D}]$$

証明　(⇒)：$\mathbf{u}_l(A) \supseteq \mathbf{D}$ を仮定すれば，$\mathbf{u}_l(A) \subseteq \mathbf{l}^c(A)$ は当然である（I，3）から，$\mathbf{D} \subseteq \mathbf{l}^c(A)$ である．よって任意の $E \in \mathbf{D}$ と任意の $F \in \mathbf{l}^c(A)$ に対して $(A:E)_l = A$ であって A は F を含まない．したがって $F \phi E$ は A に含まれない．このことから A に含まれない K-ideal E_o で $E_o \subseteq F \phi E$ なるものが存在する．つまり $\mathbf{l}^c(A)$ は $\mathbf{D}$ を核とする g-d-ϕ系になっている．

(⇐)：$\mathbf{l}^c(A)$ が $\mathbf{D}$ を核にもつ g-d-ϕ系であると仮定する．もしかりに $\mathbf{D}$ が $\mathbf{u}_l(A)$ に含まれないと仮定すれば $\mathbf{D}$ の元 F で $F \in \mathbf{u}_l^c(A)$ が存在する．すると $(A:F)_l$ は A を真に含むから，A に含まれない K-ideal E で $E \subseteq (A:F)_l$ なるものが存在する．すると $E_o \subseteq E \phi F$ をみたす任意の K-ideal E_o に対して $E_o \subseteq A$ である．他方，仮定より $F_o \subseteq E \phi F$ で A に含まれない K-ideal F_o が存在する．このことは矛盾である（終）．

以後次の記号を用いる：

$$\mathbf{T}_l(A, \mathbf{D}) := \{B \in \mathbf{I} \mid A \subseteq B, \ \mathbf{D} \subseteq \mathbf{u}_l(B)\}$$

ただし d-ϕ系 $\mathbf{D}$ は $\mathbf{l}(A)$ と共通元（K-ideal）を含まないものとする．

補題13. d-ϕ系 $\mathbf{D}$ は $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたないものと仮定する．$\mathbf{D}$ を核としてもち，かつ $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたない g-d-ϕ系の全部の集合和を $\mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$ とおく．このとき $\mathbf{K}$ から $\mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$ を除いた集合から生成される ϕ-ideal は $\mathbf{T}_l(A, \mathbf{D})$ の極小元である．

証明　まず $A \subseteq B$, $\mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D}) \cap \mathbf{l}(B) = \Phi$ をみたす ϕ-ideal B の全体の中には極大元があるからその 1 つを Q とする（補題11の直前）．$\mathbf{u}_l(Q) \supseteq \mathbf{D}$ であるし，$\mathbf{l}^c(Q) \supseteq \mathbf{u}_l(Q)$ であるから補題12によって $\mathbf{l}^c(Q) = \mathbf{M}[\mathbf{D}]$ である．$\mathbf{l}^c(Q)$ が $\mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$ を含むことは明白であるから，$\mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$ の極大性によって $\mathbf{l}^c(Q) = \mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$，すなわち $\mathbf{l}(Q) = \mathbf{K} - \mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$ であるから

$$Q = g(\mathbf{l}(Q)) = g(\mathbf{K} - \mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D})$$

が成り立つ．そこで $A \subseteq C \subset Q$ をみたす任意の ϕ-ideal C に対して $\mathbf{u}_l(C)$ が $\mathbf{D}$ を含まないことを示せばよい：いまかりに $\mathbf{u}_l(C)$ が $\mathbf{D}$ を含むと仮定すると補題11によって $\mathbf{l}^c(C)$ は $\mathbf{D}$ を核にもつ g-d-ϕ系で $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもつ．よって A に含まれ C に含まれないような $\mathbf{K}$-ideal E が存在することになって矛盾である（終）．

補題14. Q を $\mathbf{T}_l(A, \mathbf{D})$ に含まれる極小元で S とことなるものとする．すると

$$Q = g(\mathbf{K} - \mathbf{M}^*_l(A, \mathbf{D}))$$

が成り立つ．

証明　まず補題12によって $\mathbf{l}^c(Q)$ は $\mathbf{D}$ を核にもつ g-d-ϕ系であって，これは $\mathbf{l}(A)$ の元を含まない．そこで補題13により A は $Q' := g(\mathbf{K} - \mathbf{M}^*(A, \mathbf{D}))$ に含まれるから，Q' は $\mathbf{l}(Q')$ が $\mathbf{D}$ を含む極小元である．すると $\mathbf{l}^c(Q) \subseteq \mathbf{M}^*(A, \mathbf{D})$ であるから次が成り立つ：

$$Q \supseteq g(\mathbf{K}-\mathbf{M}^*(A,\ \mathbf{D})) = Q',\qquad Q = Q'$$

3　Ideal の Directed φ-System による成分

まず ϕ-ideal A の左 $\mathbf{D}$- 成分を定義する：d-ϕ 系 $\mathbf{D}$ で $\mathbf{l}(A)$ と共通元（K-ideal）をもたないものを取って固定する．$\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたないで，$\mathbf{D}$ を核としてもつ g-d-ϕ 系 $\mathbf{M}$ が $E \in \mathbf{K}$ を含めば $\mathbf{M}$ が $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもってしまうような E 全部から生成される ϕ-ideal を $\mu_l(A,\ \mathbf{D})$ で表わし，これを ideal A の左 $\mathbf{D}$- 成分という．ここに“左”は $\mathbf{M}$ の定義における（3_m）が左右非対称であること，つまり $\mathbf{M}$ が左 g-d-ϕ 系であることに依存しているのであるが，以後“左”を略する場合が多い．

定理15. A を S とことなる任意の ϕ-ideal とし，$\mathbf{M}$ を Φ でない d-ϕ 系で $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたないものとする．$\mathbf{M}^*(A,\ \mathbf{D})$ と $\mathbf{T}_l(A,\ \mathbf{D})$ を用いて $\mu_l(A,\ \mathbf{D})$ は次のように表わされる：

$$\mu_l(A,\ \mathbf{D}) = \cap \mathbf{T}_l(A,\ \mathbf{D}) = g(\mathbf{K}-\mathbf{M}^*(A,\ \mathbf{D}))$$

証明　上の 2 つの等式の第 2 項は $\mathbf{T}_l(A,\ \mathbf{D})$ に含まれる ϕ-ideal 全部の共通分であるが，これを Q とおく．まず $Q = g(\mathbf{K}-\mathbf{M}_l^*(A,\ \mathbf{D}))$ を示す：$E \in \mathbf{D}$ に対して

$$(Q:E)_l = \cap\{(B:E)_l \mid B \in \mathbf{T}_l(A,\ \mathbf{D})\} = \cap\{B\} = Q$$

であるから $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{u}_l(Q)$ である．よって補題14を用いて目的を達する．つぎに第 1 の等式 $\mu_l(A,\ \mathbf{D}) = Q$ を証明する．$\mathbf{l}(Q)$ の元 E を含むなどの左 g-d-ϕ 系も $\mathbf{l}(A)$ の元を含むことが分かるから $Q \subseteq \mu_l(A,\ \mathbf{D})$ である．逆に K-ideal E が $\mathbf{D}$ を核にもつ左 g-d-ϕ 系 $\mathbf{M}[\mathbf{D}]$ の元であれば $\mathbf{M}[\mathbf{D}] \cap \mathbf{l}(A)$ が Φ でないとすれば，このような E は $\mathbf{M}_l^*(A,\ \mathbf{D})$ に含まれない．よって $E \subseteq g(\mathbf{K}-\mathbf{M}_l^*(A,\ \mathbf{D})) = Q$ このことから $\mu_l(A,\ \mathbf{D}) \subseteq Q$ となり目的を達

する（終).

