# NULLRADIKAL をもつ RINGOID における IDEAL の分解について

村　田　憲太郎

この論文の目的は Ringoid と呼ばれる代数系において，それが Nullradikal をもつための条件を考察した上で，その条件のもとに，この代数系におけるある種の Ideal の共通分分解を求めることである．

以下順をおって内容の概説をする．G. Birkhoff は Ring の概念の拡張として Ringoid を定義した［3］．この論文ではこの Ringoid をもっと一般にしたものを考えるのであるが，われわれはそれを更めて Ringoid と呼ぶことにする．そしてその Ringoid において Ideal, Hauptideal などを定義して，その基本性質を示すことにするが，それをⅠにおいて用意する．何かある代数系において Ideal 論を展開する場合には昇鎖律とか降鎖律のような有限条件が必要なことは当然であるが，この論文では昇鎖律（i. e. 基底律）を弱めた条件を導入する．それは“左と右のそれぞれに関する Hauptideal の任意 2つの Idealprodukt が有限生成である”という条件である．この条件を仮定すれば，両側 Hauptideal についてもこの条件が成り立つのである．これらのことはⅡにおいて説明される．ついでⅢにおいて Primideal を定義し，任意の両側 Ideal の Radikal をそれを含むすべての Primideal の共通分として定義する．通常の可換環において McCoy が導入した m-系［13］をここでは Hauptideal の系に対して定義するのであるが，それは Radikal の特性を得るためである．ここで注意すべきことは，Ⅱにおいて述べた弱い昇鎖律がそのために役に立つということである［16］．この弱い昇鎖律が無い場合には Hauptideal による m-系によって Radikal の特性を求めることができないのである．このことはある実例をもって示すことができる．実はⅠ，Ⅱ

およびⅢで得られる結果は非結合的な Ringoid でも成り立つことが分かる．それはⅡの主な結果であるところの，Ringoid の Radikal（=Nullideal の Radikal）が零であるための必十条件が，諸種の Ideal 系が nilpotentfrei であるという事実も含めている．Ⅳ以後は Ringoid は結合的でかつ単位元をもち，さらに Nullradikal をもつという仮定のもとに Ideal の分解を求める．まず片側の Ideal の集合から両側の Ideal の集合への 2 種類の写像を導入する．それらは Ideal の左右の annullierendes Ideal を重ねたものとして定義される．そしてそれら 2 種類の写像を用いて "閉 Ideal" を定義する．この種の閉 Ideal がわれわれの共通分分解の対象となるものである．この分解とそれに関与するいくつかの結果はⅤにおける 2 つの Satz と 2 つの Folgesatz として述べられる．つづいてⅥにおいては片側 Primideal を定義して，その Kern をこの片側 Primideal に含まれるすべての両側 Ideal から生成される Ideal として定義する．するとそれは閉 Ideal になり，それが，Ⅴの最初の Satz で述べたと同様に，有限個または無限個の Primideal の共通分として分解されるのである．

## Ⅰ　RINGOID とその IDEAL

$S$ を結合団（Verknüpfungssystem ; Abk : VS）

$$\Delta = \{\phi_\lambda \mid \lambda \in \wedge\}$$

をもつ代数系とする［1］［3］［4］［5］［6］［8］［10］［18］: $S = (S, \Delta)$.

これが次の条件をみたすとき，$S$ を "Ringoid" という．

（$r$ 1）　$\Delta$ の元はすべて endliche Operation である．つまり $\phi_\lambda$ は $n$ 項演算であって，$n$ は $\phi_\lambda$ によって変わってもよい［6］［20］［21］.

（$r$ 2）　$\Delta$ の元として少なくとも 1 個の 2 項演算をもつ．いまそれを "$\circ$" で表わすことにして，$S = (S, \circ)$ は Monoid である．

($r$4)　Monoid $S=(S, \circ)$ は零元（それを0で表わす）をもつ．

($r$5)　2項演算 $\circ$ は他の $\phi_\lambda$ に対して分配的である．すなわち次が成り立つ［16］［21］：

$$a \circ \phi_\lambda(a_1, \cdots, a_n) = \phi_\lambda(a \circ a_1, \cdots, a \circ a_n)$$
$$\phi_\lambda(a_1, \cdots, a_n) \circ a = \phi_\lambda(a_1 \circ a, \cdots, a_n \circ a)$$

ここで $(S, \circ)$ が単位元をもつとは限らないのであるが，もしそれをもつときは，それを $e$ で専用する．

Birkhoff［3］によれば "$\circ$" 以外の $\phi_\lambda$ はすべて2項演算になっているが，上記定義はそれよりも一般的である．実は $\Delta$ に付与する種々の条件によって後に述べる結果についていくつかの興味ある関係が得られるのであるが，この論文では $\Delta$ をfestnageln しての結論のみを示すことにする（最後の章の付記参照)．

$S$ の，空でない，部分集合 $A$ が，次の条件をみたすとき，$A$ を $S$ の "Linksideal" という．

($l$1)　$a \in A$，$x \in S \Rightarrow x \circ a \in A$

($l$2)　$A$ は $\Delta$ のすべてのOperationで閉じている：　すなわち　$\phi_\lambda \in \Delta$ が $n$ 項演算［16］であれば任意の $(a_1, \cdots, a_n) \in A \times \cdots \times A$ ($n$−mal) に対して

$$\phi_\lambda(a_1, \cdots, a_n) \in A \qquad (\forall \phi_\lambda \in \Delta)$$

($l$1) において $x \circ a$ の代りに $a \circ x$ としてこれを ($r$1) とし，($r$2) = ($l$2) とする．($l$2) = ($r$2) において $\Delta$ の代りに $\Delta_\circ := \Delta \setminus \{\circ\}$ を採ってもよい．($r$1), ($r$2) をみたす $A$ を "Rechtsideal" という．$A$ がLinks- かつRechtsidealのときこれをzweiseitiges Idealまたは単に "Ideal" という．

$S$ の部分集合 $X$ を $\Delta$ のすべてのOperationで閉じさせた集合は一般的には複雑なものである．いま $\phi_\lambda \in \Delta$ を任意にとり $X$ の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して $\{\phi_\lambda(x_1, \cdots, x_n) \mid \phi_\lambda \in \Delta\} \cup X =: X_1$ を作る．さらに $X_1$ に対して $X$ に