この定理の系として次の2つの結果を得る.

[1] A, B を2つの ϕ-ideal とし $A \subseteq B$ とする. $\mathbf{D}$ を $\mathbf{l}(B)$ と共通元をもたない d-ϕ 系とすれば $\mu_l(A, \mathbf{D}) \subseteq \mu_l(B, \mathbf{D})$ である.

[2] A を ϕ-ideal とし, $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ を d-ϕ 系とする. $\mathbf{D}$ が $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもたないとき次が成り立つ：

$$\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{D}_2 \;\Rightarrow\; \mu_l(A, \mathbf{D}_1) \subseteq \mu_l(A, \mathbf{D}_2)$$

はじめの系については $\mathbf{T}_l(A, \mathbf{D}) \subseteq \mathbf{T}_l(B, \mathbf{D})$ であることから明白である. 第2の系については $\mathbf{M}_l^*(A, \mathbf{D}_1) \supseteq \mathbf{M}_l^*(A, \mathbf{D}_2)$ であるから定理15の第2の等式を用いて容易に証明される.

以上“左”について述べたが, これは全く平行的に“右”についても成立する.

4 Ideal の片側弧立成分

A を ϕ-ideal とし, P を A を含む prime (prime ϕ-ideal) とする. $\mathbf{D}_P := \mathbf{l}^c(P)$ とおく. このとき $\mu_l(A, \mathbf{D}_P)$ を A の“左弧立 P 成分”という. これを簡単に $\mu(A, P)$ と書く（添字の l も省略する).

さてIIにおける分解

$$A = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \qquad (\sharp)$$

を考える：ϕ-ideal A が左 primary な ϕ-ideal $Q_1, \cdots, Q_n$ によって（$\sharp$）のように表わされているとする. このとき次の結果が得られる：

定理16.（$\sharp$）の各 Q_i について $\mathbf{l}^c(\rho(Q_i))$ が最大な d-ϕ 系 $\mathbf{D}_i$ を含むとき, prime (ϕ-ideal) P に対して

$\mathbf{D}_1, \cdots, \mathbf{D}_s$ はそれぞれ $\mathbf{l}^c(P)$ を含み

$\mathbf{D}_{s+1}, \cdots, \mathbf{D}_n$ はそれぞれ $\mathbf{l}^c(P)$ を含まない
ならば

$$\mu_l(A, P) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$$

が成り立つ.

証明　まず前節の［2］によって $\mu_l(A, P) \subseteq \mu_l(A, \mathbf{D}_i)$ $(i = 1, \cdots, s)$ が成り立つ. さて補題8によって $\mathbf{l}^c(\rho(Q_i)) \subseteq \mathbf{u}(Q_i)$ であるから $\mathbf{D}_i \subseteq \mathbf{u}(Q_i)$ である. よって定理15により $\mu_l(A, \mathbf{D}_i) \subseteq Q_i$ であるから $\mu_l(A, P) \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ である. ここで特別に $s = n$ の場合には $A \subseteq \mu_l(A, P) \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_n = A$ であるから $\mu_l(A, P) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ となって定理は証明されたことになる. そこで $s < n$ として考える. $\mathbf{l}^c(P)$ は $\mathbf{l}^c(\rho(Q_j))$ $(j = s+1, \cdots, n)$ に含まれないから $\rho(Q_j)$ は P に含まれない. よって Q_j が P に含まれない. いま $E_j \subseteq Q_j$, $E_j \in \mathbf{l}^c(P)$ なる **K**-ideal E_j が存在するから, $\mathbf{l}^c(P)$ が d-ϕ 系であることに着目すれば, 次々と下のような $F_j \in \mathbf{l}^c(P)$ が取れる： $F_{s+1} \subseteq E_{s+1} \phi E_{s+2}$, $F_{s+2} \subseteq F_{s+1} \phi E_{s+3}, \cdots, F_{n-1} \subseteq F_{n-2} \phi E_n$ すると

$$F_{n-1} \subseteq (\cdots((E_{s+1} \phi E_{s+2}) \phi E_{s+3}) \cdots) \phi E_n \subseteq Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_n$$

ここで E を $E \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ なる **K**-ideal とすれば $E \phi F_{n-1} \subseteq (Q_1 \cap \cdots \cap Q_s) \cap (Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_n) = A$. そこで $\mathbf{l}^c(P)$ を核とする g-d-ϕ 系で E を含むようなものを任意にとって $\mathbf{M}$ とすれば $\mathbf{M}$ の元 F で $F \subseteq E \phi F_{n-1}$ をみたすものが取れる. $F \subseteq A$ であるから $\mathbf{M}$ は $\mathbf{l}(A)$ と共通元をもつ. よって $E \subseteq \mu_l(A, P)$ となり, $Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \subseteq \mu(A, P)$ となる. これで目的を達した.

Ⅳ　根基と弧立成分

この章では結合的可換環における ideal の局処的理論を, ある適当な条件

のもとに，いま対象としている乗法系に拡張することを試みる．

1　不定元の積形式

n 個の不定元を $X_1, \cdots, X_n$ とし，これらの，この順序での積形式を

$$f_n^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(X_1, \cdots, X_n)$$

とかく．α はこの積形式の“型”を表わす．型を等級（Stufe）ということもある．いまここで考える積形式は，各不定元がそれぞれ 1 回しか現われないものに限定する．たとえば $n=3$ の場合には $f_3^{(\alpha(1))} = (X_1X_2)X_3$ と $f_3^{(\alpha(2))} = X_1(X_2X_3)$ の 2 個，$n=4$ の場合は $f_4^{(\alpha(1))} = ((X_1X_2)X_3)X_4$，$f_4^{(\alpha(2))} = (X_1X_2)(X_3X_4)$，$f_4^{(\alpha(3))} = (X_1(X_2X_3))X_4$，$f_4^{(\alpha(4))} = X_1((X_2X_3)X_4)$，$f_4^{(\alpha(5))} = X_1(X_2(X_3X_4))$ である．ここで不定元の個数を積形式の“重さ”という．重さの定義は，不定元が 1 回以上現われ，その順序にも制限を加えない場合には，各不定元の現われる個数の総和とするのであるが，いまの場合その定義と食い違いはない．

とくに $f_4^{\alpha(1)}$ または $f_4^{\alpha(5)}$ のような積形式を左または右の nested 型という．一般的には $(\cdots((X_1X_2)X_3\cdots)X_n$ を左の nested 型といい，$f_n^{\alpha(l)}$ で表わす．右の場合は $f_n^{\alpha(r)}$ で表わす．

2　極小な Prime の積

前章までに述べた S の ϕ-ideal 系について考察をつづける．記号はすべて前と同じ．

定義：　S の ϕ-ideal A に対して $A \subseteq P$ なる prime (ϕ-ideal) P を“A に属する prime”という．

補題17. ϕ-ideal に関して昇鎖律が成り立つときは，各 ϕ-ideal A について，A に属する prime 全部の中に極小なものが存在し，その個数は有限で

ある.

証明　A が prime であれば結果は自明であるから，A は prime でないと仮定する．A に属する prime の存在は S によって保証されていることはいうまでもない．いま A に属する prime の中に極小なものが無限に存在するとしてそれを $\{P_\alpha\}$ とする．存在については補題6による．仮定によって 2つの ϕ-ideal B', C' で，これらはいずれも A に含まれないが，その積 $B'\phi C'$ は A に含まれるものが存在する．B' または C' のいずれか一方は無限個の P_β に含まれなくてはならない．ここに $\{P_\beta\}\subseteq\{P_\alpha\}$ である．いま B' をそのようなものとし，$g(A\cup B')=:A_1$ とおく．すると $A\subset A_1\subseteq P_\beta$ $(\forall\beta)$ で A_1 は prime でない．それはもし prime であるとすれば $A_1=P_\beta$ がすべての β に対して成り立つことになって仮定に反するからである．したがって A_1 は A と同じ条件のもとにある．この論法をつづければ $A\subset A_1\subset A_2\subset\cdots$ なる無限列を得るから昇鎖律に反する（終).

以後この章では ϕ-ideal に関して昇鎖律を仮定する.

補題18. $P_1, \cdots, P_m$ を ϕ-ideal A に属するすべての極小な prime とする．すると適当な積形式 $f^{(\alpha)}(X_1, \cdots, X_t)$ が存在して

$$f^{(\alpha)}(P_{\pi(1)}, \cdots, P_{\pi(t)})\subseteq A$$

である．ここに $P_{\pi(1)}, \cdots, P_{\pi(t)}$ は $P_1, \cdots, P_m$ の重複をゆるしたもので $\pi(1), \cdots, \pi(t)$ はそれの適当な置換である.

証明　A が prime であれば結果は自明であるから A は prime でないとする．2つの適当な K-ideal E, F が存在して E, F ともに A に含まれないで $E\phi F$ が A に含まれる．$B=g(A\cup E)$, $C=g(A\cup F)$ とすると $A\subset B$, $A\subset C$ である．いま B, C に属する極小な prime をそれぞれ $P_1^{(B)}, \cdots, P_r^{(B)}$; $P_1^{(C)}, \cdots, P_s^{(C)}$ とする．もし，B と C に対しても A に対して証明しようとす

る性質をもっていると仮定すれば

$$f_n^{(\beta)}(P_{\pi(1)}^{(B)},\ \cdots,\ P_{\pi(n)}^{(B)}) = f_n^{(\beta)}(P^{(B)}) \subseteq B,$$
$$f_m^{(\gamma)}(P_{\tau(1)}^{(C)},\ \cdots,\ P_{\tau(m)}^{(C)}) = f_m^{(\gamma)}(P^{(C)}) \subseteq C$$

なる積形式 $f_n^{(\beta)}$, $f_m^{(\gamma)}$ が存在する．すると

$$f_n^{(\beta)}(P^{(\beta)})\,\phi\, f_m^{(\gamma)}(P^{(C)}) \subseteq B\phi C = g(A\cup E)\,\phi\, g(A\cup F)$$
$$\subseteq g(A\cup E\phi F) = g(A) = A$$

であるから $f_n^{(\beta)}\cdot f_m^{(\gamma)} =: f_t^{(\alpha)}$，$t = n+m$，として

$$f^{(\alpha)}(P^{(B)},\ P^{(C)}) \subseteq A$$

である．いまここで $P_i^{(B)}$ に含まれ，かつ A に属する極小な prime を $\{P_{i\lambda}^{(A)}\}$ とし，$P_j^{(C)}$ に含まれかつ A に属する極小な prime を $\{P_{j\mu}^{(A)}\}$ とするとき，$\{P_{i\lambda}^{(A)},\ P_{j\mu}^{(A)}\}$ は A に属する極小な prime であり

$$f_t^{(\alpha)}(P_{i\lambda}^{(A)},\ P_{j\mu}^{(A)}) \subseteq A$$

である．もし主張が A に対して正しくなければ，B または C に対しても正しくないから，この論法をつづけることにより昇鎖律に矛盾することになる(終).

3　Nested 積と片側準素 Meet 分解

この節でも ϕ-ideal に関する昇鎖律を仮定し，さらに次の条件（ε）を仮定する．

（ε）　任意有限個の ϕ-ideal A_1, $\cdots$, A_n とその任意の型の積 $f_n^{(\alpha)}$ に対して下の関係をみたす左の nested 型の積 $f_m^{\alpha(l)}$ が存在する：

$$f_m^{\alpha(l)}(A_{i(1)},\cdots,A_{i(m)})\subseteq f_n^{(\alpha)}(A_1,\cdots,A_n)$$

ただし $A_1,\cdots,A_n$ は重複をゆるし，$i(1)\leqq\cdots\leqq i(m)$；$m\leqq n$；$\{i(1),\cdots,i(m)\}\subseteq\{1,\cdots,n\}$ とする．

条件（ε）は結合律が成り立つ場合には自明である．また非結合的であって（ε）が成り立つ重要な実例がある．

補題19. ϕ-ideal A に対して $(A:P)_l\supset A$ なる A の極小な prime P が存在する．ただし A は S とことなるものとする．

証明　A 自身 prime なら自明であるから A は prime でないとする．すると補題17と条件（ε）とによって，A にぞくする極小な prime $P_1,\cdots,P_n$（適当に重複もゆるす）が存在して左の nested 型の積 $f_n^{\alpha(l)}(P_1,\cdots,P_n)\cdot A$ に含まれるようにできる．すると $n>1$ であるから $(A:P_i)_l\supset A$ となる $P_i=P$ が存在する．

定理20. 左 primary な ϕ-ideal の根基は prime である．

証明　Q を左 primary な ϕ-ideal とする．$Q=S$ なら自明であるからそうでないとする．すると補題19によって Q に属する極小な prime P があって $E\in\mathbf{l}(P)$ で $F_E\phi E\subseteq Q$ かつ Q に含まれない $F_E\in\mathbf{K}$ が存在する．よって $E\subseteq\rho(Q)$ となり $P\subseteq\rho(Q)$ となる．他方，$\rho(Q)\subseteq P$ であるから $P=\rho(Q)$ となる（終）．

この節における条件のもとでは ϕ-ideal A の根基が prime（P とおく）であれば $(A:P)_l\supset A$ であることが分かる：まず $A=P$ であれば自明であるから $P\supset A$ とする．すると P の適当な左の nested 型の積 $f_n^{\alpha(l)}=f_{n-1}^{\alpha(l)}\phi P$ で A に含まれるものがある．そこでもし $(A:P)_l=A$ であれば $f_{n-2}^{\alpha(l)}\phi$

$P \subseteq A$ である．これをつづければ $P=A$ となって矛盾を生ずる．

定理21. ϕ-ideal A の分解（♯）（第２章，第３章）において $\rho(Q_i)=P_i$ を prime とする（$i=1, \cdots, n$）．このとき $\{P_1, \cdots, P_n\}$ の極小元（包含関係による順序集合としての）の全体は A に属する極小な prime の全体と一致する．

証明　補題17によって，適当な積形式 $f^{(\alpha(i))}$ が存在して $f^{(\alpha(i))}(P_i, \cdots, P_i) \subseteq Q_i$ である（$i=1, \cdots, n$）．すると

$$f^{(\alpha)}(f^{(\alpha(1))}(P_1, \cdots, P_1), \cdots, f^{(\alpha(n))}(P_n, \cdots, P_n))$$
$$\subseteq f^{(\alpha)}(Q_1, \cdots, Q_n) \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_n = A$$