対するのと同様にして $X_2=\{\phi_\lambda(x_1, \cdots, x_n) \mid \phi_\lambda \in \Delta,\ x_i \in X_1\} \cup X_1$ を作る．このようにして $\cup_{m=1}^{\infty} X_m$ としたものが$X$を$\Delta$で閉じさせたものである．今後これを$X^\Delta$で表わすことにする．明らかに $X \subseteq X^\Delta$ ; $X \subseteq Y \Rightarrow X^\Delta \subseteq Y^\Delta$ ; $X^{\Delta\Delta}=X^\Delta$ 等が成り立つ．$X^\Delta=X$ なる$X$を“$\Delta$で閉じた集合”，または“$X$から生成された集合”などという．一般には$\Delta$から“$\circ$”を除いた $\Delta_\circ := \Delta \setminus \{\circ\}$ について$X$から生成された集合を考えることが多いのであるが，すでに触れたように，Idealの場合には（$l$1）でも（$r$1）でも条件（$l$2）=（$r$2）は影響をうけないことは明白である．

以後次の記法を用いる：$S$の部分集合$X$, $Y$に対して $X \circ Y=\{x \circ y \mid x \in X,\ y \in Y\}$，$\Delta(X, Y)=\{\phi_\lambda(x_1 \circ y_1, \cdots, x_n \circ y_n) \mid x_i \in X,\ y_i \in Y,\ \phi_\lambda \in \Delta_\circ\}$．$X$から生成されたLinksideal, Rechtsidealをそれぞれ $(X)_l$, $(X)_r$ で表わす．$(X)_l$とは2つの条件 $S \circ (X)_l \subseteq (X)_l$，$(X)_l^\Delta=(X)_l$ をみたすものである．$(X)_r$については $S \circ (X)_l^\Delta \subseteq (X)_l$ の代りに $(X)_r \circ S \subseteq (X)_r$ とする．これから“Linke”について述べることは“Rechte”についてもparallelであるから両者を一々示さないこともある．$S$の任意の部分集合$X$について次が成り立つ：

$$(X)_l=(S \circ X \cup X^\Delta)^\Delta=(S \circ X \cup X)^\Delta$$

$X$から生成されるIdealについては，これを $(X)_t$ とかく．それは次で与えられる：

$$(X)_t=(S \circ X \circ S \cup S \circ X \cup X \circ S \cup X)^\Delta$$

$S$の1個の元$a$に対して，$a$から生成されるLinksideal $(a)_l$, Rechtsideal $(a)_r$, およびIdeal $(a)_t=(a)$ を同順に“Linkshauptideal”, “Rechtshauptideal”, および“Hauptideal”という．$(a)_l$と $(a)_t$については次のような関係がある：

$$\begin{aligned}(S \circ a \circ S \cup a \circ S)^\Delta &= ((S \circ a \cup a) \circ S)^\Delta \\ &= ((S \circ a \cup a)^\Delta \circ S)^\Delta=\Delta((S \circ a \cup a)^\Delta, S)\end{aligned}$$

$$= \Delta((a)_l, S)$$

であるから，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}(a)_t &= (S\circ a\circ S \cup a\circ S \cup S\circ a \cup a)^\Delta \\ &= ((S\circ a\circ S \cup a\circ S)^\Delta \cup (S\circ a \cup a)^\Delta)^\Delta \\ &= (\Delta((a)_l \bullet S) \cup (a)_l)^\Delta\end{aligned}$$

全く parallel に $(a)_t = (\Delta(S\circ(a)_r) \cup (a)_r)^\Delta$ が成り立つ.

さて $S$ の全 Linksideal，全 Rechtsideal，全 Ideal を同順に $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ で表わすことにし $\mathbf{K} := \mathbf{L} \cup \mathbf{R}$ とおくことにする．$\mathbf{K}$ はもちろん包含関係を順序として順序集合であり，$S$ がその最大元である．$\{0\} = 0$ が最小元であり，$\mathbf{K}$ の任意の元 $A$ に対して次が成り立つ：

$$\Delta(0\circ A) = \Delta(A\circ 0) = 0$$

$S$ が $e$（単位元）をもつときは次関係があることが分かる．これは $A$ が Linksideal であっても Rechtsideal であってもよい.

$$\Delta(S\circ A) \supseteq A, \qquad \Delta(A\circ S) \supseteq A$$

ただし $A$ が Linksideal，Rechtsideal となるにしたがって次の等式が成り立つ：

$$\Delta(S\circ A) = A, \qquad \Delta(A\circ S) = A$$

さらに $\mathbf{L}$ も $\mathbf{R}$ も “下に向かって” komplett な束半群であることが証明される．そして次のことも験証できる：$\Delta(S\circ S) = S$；$\Delta(A\circ B) \subseteq B$ が $A, B \in \mathbf{L}$ に対して成り立つ；$\Delta(A\circ B) \subseteq A$ が $A, B \in \mathbf{R}$ に対して成り立つ.

## II　Kompaktes Erzeugendessystem の条件

前の章で述べた $\mathbf{L} \cap \mathbf{R} = \mathbf{T}$ は“下に向かって”完備な部分束半群（L および R の）である．さてここで $\mathbf{H}_\mathrm{L} := \{(a)_l \mid a \in S\}$，$\mathbf{H}_\mathrm{R} := \{(a)_r \mid a \in S\}$ はそれぞれ L, R の kompaktes Erzeugendessystem（Abk : $k \in S$）であることは容易に確かめられる： それは，$\Delta$ が endliche Operation ばかりから成っているから $(a)_l \subseteq (X)_l$ であれば $X$ に含まれる有限個の元 $x_1, \cdots, x_m$ が（$m$ も含めて，$a$ に依存して）存在して

$$(a)_l \subseteq (x_1, \cdots, x_m)_l = (x_1)_l \vee \cdots \vee (x_m)_l$$

をみたすことと，任意の $A \in \mathbf{L}$ に対して

$$A = \cup\{(a)_l \mid a \in A\} = \bigvee\{(a)_l \mid a \in A\}$$

となるからである．ただし，$\vee$, $\bigvee$ はいずれも $\Delta_\circ := \Delta \setminus \{\circ\}$ に関する生成を意味し，$\cup$ は単なる集合和を示す記号である．$A$ が Linksideal または Rechtsideal であれば $A^\Delta = A^{\Delta_\circ} = A$ であることは明白である．

われわれはここで Linksideal に関する極大条件（i. e. 昇鎖律）より実際に弱い条件：“任意の $(a)_l$, $(b)_l$ に対して

$$\Delta((a)_l \circ (b)_l) = (c_1)_l \vee \cdots \vee (c_m)_l$$

なる有限個の元 $c_1, \cdots, c_m$ が存在する”という条件を考える．ただし $c_i$ の個数 $m$ も $a$ と $b$ に依存するのである．この条件を“Linksideal の $\mathbf{H}_\mathrm{L}$ に関する弱有限条件”と呼ぶことにする．Rechtsideal に関しても全く parallel に同様な条件が考えられる．そこで以下この論文を通して次の仮定をおく：

“Linksideal の $\mathbf{H}_\mathrm{L}$ に関しても，Rechtsideal の $\mathbf{H}_\mathrm{R}$ に関しても弱有限条件が成立する”．

すると次の Ideal の $\Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}, S) \cup \Delta(S, \mathbf{H}_\mathrm{R})$ に関する弱有限条件が成立す

る：　それは任意の2つのHauptideal $(a)$, $(b)$ に対して，これをLinksideal またはRechtsidealと見てそれぞれ

$$\Delta((a)\circ(b)) = (c_1)_l \vee \cdots \vee (c_m)_l$$
$$\Delta((a)\circ(b)) = (d_1)_r \vee \cdots \vee (d_n)_r$$

のように表示できるから両辺のSupをとって

$$\Delta((a)\circ(b)) = \bigvee_{i=1}^{m}(c_i)_l \vee \bigvee_{k=1}^{n}(d_k)_r$$

この式の左右から，“$\circ$”に関して $S$ を乗ずれば $\Delta((a)\circ(b))$ が $m+n$ 個のHauptidealの，$\Delta_\circ$ に関するSupとして表示されることになる．

$\vee S$ $\Delta$ の状況によっては $(a)_l \neq (b)_l$ であっても $\Delta((a)_l\circ S) = \Delta((b)_l \circ S)$ となることが起る．Rechtshauptidealに関しても同様である．このような場合には $\mathbf{H}_\mathrm{L} \supseteq \Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S)$, $\mathbf{H}_\mathrm{R} \supseteq \Delta(S\circ \mathbf{H}_\mathrm{R})$ である．ただし $\Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S) = \{\Delta((a)_l\circ S) \mid (a)_l \in \mathbf{H}_\mathrm{L}\}$ であり，他も同様である．このときは $\Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S)$ は $\mathbf{T}$ の $k$ESとなり，全Linksideal $\mathbf{L}$ の $\Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S)$ に関する弱有限条件が成り立つ．他についても全くparallelである．

また $\vee S$ $\Delta$ の性質によっては，次の条件をみたすことがある（特殊な例としては $(S, \circ)$ が可換半群の場合）．

$$\mathbf{H}_\mathrm{L} \supseteq \Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S), \quad \mathbf{H}_\mathrm{R} \supseteq \Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S)$$
$$\mathbf{H}_\mathrm{R} \supseteq \Delta(S\circ \mathbf{H}_\mathrm{R}), \quad \mathbf{H}_\mathrm{L} \supseteq \Delta(S\circ \mathbf{H}_\mathrm{R})$$

この場合には，次の関係が成り立つ．

$$\mathbf{H}_\mathrm{L} \cap \mathbf{H}_\mathrm{R} = \Delta(\mathbf{H}_\mathrm{L}\circ S) = \mathbf{H}_\mathrm{L} \cap \mathbf{R} = \mathbf{H}_\mathrm{R} \cap \mathbf{L} = \Delta(S\circ \mathbf{H}_\mathrm{R})$$

そして，これが $\mathbf{T}$ の $k$ESになり，$\mathbf{H}_\mathrm{L}$ または $\mathbf{H}_\mathrm{R}$ からの弱有限条件も引き継がれることも示される．今後 $\mathbf{H}_\mathrm{L} \cap \mathbf{H}_\mathrm{R} =: \mathbf{H}_\mathrm{T}$ とかくことにする．

## Ⅲ　PRIMIDEAL と NULLRADIKAL

$P$ を $S$ の Primideal とする．その定義は通常のように，Ideal $A, B$ に対して

$$A \circ B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ od } B \subseteq P$$

なる Ideal $P$ のことである．すると，これについて次の各条件は同値である．

($p$ 1)　$P \in \mathbf{T}$ は Primideal である．

($p$ 2)　$(a) \circ (b) \subseteq P \Rightarrow (a) \subseteq P \text{ od } (b) \subseteq P$

($p$ 3)　$\alpha, \beta \in \mathbf{H}_L \cup \mathbf{H}_R$ ; $S \circ \alpha \circ S \circ \beta \circ S \subseteq P \Rightarrow \alpha \subseteq P \text{ od } \beta \subseteq P$

($p$ 4)　$\alpha, \beta \in \mathbf{H}_L \cup \mathbf{H}_R$ ; $\alpha \circ S \circ \beta \subseteq P \Rightarrow \alpha \subseteq P \text{ od } \beta_{,} \subseteq P$

($p$ 5)　$A, B \in \mathbf{L}$ ; $A \circ B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ od } B \subseteq P$

($p$ 6)　$A, B \in \mathbf{R}$ ; $A \circ B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ od } B \subseteq P$

($p$ 7)　$A \in \mathbf{L}, B \in \mathbf{R}$ ; $A \circ S \circ B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ od } B \subseteq P$

($p$ 8)　$A \in \mathbf{L}, B \in \mathbf{R}$ ; $B \circ A \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ od } B \subseteq P$

($p$ 9)　$(a)_l \circ (b)_l \subseteq P \Rightarrow (a)_l \subseteq P \text{ od } (b)_l \subseteq P$

($p$ 10)　$(a)_r \circ (b)_r \subseteq P \Rightarrow (a)_r \subseteq P \text{ od } (b)_r \subseteq P$

($p$ 11)　$(a)_l \circ S \circ (b)_r \subseteq P \Rightarrow (a)_l \subseteq P \text{ od } (b)_r \subseteq P$

($p$ 12)　$(a)_r \circ (b)_l \subseteq P \Rightarrow (a)_r \subseteq P \text{ od } (b)_l \subseteq P$

この同値を示すには，たとえば次のような Pfeilfolgerung によればよい：($p$ 1) $\Rightarrow$ ($p$ 2) $\Rightarrow$ ($p$ 3) $\Rightarrow$ ($p$ 4) $\Rightarrow$ ($p$ 5) $\Rightarrow$ ($p$ 9) $\Rightarrow$ ($p$ 1)，($p$ 4) $\Rightarrow$ ($p$ 6) $\Rightarrow$ ($p$ 10) $\Rightarrow$ ($p$ 1)，($p$ 4) $\Rightarrow$ ($p$ 8) $\Rightarrow$ ($p$ 12) $\Rightarrow$ ($p$ 9)，($p$ 4) $\Rightarrow$ ($p$ 7) $\Rightarrow$ ($p$ 11) $\Rightarrow$ ($p$ 1).