よって $A \subseteq P$ なる prime P に対して $P_i \subseteq P$ なる P_i の存在が示されることになる．したがって A にぞくする極小な prime は $\{P_1, \cdots, P_n\}$ の中に現われることになる．逆に $\{P_1, \cdots, P_n\}$ の極小元を P_i とすれば $A \subseteq P \subseteq P_i$ なる prime P に対して，前半で述べたと同じようにして $P_j \subseteq P$ なる P_j が存在するから $P_j \subseteq P_i$．したがって $P_i = P_j$ となる（終）．

前章で得た結果（定理16）によって次は容易に分かる．

定理22.（♯）を ϕ-ideal A の左の primary ideal $Q_1, \cdots, Q_n$ による meet 表示とし，各 $\rho(Q_i)=P_i$ が prime であるとする．$P \neq S$ が prime で $P_1, \cdots, P_r$ は P に含まれ，$P_{r+1}, \cdots, P_n$ は含まれないとすれば，次が成り立つ：

$$\mu_l(A, P) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$$

いま（♯）が l-p-s 表示であれば，定理21によって，A に属する極小な prime P はどれかの P_i に等しい．ただし P_i は $\rho(Q_i)$ である．P に含まれ P_i

とことなるPは存在しないのであるから定理22によって $\mu_l(A, P)=Q_i$ である．この事実の結果として，次の2定理が得られる：

定理23.（♯）をl-p-s表示とする．Aの極小primeの全体を$P_1, \cdots, P_t$とすれば次の表示を得る：

$$A=\mu_l(A, P_1)\cap\cdots\cap\mu_l(A, P_t)\cap Q_{t+1}\cap\cdots\cap Q_n$$

定理24. ϕ-ideal Aがl-p ϕ-idealの有限個のmeetとして表示され，これらl-p ϕ-idealの根基がすべてprimeであるとすればAの極小primeを$P_1, \cdots, P_t$とするとき

$$\mu_l(A, P_1), \cdots, \mu_l(A, P_t)$$

はすべてl-p ϕ-idealである．

4　Join-Closed Compact生成系の下の弧立成分

一般的にLをcompactな生成系Kをもつ束とする．Kがfinite joinで閉じているとき，つまりKがLのjoin sub-semi-latticeを作るとき，KをLの“join-closed compact生成系”という．KがLのcompactな生成系のとき，Kから生成されるjoin semi-latticeをK^*とすれば，K^*はLのjoin-closed compact生成系になることが容易に験証できる．

そこで元に戻って，条件：ϕ-idealの昇鎖律，（ε），および“Kがjoin-closedである”という条件のもとで考察をつづける．

補題25. $P_1, \cdots, P_n$をprimeなϕ-idealとする．ϕ-ideal Aについて$\mathrm{l}(A)$が$\mathrm{l}(P_1)\cup\cdots\cup\mathrm{l}(P_n)$に含まれるならば $A\subseteq P_i$ なるP_iが少なくとも1個存在する．

証明　$\mathrm{l}(A)\subseteq\mathrm{l}(P_1)\cup\cdots\cup\mathrm{l}(P_m)$ で$\mathrm{l}(A)$は $\mathrm{l}(P_1)\cup\cdots\cup\mathrm{l}(P_{k-1})\cup\mathrm{l}(P_{k-1})$

$\cup\cdots\cup \mathbf{l}(P_m)$ には含まれないような $m(\leqq n)$ をとる．ただし，$P_1, \cdots, P_m$ の番号は適当に打ち変える．またどの $k=2, \cdots, m-1$ についても上の"含む""含まれない"関係は保たれるようにする．したがって $n \geqq 3$ として考えているのである．このようにすれば，次のような K-ideal E_k を選ぶことができる：

$$E_k \subseteq A,\ E_k \subseteq P_k;\ E_k \subseteq P_i \text{ でない } (i \neq k).$$

ただし $i, k=1, \cdots, m$ である．$\mathbf{l}^c(P_1)$ は g-d-ϕ系であり，$E_2, \cdots, E_m$ はすべてこれに含まれるから，次のような $F_1, \cdots, F_{m-2}$ をこの g-d-ϕ系の中から取り出すことができる：$F_1 \subseteq E_2 \phi E_3$，$F_2 \subseteq F_1 \phi E_4$，$F_3 \subseteq F_2 \phi E_5, \cdots$，$F_{m-2} \subseteq F_{m-3} \phi E_m$．すると $F_1^*:=F_{m-1} \subseteq P_j$ $(j \neq 1)$ で $F_1^* \subseteq P_1$ ではないことが示される．全く同じようにして P_j $(j \neq i)$ には含まれ，P_i には含まれないような F_i^* を取ることができる $(i=2, \cdots, m)$．そこで $F^*:=g(F_1^* \cup\cdots\cup F_m^*)$ とすれば，K が join-semi-lattice であることから F^* は $\mathbf{l}(A)$ の元である．したがって F^* はどれかの P_i に含まれる．よって $F_i^* \subseteq P_i$ となって矛盾であるから $n \geqq 3$ の場合は済んだ．$n=1$ の場合は明白である．$n=2$ の場合は $\mathbf{l}(A) \subseteq \mathbf{l}(P_1) \cup \mathbf{l}(P_2)$ でかつ A は P_1 にも P_2 にも含まれないとして次のような K-ideal E_1 と E_2 を取る：$E_i \subseteq A$，$E_i \subseteq P_i$ $(i=1, 2)$ であって E_1 は P_2 に，E_2 は P_1 に含まれない．すると $g(E_1 \cup E_2) \subseteq A$ であるから $g(E_1 \cup E_2)$ は P_1 かまたは P_2 に含まれることになり $E_2 \subseteq P_1$ または $E_1 \subseteq P_2$ が導かれて，これは矛盾である．以上で証明が完了した．

定理26. (♯) を ϕ-ideal A の l-p-s 表示とする．ただし $P_i=\rho(Q_i)$ は prime とする．P を A に属する prime で S とことなるものとすれば，次の 2 条件は同値である．

（1） P は $\mu_l(A, P)$ の左因子である：すなわち $(\mu_l(A, P):P)_l \supset \mu_l(A, P)$ が成り立つ．

（2） $P=\rho(Q_i)$ なる Q_i が存在する．

証明　(1)⇒(2)：定理21により A に属する極小な prime は順序集合 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ の極小元であるから $P_i \subseteq P$ なる P_i が存在する．このような prime の全部を，一般性を失うことなく，$P_1, \cdots, P_t$ とする．すると

$$\mu_l(A, P) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t,\ \ \rho(Q_i) = P_i$$

となり，これは $\mu_l(A, P)$ の l-p-s 表示である．仮定によって $\mathbf{l}(P) \subseteq \mathbf{u}_l^c(\mu_l(A, P))$ であるから $\mathbf{l}(P) \subseteq \mathbf{l}(P_1) \cup \cdots \cup \mathbf{l}(P_t)$ である．したがって補題25によって P はどれかの P_i $(1 \leqq i \leqq t)$ に含まれ，P_i の極小性から $P = P_i$ となる．