$S$ 自身はもちろん Primideal であるから，任意の Ideal $A \in \mathbf{T}$ に対して $A \subseteq P$ なる Primideal $P$ は存在する．このような Primideal の全部の共通分を Ideal $A$ の “Radikal” という．それを記号で Rad($A$) で表わす．また Nullideal の Radikal を Ringoid $S$ の Radikal と定義し，それを Rad($S$) で

表わす．もちろん$\mathrm{Rad}(A)$も$\mathrm{Rad}(S)$も$\mathbf{T}$にぞくする．それは$\mathbf{T}$が“下に向かってkomplettであるからである．

$A \in \mathbf{K} = \mathbf{L} \cup \mathbf{R}$ に対して $A^{\circ(1)} = A$ とし帰納的に $A^{\circ(n)} = A^{\circ(n-1)} \circ A^{\circ(n-1)}$ によって$A^{\circ(n)}$を定義する．$A$に対して $A^{\circ(n)} = 0$ となる正の整数$n$が存在するとき，$A$を“nilpotentes Ideal”という．$\mathbf{K}$の部分集合$\mathbf{K}'$がNullideal以外にnilpotentes Idealをもたないとき，$\mathbf{K}'$は“nilpotentfrei”であるという．

これに関して次の各条件は互いに同値である．

($n$ 1)　$\mathrm{Rad}(S) = 0$

(n 2)　$\mathbf{H}_{\mathrm{T}}$はnilpotentfreiである．

($n$ 3)　$\mathbf{T}$　はnilpotentfreiである．

($n$ 4)　$\mathbf{H}_{\mathrm{L}}$はnilpotentfreiである．

($n$ 5)　$\mathbf{L}$　はnilpotentfreiである．

($n$ 6)　$\mathbf{H}_{\mathrm{R}}$はnilpotentfreiである．

($n$ 7)　$\mathbf{R}$　はnilpotentfreiである．

これらの同値を証明するためいくつかの用意が必要である．

［Vorb. 1］　$\mathbf{H}$を積“$\circ$”に関して閉じさせた集合を$m(\mathbf{H})$で表わす．$m(\mathbf{H})$の部分集合$\mathbf{E}$で積“$\circ$”に関して閉じているものを，簡単のため“$m$-系”という．$\phi$は1つの$m$-系とする．

$P$をPrimidealとし，$P$に含まれない$m(\mathbf{H})$の元全部を$\mathbf{E}(P)$とする．これは$m$-系である．いま$A$をIdealとし，$J(A) = \{(a_1) \vee \cdots \vee (a_r) \mid a_i \in A\}$とする．$J(A) \cap \mathbf{E} = \phi$ なる$m$-系$\mathbf{E}$を取って固定する（$\mathbf{E}$の存在は$\phi$によって保証されている）．このとき次の条件をみたすIdeal $P$が存在する：

($s$ 1)　$A \subseteq P$

(s 2)　$J(P) \cap \mathbf{E} = \phi$

(s 3)　$P \subseteq B,\ B \in \mathbf{T} \Rightarrow J(B) \cap \mathbf{E} \neq \phi$

(s 4)　$P$ は Primideal である.

(証明)　$A_i \in \mathbf{T}$；$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \cdots$；$J(A_i) \cap \mathbf{E} = \phi$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とする. $(U_i J(A_i))^\Delta = A^*$ とおけば $A^* = (U_i A_i)^\Delta$ であり, $J(A^*) \cap \mathbf{E} = \phi$ となる. なぜかというと, かりに $J(A^*)$ が $\mathbf{E}$ の元 $E = (c_1) \vee \cdots \vee (c_n)$ を含むとすれば, 各 $(c_i)$ について $(c_i) \subseteq (u_{i,1}) \vee \cdots \vee (u_{i,t(i)})$ なる $(u_{ik}) \in U_j J(A_j)$ が存在するから $E \subseteq U_{i=1}^{n}((u_{i,1}) \vee \cdots \vee (u_{i,t(i)})) \subseteq A_N$ が十分大きい $N$ について成り立つ. これは $J(A_N)$ が $\mathbf{E}$ と元を共有することになって仮定に反する. したがって条件 (s 1), (s 2), (s 3) をみたす Ideal $P$ の存在が保証される (Zornscher Zusatz). そこで $P$ について (s 4) を示すため, $A, B \in \mathbf{T}$；$A, B$ ともに $P$ に含まれないとすれば $(P \cup A)^\Delta$, $(P \cup B)^\Delta$ がそれぞれ $\mathbf{E}$ の元 $E_A, E_B$ を含む. すると

$$E_A \circ E_B \subseteq (P \cup A)^\Delta \circ (P \cup B)^\Delta \subseteq (P \cup A \circ B)^\Delta$$

ここで $A \circ B \subseteq P$ とすれば $E_A \circ E_B \subseteq P$ であるが $E_A \circ E_B \in \mathbf{E}$ はもちろんであるから, これは矛盾である. したがって $A \circ B$ は $P$ に含まれない (証明終).

[Vorb. 2]　$A \in \mathbf{T}$ とする. “$(a)$ を元にもつ $m$-系は $J(A)$ と共通元 (有限生成 Ideal) を共有する” という条件をみたす $(a)$ の全部の集合を $\mathbf{D}(A)$ とすれば Rad$(A)$ に含まれる各元 $c$ について $(c)$ は $\mathbf{D}(A)$ に含まれる.

(証明)　$(c) \in \mathbf{H}_\mathrm{T}$ とする. $\mathbf{E}$ を $(c)$ を元にもつ任意の m-系とし, $\mathbf{E}$ は $J(A)$ と共通元をもたないと仮定すれば Vorb. 1 で得た結果によって $A \subseteq P$, $J(P) \cap \mathbf{E} = \phi$ なる Primideal $P$ が存在するが $(c) \subseteq P$ であるから $(c)$ は $\mathbf{E}$ の元ではない. これは矛盾である. よって $J(A) \cap \mathbf{E}$ は $\phi$ でない. したがって $(a) \in \mathbf{D}(A)$ でなくてはならない (証明終).

以上の用意のもとに ($n$1), ($n$2), ($n$3) が同値であることを示すことにしよう.