(2)⇒(1)：まず定理22を用いて，$P_i \subseteq P$ なる P_i の全体を $\{P_1, \cdots, P_t\}$ とすれば，$\mu_l(A, P) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$，$\rho(Q_i) = P_i$ である，これは $\mu_l(A, P)$ の l-p-s 表示であるから P はどれかの P_i である．$E \in \mathbf{u}_l^c(\mu_l(A, P)) \Leftrightarrow E \subseteq P$ であるから (1) を得る．

V　片側準素 Meet 分解をもつ乗法系

この章では前の章で導入した条件 (ε) は仮定しない．

1　生成系に関連した上半 Modularity

環の ideal 全部の集合は modular 束で，これは ideal 論が成立するための基本的な支えであるが，ここでは $\mathbf{K}$ との関連でそれを下のように弱めた条件を考える．

まず $\mathbf{K}$ から生成される乗法系を $m(\mathbf{K})$ とかくことにする．ϕ-ideal の全体を $\mathbf{I}$ で表わす．

定義：　$\mathbf{I}$ が $\mathbf{K}$ に関して "上半 semi-modular" とは ϕ-ideal A, B と $m(\mathbf{K})$

にぞくする ideal E について

$$A\cap E\subset B\subset A\subset g(A\cup E)$$

が成り立つならば次の関係をみたす ϕ-ideal C が存在することとする：

$$A\cap E\subset C\subseteqq E,\ A\cap(g(B\cup C))=B$$

ϕ-ideal Q が Q を真に含む 2 個の ϕ-ideal の meet として表わされないとき，Q を "既約" であるという．さて次の補題を必要とする：

補題27. $\mathbf{I}$ が $\mathbf{K}$ に関して上半 semi-modular であるとする．既約な ϕ-ideal Q と $m(\mathbf{K})$ の元 E，および ϕ-ideal A に対して $Q\cap E=A\cap E$ かつ $Q\subset A$ であれば $E\subseteqq Q$ が成り立つ．

証明　$B:=A\cap g(E\cup Q)$ とおくと $Q\subseteqq B$ であるが，ここで $Q=B$ であれば $Q=A\cap g(E\cup Q)$ で $Q\subset A$ であるから $Q=g(E\cup Q)\supseteqq E$ となり問題はない．そこで $Q\subset B$ を仮定する．すると，$A\cap E\subseteqq Q\subset A\subseteqq g(A\cup E)$ であるが，もし $A=g(A\cup E)$ ならば $E\subseteqq A$ であるから $E=A\cap E=Q\cap E$．よって $E\subseteqq Q$ となる．もし $A\cap E=Q$ であれば $Q\cap E=Q$，$Q\subseteqq E$ となり，$g(E\cup Q)=E$．よって $B=A\cap E=Q\cap E=Q$ となり $Q\subset B$ に矛盾する．さてそこで

$$A\cap E\subset Q\subset A\subset g(A\cup E)$$

の場合を考えればよい．上半 semi-modular の条件より $A\cap E\subset C\subseteqq E$，$Q=A\cap g(Q\cup C)$ となる ϕ-ideal C が存在する．Q の既約性により $Q=g(Q\cup C)$ である．したがって $C\subseteqq Q\subset A$，$C\subseteqq A\cap E$ である．これは $A\cap E\subset C$ に矛盾する（終）．

2　生成系に関連した弱 Artin-Rees 性

D を任意の d-ϕ 系とする．するとどのような積形式 $f^{(\alpha)}(X_1, \cdots, X_m)$（型（$\alpha$）も，重さ m も任意）に対しても，**D** の各元 E に対して

$$\mathbf{l}(f^{(\alpha)}(E, \cdots, E))$$

は **D** と共通元をもつ．

このことは m に関する帰納法で確かめられる．まず $m=1$ なら自明である．そこで型を任意として m より真に小さい正整数を重さにもつ積形式に対して上記の命題は正しいと仮定する．上の $f_m^{(\alpha)}$ について $f^{(\alpha)}(X_1, \cdots, X_m)=f^{(\beta)}(X_{i(1)}, \cdots, X_{i(r)})\cdot f^{(\gamma)}(X_{k(1)}, \cdots, X_{k(s)})$，$r<m$，$s<m$，であるから $f_m^{(\alpha)}(E, \cdots, E)=f_r^{(\beta)}(E, \cdots, E)\,\phi\, f_s^{(\gamma)}(E, \cdots, E)$ であるが帰納法の仮定によって **D** は $\mathbf{l}(f_r^{(\beta)}(E, \cdots, E))$ とも $\mathbf{l}(f_s^{(\gamma)}(E, \cdots, E))$ とも共通元をもつ．それらをそれぞれ F_1, F_2 とすれば $F\subseteq F_1\phi F_2$，$F\in\mathbf{D}$ なる F は $\mathbf{l}(f^{(\alpha)}(E, \cdots, E))$ の member である．

定義：　**I** が次の条件をみたすとき，**I** は左の，**K** に関連した "弱 Artin-Rees property" をもつという："任意の ϕ-ideal A と任意の $E\in\mathbf{K}$ に対して $A\cap E^*\subseteq A\phi E$ なる $E^*\in m(\mathbf{K})$ が存在する．" これは Rees の property [34] と modify したものである．ここに "左" とは $A\phi E$ の順序（A が左）に関係して呼ぶのである．

定理28. ϕ-ideal に関する昇鎖律を仮定する．各 ϕ-ideal が有限個の左 primary な ϕ-ideal の meet として表示されるならば，**I** は **K** に関連した弱 Artin-Rees property をもつ．

証明　A を ϕ-ideal とし，$E\in\mathbf{K}$ として，$A\phi E=Q_1\cap\cdots\cap Q_n$ を左 primary な ϕ-ideal Q_i による meet 表示とする．もしすべての i について

$A \subseteq Q_i$ であれば $A\phi E \subseteq A \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_n = A\phi E$, $A \cap E \subseteq A = A\phi E$ であるから問題はない．そこで，必要なら Q_i の番号 i を打ちかえて A は $Q_1, \cdots, Q_m$ のどれにも含まれないと仮定する（$1 \leqq m \leqq n$)．すると $A\phi E = A \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ である．**K** にぞくする ϕ-ideal F で $F\phi E \subseteq Q_i$ かつ $Q_i(1 \leqq i \leqq m)$ には含まれないものが存在するから $E \subseteq \rho(Q_i)$ ($1 \leqq i \leqq m$)．よってこれらの各 i に対して適当な積形式 $f^{\alpha(i)}$ が存在して，$f^{\alpha(i)}(E, \cdots, E) \subseteq Q_i$ となる．そこで $f^{\alpha(1)}, \cdots, f^{\alpha(m)}$ の左の nested 積を $f^{(\alpha)}$ とすれば，$f^{(\alpha)}(E, \cdots, E) \subseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ となり $A \cap f^{(\alpha)}(E, \cdots, E) \subseteq A \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_m = A\phi E$ である（終)．

定理29.（**一般分解定理**）**I** が **K** に関して上半 semi-modular であるとし，前定理と同じ昇鎖律を仮定する．**I** が **K** に関連した弱 Artin-Rees property をもてば各 ϕ-ideal は有限個の左 primary な ϕ-ideal の meet として表示される．