まず ($n$1)$\Rightarrow$($n$3)： $A \in \mathbf{T}$ を nilpotentes Ideal とする. するともちろん任意の Primideal $P$ に対して $A \subseteq P$ であるから $P \subseteq \mathrm{Rad}(S)$ であり, $\mathrm{Rad}(S) \neq 0$ である. ($n$3)$\Rightarrow$($n$2) は自明であるので ($n$2)$\Rightarrow$($n$1) を示せばよい. いま $\mathrm{Rad}(S) \neq 0$ とすると $(a) \in \mathbf{H}$, $(a) \neq 0$, $(a) \subseteq \mathrm{Rad}(S)$ なる $(a)$ を取ることができる. $(a) \in \mathbf{D}((0))$（ただし $(0)$ は Nullideal）であるから $\mathbf{E}_{(a)} = \{(a)^i \mid i = 1, 2, \cdots\} \ni (0)$. すなわち $(a)$ は nilpotentes Hauptideal である.

話を透明にするため Vorb. 1, 2 以下 $\mathbf{T}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{T}}$ について論述したが, これは $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{L}}$ についても $\mathbf{R}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}$ についても "ほとんど同様" に論じられる. そして ($n$1), ($n$4), ($n$5)； ($n$1), ($n$6), ($n$7) がそれぞれ同値であることが分かるから結局 ($n$1), …, ($n$7) が同値となる.

[Bemerkung] 以上の論述では ($p$7), ($p$11) を除けば, すべて "$\circ$" の結合律を仮定しないでも何ら不都合はない. それは一々チェックできることであり, nichtassoziatire な代数系 $(S, \circ, \Delta_{\circ})$ において "nilpotentfrei $\Leftrightarrow \mathrm{Rad}(S) = 0$" の成立が証明されたことになる.

## IV (*)-IDEAL と (#)-IDEAL の諸性質

この章では代数系 $S = (S, \Delta = \{\phi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\})$ に関して次の条件を仮定して話を進める.

($h$1) $\Delta$ は $\phi_0 =$ "$\circ$" を含み, "$\circ$" は $\Delta_0 = \Delta \setminus \{\circ\}$ の各 Operation に対して分配的である.

($h$2) $(S, \circ)$ は assoziativ で, 単位元をもつ.

($h$3) $\mathrm{Rad}(S) = 0$ である.

$\mathbf{H}_\mathrm{L}$の部分集合$\mathbf{H}'_\mathrm{L}$と$A\in\mathbf{L}$ に対して

$$l(A\,;\,\mathbf{H}'_\mathrm{L})=\{(x)\in\mathbf{H}'_\mathrm{L}\mid(x)\circ A=0\}$$

とおく．また$\mathbf{H}_\mathrm{R}$の部分集合$\mathbf{H}'_\mathrm{R}$に対しても同様に下のようにおく．

$$r(A\,;\,\mathbf{H}'_\mathrm{R})=\{(x)\in\mathbf{H}'_\mathrm{R}\mid A\circ(x)=0\}$$

$A\in\mathbf{T}$ の場合には，$\mathbf{H}'_\mathrm{T}\subseteq\mathbf{H}_\mathrm{T}$ に対して $l(A\,;\,\mathbf{H}'_\mathrm{T})$, $r(A\,;\,\mathbf{H}'_\mathrm{T})$ が役に立つ．

まず $A\in\mathbf{L}$ のとき $B\circ A=0$ なる $B\in\mathbf{L}$ の全部を$\mathbf{F}$とする．このとき $l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ はどれかの $B\in\mathbf{F}$ に対して $(x)_l\subseteq B$ となる $(x)_l$の全部である．また，この$A$に対して $l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ から生成されるLinksidealは実は $l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{T})$ から生成されるIdealに等しいことが分かる： 理由： 前者に含まれる任意の $(x)_l$をとれば $(x)_l\subseteq(u_1)_l\vee\cdots\vee(u_n)_l$, $(u_i)_l\in l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$, が存在する．よって $((x)_l\circ S)\circ A=(x)_l\circ(S\circ A)=(x)_l\circ A\subseteq\bigvee_{i=1}^{n}(x)_l\circ A=0$ となり，$(x)_l\circ S\in\mathbf{H}_\mathrm{T}$, $(x)_l\subseteq(x)_l\circ S$ であるから $l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ で生成されるLinksidealは $l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{T})$ で生成されるIdealに含まれる．逆の包含関係は自明であるから上記の主張は正しい．

このようにして得られたIdealを記号 $\sigma_l(A)$ で表わす．“右側” についても parallel に $\sigma_r(A)$, $A\in\mathbf{R}$, が定義できる．

$A\in\mathbf{T}$ に対しては次の事実が成り立つ：

(a 1)　$\sigma_l(A)=\sigma_r(A)=:\sigma(A)$

(a 2)　$A\circ\sigma(A)=\sigma(A)\circ A=0$

以下このことを示す： $(x)_l\subseteq\sigma_l(A)$ なる $(x)_l$に対して $(x)_l\subseteq(x_1)_l\vee\cdots\vee(x_t)_l$, $(x_i)_l\in l(A\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$, なる $(x_i)_l$があるから $(x)_l\circ A\subseteq\bigvee_{i=1}^{t}(x_i)_l\circ A=0$, $(x)_l\circ A=0$. よって

$$\sigma_l(A)\circ A=0$$
$$(A\circ\sigma_l(A))^{\circ(2)}=A\circ(\sigma_l(A)\circ A)\circ\sigma_l(A)=0$$

であるが，$\mathrm{Rad}(S)=0$ すなわち $\mathbf{L}$ が nilpotentfrei であることから $A\circ\sigma_l(A)=0$ である．全く同様に論じて $\sigma_r(A)\circ A=0$ である．つぎに $(x)\in\mathbf{H}_\mathrm{T}$，$(x)\subseteq\sigma_l(A)$ なる $(x)$ をとれば，上に論じたことより $A\circ(x)=0$ であるから $(x)\in r(A\,;\mathbf{H}_\mathrm{T})$ でなくてはならない．したがって

$$\begin{aligned}\sigma_l(A)&=(\cup\{(x)\in\mathbf{H}_\mathrm{T}\mid(x)\subseteq\sigma_l(A)\})^\Delta\\&\subseteq(r(A\,;\mathbf{H}_\mathrm{T}))^\Delta=\sigma_r(A)\end{aligned}$$

全く対称的に $\sigma_r(A)\subseteq\sigma_l(A)$ であるから $(a\,1)$ が証明された．$(a\,2)$ もこの証明の中で得られている．