証明　昇鎖律が仮定されているのであるから既約な ϕ-ideal が左 primary であることを示せば十分である．いま Q を既約な左 primary な ϕ-ideal とする．E, F を **K** の元とし，$E\phi F$ は Q に含まれるが E は Q に含まれないものとする．いま $A := g(Q \cup E)$ とおけば $Q \subset A$ であって $A\phi F = g(Q \cup E)\phi F = g(Q\phi F \cup E\phi F) \subseteq Q$ である．そこで $f^{(\alpha)}(F) = f^{(\alpha)}(F, \cdots, F)$ を適当にとって $A \cap f^{(\alpha)}(F) \subseteq A\phi F \subseteq Q$ であるから $A \cap f^{(\alpha)}(F) \subseteq Q \cap f^{(\alpha)}(F)$．したがって $A \cap f^{(\alpha)}(F) = Q \cap f^{(\alpha)}(F)$ となる．ところで $Q \subset A$ であるから補題27によって $f^{(\alpha)}(F) \subseteq Q$．つぎに F を含む任意の d-ϕ 系を **D** とすると，これは $\mathbf{l}(f^{(\alpha)}(F))$ の元を含む．そして $f^{(\alpha)}(F) \subseteq Q$ であるから $\mathbf{D} \cap \mathbf{l}(f^{(\alpha)}(F)) \subseteq \mathbf{D} \cap \mathbf{l}(\mathbf{Q})$ となる．この事実から直ちに F が Q の根基に含まれることになる（終)．

3　Modularな Ideal系での片側準素 Meet 分解

第I章のはじめに予告した modularity に関連して次の補題を用意する：

補題30　S の ϕ-ideal の全部の集合 I が次の条件をみたすとき，I は包含関係に関して modular 束をつくる：

$$C \subseteq g(A \cup B),\ C \nsubseteq A \quad \Rightarrow \quad \exists D \subseteq B \text{ s. t. } g(A \cup C) = g(A \cup D)$$

この条件を（**ex**）で表わし，ideal 系 I の ϕ に関する “exchange axiom” という．g は ϕ-ideal を生成する operator で（I，1）において述べたものである．g が ϕ に関与していることはいうまでもない．

この補題の証明は次のように簡単である：

A_1, A_2, B をいずれも ϕ-ideal として

$$g(A_1 \cup B) = g(A_2 \cup B), \qquad A_1 \subset A_2$$

をみたすものとする．A_1 に含まれなくて，A_2 に含まれる **K** にぞくする ϕ-ideal E が存在するから，もちろん $E \subseteq g(A_1 \cup B)$ である．すると（**ex**）によって $D \subseteq B$, $g(A_1 \cup E) = g(A_1 \cup D)$ をみたす ϕ-ideal D が存在する．$D \subseteq g(A_1 \cup E) \subseteq g(A_1 \cup A_2) = A_2$ であるから $D \subseteq A_2 \cap B$ であるが，D は $A_1 \cap B$ には含まれない．これで証明ができた．

ついでに述べておくこととして ϕ-closed な set 全部の modularity についての条件（（I，1）で述べた（2_m）による証明）であるが，これは上記の g を ϕ として上の証明と全く同様に得られる．この章で semi-modularity については “上半” のそれを通常とは異なった形で定義したのであるが，これに関する詳論は稿を更めて論じたい．

この章で得られた定理28および定理29によって次の定理が成り立つ：

定理31.　S の ϕ-ideal 系 I において，それが modular 束であり，かつ昇鎖

律をみたすものとする．このとき ϕ-ideal がすべて l-p-s 表示をもつための必十条件は I がその生成系 K に関連した弱 Artin-Rees property をもつことである．

以上の理論ではすべて“左側”についての論考であったが，analogous に“右側”についても論述できる．またここで得た諸結果はすべて結合律を仮定しない“非可換環”に対しても適用できるが，その際 ϕ として module-generation をとるのがもっとも自然であることは論を俟たない．しかし実はそれ以外のものもとることができる．これについては［11]，［12]，［13]，［16]，［21]，［28]，［29]，［30]，［32]，［33］などによって多くの情報が得られる．生成系 K のとり方としては単項 ideal 系を考えるのが極めて自然であろうが，それ以外にも種々なものが考えられる．［ 9]，［10]，［13]，［14]，［21]，［25]，［26]，［27］などに有用な情報源があるので，そのいくつかを踏まえてわれわれの K を導入したのであるが，これについての詳論はまたの機会にゆずりたい．また prime ideal の定義も［ 6]，［19]，［30]，［32]，［39］などに見られるようにそれぞれ特徴があり，多くはそれに対応して根基や primary ideal についても種々の工夫がなされて理論の整合性を保っている．これらについては［ 6]，［ 7]，［ 8]，［15]，［19]，［20]，［25]，［26]，［36］等を参照することができる．これらの中には根基について，いわゆる“radical-like”な性質を抽象的に仮定して理論構成をすることを試みたものもある．次の章で述べる条件［*］は可換な場合の radical-like”な性質と見ることができる．もし束論的な formulation をするならば，［*］を ρ の性質 (1_r)，(2_r)，(3_r)，(4_r) とともに採用することに不自然さはない．

VI　可換な場合の準素 Meet 分解

この章では S が可換な場合またはもっと弱く ϕ-ideal 系 I が積 ϕ に関して

可換な場合の準素 meet 表示について考察する．なお簡単のため積 $A\phi B$ を $A\bullet B$ または単に AB とかくことにするが第I章の $A\bullet B$ と間違うことはない．

1　φ-Ideal の対称巾

定義：　A を ϕ-ideal とし，その“対称巾（symmetric power）” $A^{(r)}$ を次のように定義する：
まず $A^{(1)}=A$ とし，帰納的に $A^{(r)}=A^{(r-1)}\bullet A^{(r-1)}$ とする．ここに r は正整数である．

この対称巾は次の性質をもつ：

(1_s)　$A\subseteq B \;\Rightarrow\; A^{(r)}\subseteq B^{(r)}$

(2_s)　$r\leq s \;\Rightarrow\; A^{(r)}\supseteq A^{(s)}$

(3_s)　$A^{(r)(s)}=A^{(s)(r)}$

(4_s)　$A^{(r+s)}=A^{(r)(s+1)}=\mathrm{A}^{(s)(r+1)}$

(5_s)　$A^{(rs)}\subseteq A^{(r)(s)}$

(6_s)　$(A\cap B)^{(r)}\subseteq A^{(r)}\cap B^{(r)}$

(7_s)　$(g(A\cup B))^{(rs)}\subseteq g(A^{(r)}\cup B^{(s)})$

この対称巾に関連して“bracked 巾”を下のように定義する．これも帰納的に $(CA)^{[1]}=C\bullet A$ とし，$(CA)^{[r]}=((CA)^{[r-1]})\bullet A$ とする．ここに r は正の整数である．これについて

(8_s)　$(CA)^{(r)}\subseteq(CA)^{[r]}$

が成り立つ．

さてこの章では ϕ-ideal A の巾根基を次によって定義する：$B^{(r)}\subseteq A$ なる r が存在するような ϕ-ideal B の全部から生成される ϕ-ideal を Rad (A) とかき，これを“巾根基”という．ここに r は B に依存する（一定でなくてよい）．Rad $(A)=A$ なる ϕ-ideal を“根基 ideal”とよぶ．

もし ϕ-ideal に関して昇鎖律が成り立てば各 ϕ-ideal A に対して $(\mathrm{Rad}(A))^{(n)} \subseteq A$ となる n が存在することが証明される．またこの場合次の補題が成り立つ：

補題32. $\mathrm{Rad}(A)$ は根基 ideal である．

証明　$(\mathrm{Rad}(A))^{(r)} \subseteq A$，$(\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(A)))^{(s)} \subseteq A$ となる r, s があるから（5_s）を用いることにより $(\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(A)))^{(rs)}$ が A に含まれることになる．よって $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(A)) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$ である（終).