$\mathrm{Rad}(S)=0$ なる条件を置いたため，$\mathbf{L}$ と $\mathbf{T}$ の間に次のような強い関係がある：$A\in\mathbf{T}$，$C\in\mathbf{L}$ に対して

$$A\circ C=0\ \Leftrightarrow\ A\cap C=0$$

それは $(A\cap C)^{\circ(2)}\subseteq A\circ C\subseteq A\cap C$ より明白である．そしてまた $C\in\mathbf{L}$ であれば $\sigma_l(C)\cap C=0$ である．このことは $\sigma_l(C)\circ C=0$，$\sigma_l(C)\in\mathbf{T}$ であることから上に述べた結果を用いて得られる．さらに $A\in\mathbf{T}$ を固定して，もし $A\cap B=0$，$B\in\mathbf{T}$ なる $B$ をとれば $B\subseteq\sigma(A)$ となる．このことは，$(x)\subseteq B$ に対して $(x)\cap A=0$ であるから $(x)\circ A=0$，$(x)\in l(A\,;\mathbf{H}_\mathrm{T})$，$(x)\subseteq\sigma(A)$ となり $B\subseteq\sigma(A)$ でなくてはならない．

さて以上の用意のもとに "$*$-Map" および "$\#$-Map" を導入する：それは

$$\begin{aligned}&*\ :\mathbf{L}\to\mathbf{T}\,;A\mapsto A^*=(\sigma_r\circ\sigma_l)(A)=(\sigma\circ\sigma_l)(A)\\&\#\ :\mathbf{R}\to\mathbf{T}\,;A\mapsto A^\#=(\sigma_l\circ\sigma_r)(A)=(\sigma\circ\sigma_r)(A)\end{aligned}$$

によって与えられる写像である．$A^*=A$，$A^\#=A$ なる $A$ をそれぞれ "(*)-Ideal"，"(#)-Ideal" ということにする．これらについて次の各性質を験証することができる．

$A, B \in \mathbf{L}$ に対して

$(*1)$　$A \subseteq A^*$

$(*2)$　$A^{**} = A^*$

$(*3)$　$A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

$A, B \in \mathbf{R}$ に対して

$(\#1)$　$A \subseteq A^\#$

$(\#2)$　$A^{\#\#} = A^\#$

$(\#3)$　$A \subseteq B \Rightarrow A^\# \subseteq B^\#$

したがって $A \in \mathbf{T}$ に対して，前に述べた結果を用いて，次が成り立つ：

$(t1)$　$A^* = A^\# = (\sigma \circ \sigma)(A)$

$(t2)$　$A : (*)\text{-Ideal} \Leftrightarrow A : (\#)\text{-Ideal}$

この場合 $A$ を “閉 Ideal” または “$(*\#)$-Ideal” とよぶ.

## V　(*)-IDEAL，(#)-IDEAL の分解

この章においても前の章と同じ仮定をおく．とくに $\mathrm{Rad}(S) = 0$ が仮定してあるので $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ などはすべて nilpotentfrei である.

まず前の章までの準備によって次の定理を得る.

SATZ　1　閉 Ideal は有限個または無限個の Primideal の共通分に分解できる．したがって任意の Ideal $A$ について $A^* = A^\#$ が同様な分解をもつ.

この証明は下に示すように簡単である：いま $A$ を閉 Ideal とし $A$ を含むすべての Ideal の集合を $\mathbf{I}(A)$ とおくと，これは包含関係と “$\circ$” に関して束半群を作る．さて $A$ が Primideal の共通分に分解できないと仮定してみると，$M \in \mathbf{I}(A)$ で，$A \subset M$，$M^{\circ(2)} \subseteq A$ なる Ideal $M$ を見付けることがで

きる．すると

$$(M \cap \sigma(A))^{\circ(2)} \subseteq A \cap \sigma(A) = 0, \qquad M \cap \sigma(A) = 0$$

である．よって $M \subseteq (\sigma \circ \sigma)(A) = A^* = A^\sharp$．これは $A$ が $A^* = A^\sharp$ と異なることを示しているから矛盾である（証明終）.

つぎに $*$-Map（または $\sharp$-Map）に関して後に使う性質を述べておこう．

まず $A \in \mathbf{T}$, $C \in \mathbf{L}$ に対して次が成り立つ：

$$(b\,0) \quad A \cap C = 0 \ \Rightarrow \ A^* \cap C = A \cap C^* = 0$$

$C \in \mathbf{R}$ の場合も同様であるが，そのときは $C^*$ の代わりに $C^\sharp$ とする．

上記の証明は次の通り： $A \circ C = 0$ であるから $C \subseteq \sigma_r(A) = \sigma(A)$．よって $C \cap A^* \subseteq \sigma(C) \cap A^* = 0$, $C \cap A^* = 0$．また $A \circ C = 0$ より $A \subseteq \sigma_l(C)$ である．よって $A \cap C^* \subseteq \sigma_l(C) \cap C^* = \sigma_l(C) \cap \sigma(\sigma_l(C)) = 0$ となり，$A \cap C^* = 0$ となる（証明終）.

つぎに $C \in \mathbf{L}$ とし $A \supseteq C$, $A \in \mathbf{T}$ とすると，

$$M \in \mathbf{T},\ M \circ A = 0 \ \Rightarrow \ M \circ C = 0$$

また次のことが成り立つ：

$(b\,1)$　$C \subseteq A$, $C \in \mathbf{L}$, $A \in \mathbf{T}$

$(b\,2)$　$M \circ C = 0$, $M \in \mathbf{T} \ \Rightarrow \ M \circ A = 0$

であれば $A \subseteq C^*$ となる．

この証明について前半は容易に verifizieren できる．そこで後半についてであるが，いま $\sigma_l(C) \circ A \neq 0$ とすれば $M := A \cap \sigma_l(C) \neq 0$ が分かる．そして $M \in \mathbf{T}$ で $A \cap M = M \neq 0$．したがって $M \circ A \neq 0$ である．他方において

$$M \circ C = (A \cap \sigma_l(C)) \circ C \subseteq \sigma_l(C) \circ C = 0, \quad M \circ C = 0$$

となってこれは矛盾である．したがって次のようになる：

$$\sigma_l(C)\circ A=0,\ \ A\subseteq\sigma(\sigma_l(C))=C^*$$

さらにまた次の等式が有用である：

$(h)$　$C\in\mathbf{L}\ \Rightarrow\ (C\circ S)^*=C^*$

この証明のため $(x)_l\circ C=0$ とすればただちに

$$\Delta((x)_l,\ C\circ S)=0,$$
$$l(C\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})\subseteq l(C\circ S\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$$