2　Lasker 型の準素 Ideal

定義：　ϕ-ideal Q が次の条件をみたすとき，これを “Lasker 型の準素 ideal (abbr. L-準素 ideal)” という：$A \cdot B \subseteq Q$ で A が Q に含まれないならば，ある r が存在して $B^{(r)} \subseteq Q$ である．

この節では ϕ-ideal に関して昇鎖律を仮定する．ϕ-ideal A を含む prime ϕ-ideal P は $\mathrm{Rad}(A)$ を含むことは直ちに分かる．また L-準素 ideal Q に対して $\mathrm{Rad}(Q)$ は必ずしも prime にならない．しかし便宜上 Q を “Q^*-primary” と呼ぶことにする．ただし $Q^* = \mathrm{Rad}(Q)$ である．また，“Q は Q^* に属する” ということにする．Q が Q^* に属するとき，次が成り立つ：

(a)　$A \cdot B \subseteq Q,\ A \nsubseteq Q^* \ \Rightarrow\ B \subseteq Q$

(b)　$A \nsubseteq Q^* \ \Rightarrow\ Q : A = Q$

ただし $Q : A$ は Q の A による residual である．今は可換な場合であるから residual について左右の区別はない．また residual は **K** に依存しない（定理１）ことも注意しておく．

補題33　C と C^* をいずれも ϕ-ideal とする（$C^* = \mathrm{Rad}(C)$ という条件はない)．これが３つの条件：

(1*)　$C \subseteq C^*$

(2*)　$C^{*(r)} \subseteq C$ なる r が存在する.

(3*)　$A \bullet B \subseteq C,\ A \nsubseteq C \ \Rightarrow\ B \subseteq C^*$

をみたすならば, C^* は prime であると仮定する. このとき $C^* = \mathrm{Rad}\,(C)$ である. つまり C は C^*-primary である.

証明　(3*) をみたす A, B に対して $B^{(r)} \subseteq C$ なる r が存在する. すなわち C は L-準素 ideal である. いま (2*) より $C^* \subseteq \mathrm{Rad}\,(C)$ は明らかである. そこで $(\mathrm{Rad}\,(C))^{(n)} \subseteq C$ なる n をとれば $(\mathrm{Rad}\,(C))^{(n)} \subseteq C^*$ である. n をこのような最小数とする. もし $n \neq 1$ であれば $(\mathrm{Rad}\,(C))^{(n-1)}$ は C に含まれない. しかし $(\mathrm{Rad}\,(C))^{(n-1)} \bullet (\mathrm{Rad}\,(C))^{(n-1)} = (\mathrm{Rad}\,(C))^{(n)} \subseteq C^*$ 仮定によって $(\mathrm{Rad}\,(C))^{(n-1)} \subseteq C^*$ となり矛盾である. したがって $n=1$, $\mathrm{Rad}\,(C) \subseteq C^*$ であるから目的を達した (終).

この補題における仮定を条件 [∗] で表わし, 以後それを仮定する.

[∗]　2つの ϕ-ideal C, C^* が (1*), (2*), (3*) をみたせば C^* は prime である.

ここで (C, C^*) は2つの ϕ-ideal の組であって, C^* は C によって定まるということを意味しない.

$Q_1, \cdots, Q_m$ をいずれも Q^*-primary とする. つまり, いずれも (1*), (2*), (3*) をみたすとする. すると $Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ もまたこれらの3条件をみたすから, $Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ は Q^*-primary である.

定理34. 既約な ϕ-ideal は L-primary である.

証明　対偶によって証明する. ϕ-ideal A が L-primary でないと仮定する. すると次のような ϕ-ideal E, F が存在する： $E \bullet F \subseteq A$ で E は A に含まれず, またすべての正整数 r に対して $F^{(r)}$ も A に含まれない. 簡単のため,

n-tuple residuation を次のようにおく：

$$(A:F)^{\langle n\rangle}:=\underbrace{(\cdots((A:F):F):\cdots):F}_{n\text{-tuple}}$$

そこで昇鎖 $A:F\subseteq(A:F)^{\langle 2\rangle}\subseteq(A:F)^{\langle 3\rangle}\subseteq\cdots$ を作れば昇鎖律によって $(A:F)^{\langle m\rangle}=(A:F)^{\langle m+i\rangle}$ $(i=1,2,\cdots)$ となる m がある．いま

$$\mathbf{W}=\{(C\bullet F)^{[m]}\mid C\in\mathbf{I}\}$$
$$\mathbf{T}=\{g(B\cup W)\mid B\subseteq A,\ W\in\mathbf{W}\}$$

を考える．このとき $\mathbf{I}(A)$ は $\mathbf{I}(g(A\cup E)\cap\mathbf{K}(\mathbf{T})$ に一致することが証明できる．ここに $\mathbf{K}(\mathbf{T})$ は $\mathbf{T}$ の各元（ϕ-ideal）に含まれる $\mathbf{K}$ 元全部の集合を意味する．$\mathbf{I}(A)\subseteq\mathbf{I}(g(A\cup E))\cap\mathbf{K}(\mathbf{T})$ は容易であるから逆の包含関係を証明する．この右辺の任意元（$\mathbf{K}$-ideal）を G とする．$G\subseteq g(A\cup E)$，$G=g(X\cup(Y\bullet X)^{[m]})$，$X\in\mathbf{I}(A)$，$(Y\bullet F)^{[m]}\in\mathbf{W}$ と書くことができるから

$$g((Y\bullet F)^{[m+1]}\cup X\bullet F)=(g((Y\bullet F)^{[m]}\cup X))\bullet F=G\bullet F$$
$$\subseteq g(A\cup E)\bullet F=g(A\bullet F\cup E\bullet F)\subseteq(g(A\cup A)=A$$

となり $(Y\bullet F)^{[m+1]}\subseteq A$ である．したがって $Y\subseteq(A:F)^{[m+1]}=(A:F)^{[m]}$ よって $(Y\bullet F)^{[m]}\subseteq A$，$G=g(X\cup(Y\bullet F)^{[m]})\subseteq A$ となる．このことから目的の包含関係が示された．さて $\mathbf{I}(g(A\cup E))\cap\mathbf{K}(\mathbf{T})$ から生成される ϕ-ideal は $g(A\cup E)\cap g(A\cup F^{[m]})$ に等しい（$\mathbf{T}$ の中で $B=A$，$\mathbf{W}$ の元で $C=S$ とおけばよい）．したがって

$$A=g(A\cup E)\cap g(A\cup F^{[m]})$$

である．ところが，$A\subset g(A\cup F^{(2m)})\subseteq g(A\cup F^{(2)(m)})=g(A\cup(F\bullet F)^{(m)})\subseteq g(A\cup F^{(m)})\subseteq g(A\cup F^{[m]})$ であるから A は $g(A\cup F^{[m]})$ に真に含まれている．$A\subset g(A\cup E)$ は明白であるから A は既約でない（終）．

3　L-Primary Ideal による Meet 分解

この節でも ϕ-ideal に関する昇鎖律を仮定する．また条件［*］（第2節）も仮定する．

定理35. 任意の ϕ-ideal A は有限個の L-primary な ϕ-ideal Q_i の meet として表示される： $A=Q_1\cap\cdots\cap Q_n$ このとき A の巾根基は次のようになる：$\mathrm{Rad}\,(A)=\mathrm{Rad}\,(Q_1)\cap\cdots\cap\mathrm{Rad}\,(Q_n)$.

証明　定理の前半は昇鎖律と定理34によって直ちに分かる．後半を証明する：まず $(\mathrm{Rad}\,(A))^{(m)}\subseteq A\subseteq Q_i$ であるから $\mathrm{Rad}\,(A)\subseteq\mathrm{Rad}\,(Q_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ である．よって $\mathrm{Rad}\,(A)\subseteq\mathrm{Rad}\,(Q_1)\cap\cdots\cap\mathrm{Rad}\,(Q_n)=:C$．他方 $C^{(m(i))}\subseteq Q_i$ なる $m(i)$ がとれる $(i=1,\cdots,n)$．よって $t=\mathrm{Max}\,\{m(1),\cdots,m(n)\}$ とすれば $C^{(t)}\subseteq Q_1\cap\cdots\cap Q_n=A$ となり $C\subseteq\mathrm{Rad}\,(A)$ である（終）.

$A=Q_1\cap\cdots\cap Q_n$ のとき，$A\subseteq P$ なる prime は $\mathrm{Rad}\,(Q_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ のうちの少なくとも1つを含む．それは $Q_1,\cdots,Q_n$ の左 nested 積が A に含まれることと $\mathrm{Rad}\,(P)=P$ とから分かることである．

任意の ϕ-ideal A について

（1） $A=Q_1\cap\cdots\cap Q_m$ は簡約表示である．

（2） $\mathrm{Rad}\,(Q_1),\cdots,\mathrm{Rad}\,(Q_m)$ はすべて異なる．

なる2条件をみたすように表示することができるから，これによって，結合律を仮定しない可換な乗法系における加法的 ideal 論の基本定理（Lasker-Noether 型の分解定理）が得られる．なお meet 表示の一意性の証明は定理10と同様である．

（1990年10月；於 藜杖庵）

文　　献

[1] Behrens, E. A. : Nichtassoziative Ringe, Math. Ann., **127** (1954).

[2] Behrens, E. A. : Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen, Math. Zschr., **64** (1956).

[3] Behrens, E. A. : Ring Theory, Pure and Applied Math. **44**, Academic Press. New York (1972).

[4] Birkhoff, G. : Lattice Theory (3rd Ed.), Colloquium Publ. XXV, Amer. Math. Soc. (1984).

[5] Brown, B. and McCoy, N. H. : Prime ideals in nonassociative rings, Trans. Amer. Math. Soc., **89** (1958).

[6] Bruck, R. H. : A survey of binary systems, Ergebnisse d. Math., **20** (1958).

[7] Croisot, R. : Théorie noethérinne des idéaux dans les anneaux et les demigroupes non nécessairement commutatifs, Séminaire P. Dubreil et C. Pisot, **10** (1956/57).

[8] Fuchs, L. : The meet decomposition of elements in lattice-ordered semigroups, Acta Sci. Math. Szeged, **12 A** (1950).

[9] Fuchs, L. : A lattice-theoretic discussion of some problems in additive ideal theory, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **5** (1954).

[10] Fuchs, L. : Partially ordered algebraic systems, International Series of Monographs on Pure and Applied Math. **28** (1963).

[11] Hedstrom, J. and Houston, E. : Some remarks on star-operations, Journal of Pure and Applied Algebra, **18** (1988).

[12] Houston, E., Malik, S. and Mott, J. : Characterizations of ∗-multiplication Domains, Canad. Math. Bull., **27** (1) (1988).

[13] Jaffard, P. : Les systems d' idéaux, Donod, Paris (1960).

[14] Krull, W. : Idealtheorie, Ergebnisse d. Math., **3** (1948).

[15] Kurata, Y. : On an additive ideal theory in a non-associative ring,

Math. Zschr., **88** (1965).

[16] Kutinová, B. : On algebraic closures of compact elements, Czechoslovak Math. Journ., **29** (1979).

[17] Lesieur, L. et Croisot, R. : Théorie noethérinne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif I, Colloque d' Algèbre Supérieure, Bruxelles (1956).

[18] Lesieur, L. et Croisot, R. : Algèbre noethérienne non commutative, Mémorial des Sci. Math., **CLIV** (1983).

[19] Marubayashi, H. and Murata, K. : A note on radicals of ideals in non-associative rings, Proc. Japan Acad., **45** (1969).

[20] McCoy, N. H. : Prime ideals in general rings, Amer. Journ. Math., **71** (1949).

[21] Mott, J. and Zafrullah, M. : On Prüfer v-multiplication domains, Manuscripta Math., **35** (1981).

[22] Murata, K. : Decomposition of radical elements of a commutative residuated lattice, Journ. Inst. Polytec. Osaka City Univ., **10** (1959).

[23] Murata, K. :Additive ideal theory in multiplicative systems, *ibid.*, **10** (1959).

[24] Murata, K. : On isolated components of ideals in multiplicative systems *ibid.*, **11** (1960).

[25] Murata, K. : On nilpotent-free multiplicative systems, Osaka Math. Journ., **14** (1962).

[26] Murata, K. : Primary decomposition of elements in compactly generated integral multiplicative lattices, Osaka Journ. Math., **7** (1970).

[27] Murata, K. : Multiplicative ideal theory in semigroups, Lect. Notes in Math., Institute of Math., National Tsing Hua Univ., **A-3** (1975).

[28] Murata, K. : A note on arithmetics in semigroups, Proc. Japan Acad., **56** (1980).

[29] Murata, K. and Hsu, D. F. : Generalized prime elements in a compactly generated lattice-ordered semigroup, I, II, *ibid.*, **49** (1973).

[30] Murata, K., Kurata, Y. and Marubayashi, H. : A generalization of prime ideals in rings, Osaka Journ. Math., **6** (1969).

[31] Murdoch, D. C. : Contributuions to noncommutative ideal theory, Canad. Journ. Math., **4** (1952).

[32] Myung, H. C. : On prime ideals and primary decompositions in a nonassociative ring, Osaka Journ. Math., **9** (1972).

[33] Myung, H. C. : A generalization of the prime radical in nonassociative rings, Pacific Journ. Math., **42** (1972).

[34] Rees, D. : Two classical theorems of ideal theory, Proc. Camb. Phil. Soc., **52** (1956).

[35] Rolf, V. and Holzapfel, P. : Eine allgemeine Primärzerlegungstheorie, Math. Nach., **41** (1969).

[36] Schafer, R. D. : An introduction of nonassociative algebras, Academic Press, New York (1966).

[37] Schenckman, E. : The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups, Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958).

[38] Szász, G. : Einfühung in die Verbandstheorie, Akademiai Kiado, Budapest (1962).

[39] Thakare, N. K., Manjarekar, C. S. and Maeda, S. : Abstract spectral theory II : Minimal characters and minimal spectrums of multiplicative lattices, Acta Sci. Math., **52** (1988).

[40] Zassenhaus, H. : Gruppentheorie, Leipzig (1937).