であるが，逆に $(x)_l\in l(C\circ S\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ とすれば，$\Delta((x)_l,\ C\circ S)=0$．よって $(x)_l\circ C\subseteq(x)_l\circ C\circ S=0$，$(x)_l\circ C=0$．したがって $(x)_l\in l(C\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ となり $l(C\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})=l(C\circ S\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L})$ である．このことから次の等式を得る：

$$\sigma_l(C)=\Delta(l(C\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L}))=\Delta(l(C\circ S\,;\,\mathbf{H}_\mathrm{L}))=\sigma_l(C\circ S),$$
$$C^*=\sigma(\sigma_l(C))=\sigma(\sigma_l(C\circ S))=(C\circ S)^*$$

これで次の定理を証明する用意ができた．

SATZ　2　任意の Linksideal $A$, $B$ に対して

$$(A\circ B)^*=A^*\cap B^*$$

が成り立つ．任意の Rechtsideal $A$, $B$ に対して

$$(A\circ B)^\#=A^\#\cap B^\#$$

が成り立つ．

前半を証明する（後半は parallel に証明できる）．まずはじめに $A$ が Ideal（$\mathbf{T}$ の元）の場合を考える．ただし $B$ は $\mathbf{L}$ の元とする．この場合は $A\circ B\subseteq A\cap B$ であるから $(A\circ B)^*\subseteq(A\cap B)^*\subseteq A^*\cap B^*$ である．そこで $\mathbf{T}$ の元 $M$ で次の関係をみたすものを取る：

（$\alpha$）　$U := A^* \cap B^* \cap M \neq 0$

するともちろん $A^* \cap M \neq 0$ であるから $A \cap M \neq 0$ である．それは（$b\,0$）によって保証される．そこで $A \circ B \cap M \neq 0$ を示せばよい．なぜならば，もしこれが成立すれば

$$A^* \cap B^* \subseteq (A \circ B)^{**} = (A \circ B)^*$$

であることが（$b\,0$）の次に述べた性質を用いて確かめられる．さてここで $A \circ B \cap M = 0$ としてみると次のようになる：

$$(A \cap B \cap U)^{\circ(2)} \subseteq A \circ B \cap U \subseteq A \circ B \cap M = 0$$

L は nilpotentfrei である（$\mathrm{Rad}(S) = 0$ より）から $A \cap B \cap U = 0$ でなくてはならない．したがって $A \circ (B \cap U) = 0$ となり次を得る：

（$\beta$）　$B \cap U \subseteq \sigma_r(A) = A^*$

よって（$\alpha$）を用いて次の関係が分かる：

（$\gamma$）　$B \cap U \subseteq U \subseteq A^*$

すると $A^* \circ \sigma(A) = 0$，$A^* \cap \sigma(A) = 0$ であるから $B \cap U = 0$ となることが（$\beta$），（$\gamma$）によって分かる．したがって（$b\,0$）を再度用いて次のように矛盾を導くことができる：$0 = B^* \cap U = U \neq 0$．これによって $A$ が Linksideal の場合に戻れば，性質（$h$）を用いて次のように計算できる：

$$(A \circ B)^* = (A \circ (S \circ B))^* = ((A \circ S) \circ B)^*$$
$$= (A \circ S)^* \cap B^* = A^* \cap B^*$$

これで証明が完了した．

この定理より次の系が得られる：

FOLGESATZ 1 $A \in \mathbf{T}$, $B \in \mathbf{L}$ であれば $(A \circ B)^* = (A \cap B)^*$ である．また $A \in \mathbf{T}$, $B \in \mathbf{R}$ であれば $(A \circ B)^\# = (A \cap B)^\#$ である．

FOLGESATZ 2 $A, B \in \mathbf{L}$ でともに(*)-Idealであるか； $A$, $B \in \mathbf{R}$ でともに(#)-Idealであれば

$$A \circ B = A \cap B = B \circ A$$

が成り立つ．

この章の結果は［14］［15］で得られた諸結果と関連している．とくに［16］で得た分解定理を $S$ に適用したものの拡張が得られている．

## VI (*)-PRIMIDEAL の KERN の分解

この章でも前の章と同じ条件が置かれているものとする．

まず Linksideal $Q$ が(*)-Linksprimideal（Abk : (*)-LP-Ideal）とは

$$A \circ B \subseteq Q\,;\, A,\, B \in \mathbf{L},\ \ A^* = S \ \ \Rightarrow \ \ B \subseteq Q$$

をみたすときである．

この条件はもっと弱くして述べられる．すなわち Linksideal $Q$ が(*)-LP-Ideal になるためには次の条件（必十）でよいのである：

$$A \circ B \subseteq Q\,;\, A \in \mathbf{T},\ \ B \in \mathbf{L},\ \ A^* = S \ \ \Rightarrow \ \ B \subseteq Q$$

このことは（$h$）なる性質を用いれば容易に分かる．実際 $A \circ B \subseteq Q$ ; $A$, $B \in \mathbf{L}$, $A^* = S$ とすれば，$(A \circ S) \circ B = A \circ (S \circ B) = A \circ B \subseteq Q$ であって $A \circ S \in \mathbf{T}$ であるから $(A \circ S)^* \overset{(h)}{=} A^* = S$ である．よって $B \subseteq Q$ でなくてはならない．逆は自明である．

(*)-LP-Ideal $Q$ は次の性質をもつ：

(k)　$A\circ B\subseteq Q\,;\,A,\,B\in\mathbf{L}\,;\,B^*\subseteq A^*\;\Rightarrow\;B\subseteq Q$

この証明は次の通り：

まず $\sigma_\iota(A)\circ B\subseteq(\sigma_\iota(A)\circ B^*)^*\subseteq(\sigma_\iota(A))^*\circ A^*=(\sigma_\iota(A)\circ A)^*=0^*=0$ であるから $\sigma_\iota(A)\circ B=0$ である．よって $(A\vee\sigma_\iota(A))\circ B=A\circ B\subseteq Q$. また $\sigma_\iota(A\vee\sigma_\iota(A))\subseteq\sigma_\iota(A)\cap(\sigma_\iota(A))^*=0$ であるから $\sigma_\iota(A\vee\sigma_\iota(A))=0$ となる．したがって $(\sigma_\iota(A\vee\sigma_\iota(A)))^*=S$. よって $B\subseteq Q$ である（証明終).

Linksideal $A$ に含まれるIdeal（$\mathbf{T}$ の元）全部から生成されるIdeal $k(A)$ を $A$ の "Kern" という： $k(A):=(U\{C\in\mathbf{T}\mid C\subseteq A\})^\Delta$

さて(*)-LP-IdealのKernについては次の結果が得られる：

**SATZ　3**　$Q$ を(*)-LP-Idealとすれば，$k(Q)$ について次が成り立つ：

($q$ 1)　$k(Q)$ は(*)-LP-Idealである．

($q$ 2)　$k(Q)$ は有限個または無限個のPrimidealの共通分として分解できる．

これを証明するため，$A$, B をLinksidealとして $A\circ B\subseteq k(Q)$，$A^*=S$ とすると次の包含関係が次々に得られる：

$$A\circ(B\circ S)\subseteq k(Q)\circ S=k(Q)\subseteq Q$$
$$B\circ S\subseteq Q,\;\;B\circ S\subseteq k(Q),\;\;B\subseteq k(Q)$$

すなわち $k(Q)$ は(*)-LP-Idealである．つぎに $k(Q)$ が閉Idealであることを示す：

$$k(Q)\circ(k(Q))^*\subseteq k(Q)$$
$$(k(Q))^*=(k(Q))^{**}$$

であるから（$k$）を用いて（$k(Q)$）$^* \subseteq k(Q)$ である．よって（$k(Q)$）$^*$ $= k(Q)$ である．この定理の（$q\,2$）についてはFolgesatz 1を用いて証明できる．

この定理はLinksideal $Q$ について述べたがRechtsideal についてもparallelに述べることができる．

この章の終りに次のことを述べておく．

いま扱っているRingoid $S$すなわち 条件：（$h\,1$），（$h\,2$），（$h\,3$）および第2章で述べた条件：$\mathbf{H}_L$と$\mathbf{H}_R$に関する弱有限条件をみたす$S$に対してさらに**T**に関して降鎖律を仮定すれば，Satz 1 および Satz 3よりそれぞれ次の結論が得られる：

Zusatz $\alpha$　任意のIdeal $A$に対して $A^* = A^\#$ は有限個のPrimidealの共通分として分解され，その分解は分解に現われるPrimidealの順序を無視すれば一意的である．とくに閉Idealに対しても同様である．

Zusatz $\beta$　$Q$を(*)-LP-Idealまたは(#)-LP-Idealとし，そのKernを$k(Q)$とするとき，$k(Q)$は有限個のPrimidealの共通分として分解され，それはZusatz $\alpha$で述べたと同じ意味で一意的である．

この2つのZusatzの一意性はSatz 2またはそのFolgesatzを用いて証明することができる．

付記：すでにIにおいて触れたように，この論文では $\Delta = \{\phi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に影響されない結果のみ論述した．いま $\Delta$ の部分集合の作るBoole束（$\mathfrak{P}(\Delta), C$）を考え，この束の元のそれぞれについてわれわれの得た結果と同じ結果が得られることはほとんど明らかである．そこで $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{P}(\Delta)$ として，$S = (S, \circ)$の，半群としての，Idealがすべて$\Delta_1$で閉じていれば$\Delta_2$でも閉じているときは（$S, \circ, \Delta_1$）における閉Idealの共通分分解と（$S, \circ, \Delta_2$）におけるそれとに順序を定義することができる．この順序を$\rho$

とかくことにし，"$(S, \circ, \Delta_i)$ における分解" なる概念を $F(S, \circ, \Delta_i)$ なる記号で表示すると

$$\mathbf{F}=\{F(S, \circ, \Delta_i) \mid \Delta_i \in F(\Delta)\}$$

に順序構造 $\rho$ が入る．それを（$\mathbf{F}$. $\rho$）とかく．この順序集合は $F(\Delta)$ や $\phi_\lambda$, $\phi_\mu$, … 等の間の関係［2］［7］［9］によって種々の構造をもつ［11］［12］［17］［19］［22］［23］［24］．その研究は他日を期したい．

（平成3年4月14日，於 蔾杖庵）

## 文　献


[1] Birkhoff, G. : On the structure of abstract algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc., **31** (1935).

[2] Birkhoff, G. : Subdirect unions in universal algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944).

[3] Birkhoff, G. : Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **25**, Revised ed., New York (1978).

[4] Cohn, P. M. : Universal algebra, Harper & Row, New York (1975).

[5] Feigelstock, S. : A universal subalgebra theorem, Amer. Math. Monthly, **72** (1965).

[6] Grätzer, G. : Universal algebra, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1977).

[7] Grätzer, G. and Schmidt, E. : On inaccessible and minimal congruence relations, Acta Sci. Math. Szeged, **31** (1970).

[8] Jónsson, B. : Universal relational systems, Math. Scand., **4** (1956).

[9] Jónsson, B. : On direct decompositions of torsion-free abelian groups, *ibid.* **5** (1957).

[10] Kuroš, A. G. : Lectures on general algebra, Chelsea, New York (1983).

[11] Marczewski, E. : A general scheme of the notions of independence in mathmatics, Bull. Acad. Polon. Sci., **6** (1958).

[12] Marczewski, E. ; Independence and homomorphisms in abstract algebras, Fundamanta Math., **50** (1961).

[13] McCoy, N. H. : Prime ideals in general rings, Amer. J. Math., **71** (1948).

[14] Murata, K. : Decomposition of radical elements of a commutative residuated lattice, J. Inst. Polytec. Osaka City Univ., **10** (1959).

[15] Murata, K. : On isolated components of ideals in multiplicative systems, *ibid.* **11** (1960).

[16] Murata, K. : On nilpotent-free multiplicative systems, Osaka Math. J., **14** (1962).

[17] Morley, M. and Vaught, R. L. : Homogeneous universal models, Math. Scand., **31** (1982).

[18] Newmann, B. H. : Universal algebra, Lecture Notes, New York Univ. (1962).

[19] Pierce, R. S. : A note on free products of abstract algebras, Indag. Math., **25** (1963).

[20] Slominski, J. : The theory of abstract algebras with infinite operations, Rozprawy Math., **18** (1959).

[21] Swierczkowski, S. : Algebras which are independently generated by every $n$ elements, Fundamanta Math., **49** (1960).

[22] Swierczkowski, S. : On isomorphic free algebras, ibid. **50** (1961).

[23] Urbanik, K. : A representation theorem for Marczewski's algebras, *ibid.* **48** (1959).

[24] Urbanik, K. : Remark on independence in finite algebras, Coll. Math., **11** (1983).